

Roman Kinash, Oksana Kinash**

OBLICZENIE SZEROKOŚCI RYS PROSTOPADŁYCH BELKI ŻELBETOWEJ NA PODSTAWIE MECHANIKI ZNISZCZENIA**

1. Wstęp

Rozwój technologii betonu zaowocował w ostatnich dziesięcioleciach powstaniem betonów nowej generacji, które są odpowiedzią na konieczność uwzględnienia w procesach inwestycyjnych dodatkowych czynników związanych m.in. ze zwiększonymi wymaganiami co do trwałości konstrukcji [19]. Konstrukcje żelbetowe to ustroje z betonu wzmocnione w sposób celowy prętami lub taśmami ze stali zbrojeniowej. W przypadku stosowania takich konstrukcji w budownictwie specjalnym niezbędny jest dobór odpowiednich metod i zakresu obliczeń w taki sposób, aby zostały uwzględnione efekty niekorzystnych oddziaływań na konstrukcje.

Właściwością belek żelbetowych jest pojawianie się rys w tych częściach, w których naprężenia osiągają wytrzymałość betonu na rozciąganie. Rysy powstające przy zginaniu są w przybliżeniu prostopadłe do głównego zbrojenia i biegną, ze stałym rozstawem od brzegu elementu do osi obojętnej [17]. Najważniejszym parametrem, który charakteryzuje rysy jest szerokość jej rozwarcia. Metoda obliczania szerokości rys zawarta w EC2 [16], oparta jest na znanych od dawna podstawach teoretycznych [18], wykorzystanych m. in. w pracach [1, 2] oraz w polskiej normie [14]. Wszystkie te normy podają zalecenia oraz wzory do obliczania tej wartości, jednak wiadomo, że obliczone szerokości rys według wspomnianych norm mogą znacznie różnić się od otrzymanych podczas badań doświadczalnych.

Zastosowanie zasad mechaniki zniszczenia do opisanego stanu naprężenia zginanych elementów żelbetowych z rysami, a zwłaszcza do obliczenia szerokości rozwarcia rys prostopadłych jest podejściem perspektywicznym [3]. Stąd w niniejszym pracy przedstawiono

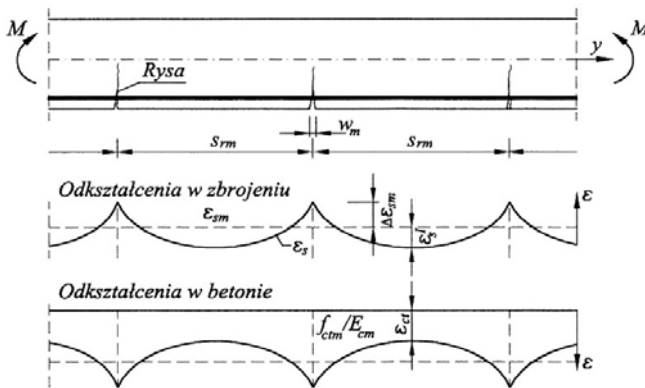
* Katedra Geomechaniki, Budownictwa i Geotechniki, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

** Artykuł opracowano w ramach pracy statutowej AGH nr 11.11.100.197

główne założenia metody obliczania rozwarcia rys z wykorzystaniem ogólnych założeń mechaniki zniszczenia oraz metody elementów skończonych.

2. Wyznaczenie szerokości rys prostopadłych

Szerokość rys oblicza się na podstawie uśrednionych wartości odkształceń w betonie i stali zbrojeniowej [15]. Na rysunku 1 podano główne założenia wykorzystywane w obliczeniach. Górny wykres dotyczy odkształceń zbrojenia zginanego elementu, dolny zaś odkształceń betonu. Na odcinku elementu między rysami odkształcenia zbrojenia są mniejsze od odkształceń w przekroju przez rysę.



Rys. 1. Odkształcenia w zbrojeniu i betonie rozciągającym w chwili powstania rysy [15]

Całkując różnicę odkształceń stali ε_{sm} i betonu ε_{cm} na odcinku s_{rm} między rysami, wyznacza się średnią szerokość rysy:

$$w_m = \int_{s_{rm}} (\varepsilon_s - \varepsilon_{ct}) dy \quad (1)$$

Pominięcie nieznanymi (w stosunku do ε_s) odkształceń betonu rozciąganego ε_{ct} pozwala określić średnią szerokość rozwarcia rysy, jako iloczyn średniego rozstawu rys s_{rm} i średnich odkształceń zbrojenia ε_{cm} w przekroju przez rysę (rys. 1):

$$w_m \cong s_{rm} \varepsilon_{sm} \cong (\varepsilon_{sm} - \Delta \varepsilon_{sm}) \quad (2)$$

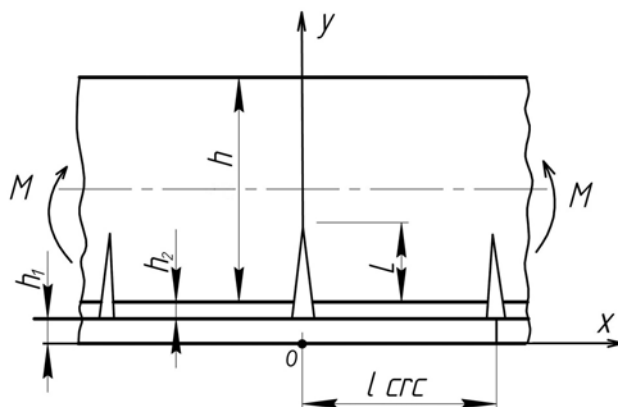
Z kolei odkształcenia zbrojenia ε_{sm} oblicza się z funkcji naprężeń w przekroju zarysowanym [15].

3. Model matematyczny belki żelbetowej

W rozpatrywanym stanie naprężeniowo-odkształceniowym belki żelbetowej o przekroju prostokątnym, w której przy zginaniu momentem M w miejscu czystego zginania po-

wstaje system rys prostopadłych, przyjęty model matematycznym przewiduje rozmieszczenie w strefie rozciągania rys o jednakowej długości L z jednakowym rozstawem l_{crc} . Belka jest rozpatrywana, jako pręt o nieskończonej długości ze zbrojeniem taśmowym w strefie rozciąganej betonu (dotyczy to konstrukcji żelbetowych ze zbrojeniem zewnętrznym [11], albo stosowane uproszczenia przy obliczaniu zwykłych belek żelbetowych ze zbrojeniem prętowym w strefie rozciąganej). W warunkach płaskiego stanu naprężenia pole przekroju prętów zbrojeniowych przyjęto, jako równomiernie rozłożone na szerokości przekroju belki w postaci warstwy sprężystej [3]. Oprócz tego, w analizowanym przypadku zrezygnowano z otulenia zbrojenia betonem, co oznacza rozmieszczenie zbrojenia w skrajnych włóknach przekroju poprzecznego.

Wspólna praca zbrojenia oraz betonu belki żelbetowej powstaje wskutek przyczepności pomiędzy nimi. Modelowanie tego procesu wykonuje się przez podział przekroju belki żelbetowej na trzy części: zbrojenie, warstwa kontaktowa (WK) pomiędzy zbrojeniem a betonem, oraz podstawowa część przekroju betonowego. Przez h_1 , h_2 oraz h oznaczono wysokość warstwy zbrojenia, WK i podstawowej części przekroju belki (rys. 2).



Rys. 2. Schemat belki żelbetowej z rysami zbrojonej taśmą z warstwą kontaktową

Konieczność wprowadzenia WK jest uwarunkowana właściwościami betonu, który znajduje się w strefie kontaktu. Na podstawie doświadczeń ustalono [4], że karby profilowania zbrojenia wywołują zjawiska destruktywne, w szczególności koncentracje naprężeń w strefie współdziałania zbrojenia z betonem. W szeregu prac [3–5] proponuje się nie przeprowadzać szczegółowych badań tego zjawiska, a ograniczać się jedynie przepisami i zasadami technicznej teorii przyczepności, według której zależności pomiędzy naprężeniami a odkształceniami w WK są inne w porównaniu z odpowiednimi zależnościami materiałów podstawowych. Ze względu na tą teorię, naprężenie przyczepności τ zależy od przemieszczenia g zbrojenia względem przygranicznych włókien WK. Związek (sprężenie, powiązanie, wiązanie) nieliniowy(e) w WK pomiędzy naprężeniami tnącymi przyczepności τ a wartością g podano w [5], jako:

$$\tau = \begin{cases} \frac{G_2}{h_2} g & g < g_k \\ \beta \frac{\ln(1 + \alpha g)}{1 + \alpha g} & g_k \leq g < g_{kr} \\ \tau_{\max} & g \geq g_{kr} \end{cases} \quad (3)$$

gdzie:

G_2 — moduł sprężystości przy ścinaniu WK,

a i b — stałe przyczepności, które otrzymuje się z badań doświadczalnych i zależą od rodzaju powierzchni zbrojenia, wytrzymałości oraz typu betonu,

$g_{kr} = (e - 1)/a$,

$\tau_{\max} = b/e$ — e — podstawa logarytmu naturalnego.

Wartość g_k oblicza się, jako rozwiązanie równania:

$$0,5\tau_{\max} = \beta \frac{\ln(1 + \alpha g)}{1 + \alpha g}, \quad \text{przy } 0 \leq g_k < g_{kr} \quad (4)$$

Zależność pomiędzy g oraz odkształceniem γ_{xy} wyraża się stosunkiem [5]:

$$g = h_2 |\gamma_{xy}| \quad (5)$$

W modelu matematycznym zbrojenie oraz podstawową część przekroju belki można rozpatrywać jako ciała sprężyste, które charakteryzują się początkowymi modułami sprężystości Younga E_1 i E oraz liczbami Poissona ν_1 i ν .

Ponieważ zależność pomiędzy wartościami naprężeń ścinających oraz odkształceniami postaciowymi w WK są nieliniowe, to w celu znalezienia składowych stanu naprężeniowo-odkształceniowego, można zastosować metodę zmiennych parametrów sprężystości [6]. Zależności pomiędzy składowymi naprężeń σ_{ij} i odkształceń ε_{ij} w WK można przedstawić w postaci prawa Hooke'a, jednak ze zmiennymi parametrami w przypadku płaskiego stanu naprężenia:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E^*} (\sigma_{xx} - \nu^* \sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E^*} (\sigma_{yy} - \nu^* \sigma_{xx}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G^*} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (6)$$

Wartości E^* , ν^* , G^* wyznacza się według zależności:

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{G_i}{1 + mG_i} \\ \nu^* &= \frac{0,5 - mG_i}{1 + mG_i} \\ G^* &= \frac{1}{3} G_i \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

$$G_i = \frac{3\tau_i}{\gamma_i}$$
$$m = \frac{1 - 2\mu_2}{3E_2}$$

Uwzględniając, że warstwa kontaktowa betonu ze zbrojeniem belki żelbetowej jest strefą wysokich naprężeń stycznych (tnących), przyjmuje się, że w WK wartości τ_i oraz γ_i są zależne jedynie od τ_{xy} i γ_{xy} i są odpowiednio równe:

$$\tau_i = |\tau_{xy}|$$
$$\gamma_i = |\gamma_{xy}|$$
(8)

Wyznaczanie stanu naprężeniowo-odkształceniowego belki przeprowadzono metodą elementów skończonych. Belka została zamodelowana jako pręt zbrojony, w którym zbrojenie i WK przyjmowano o wysokości jednego elementu skończonego. Poszukiwanymi wartościami były przemieszczenia węzłów siatki elementów skończonych tego pręta, które wyznaczono ze znanego systemu liniowych równań algebraicznych [7]:

$$[K]\{Q\} = \{F\}$$
(9)

gdzie:

[K] — globalna macierz sztywności całego systemu,

{Q} — wektor przemieszczeń węzłów,

{F} — wektor sił węzłowych, w którym podsumowano obciążenia zewnętrzne wprowadzone do węzłów.

Globalną macierz sztywności [K] otrzymano z kilku macierzy sztywności osobnych elementów zbrojenia, WK oraz podstawowej części belki. Do wymienionych macierzy weszły moduły sprężystości E , E_1 oraz liczby Poissona ν i ν_1 , a także obliczone wg formuły (5) — wartości E^* i ν^* dla WK.

Uwzględniając zależności (6) i (7), sprężysto-plastyczne zadanie (z nieliniową WK pręta zbrojonego z systemem rys prostopadłych) sprowadza się do rozwiązania kolejnych (ciągłych) zadań sprężystych. Przeprowadzono to metodą iteracyjną, w której w pierwszym przybliżeniu założono w WK $G_i = 3G$. Wówczas zmienne parametry sprężystości są wartościami stałymi $E^* = E_2$, $\nu^* = \nu_2$, $G^* = G_2$. Następnie do rozwiązywania zadania wykorzystano algorytm metody zmiennych parametrów sprężystości [6].

Odległość między rysami l_{crc} obliczono wg wzoru [8]:

$$l_{crc} = k_1 n_1 u_1 \eta_1$$
(10)

gdzie:

$$k_1 = \frac{W_{pl}}{n_1 W_s} - 2$$
$$u_1 = \frac{A_s}{p_1}$$
$$n_1 = \frac{E_1}{E}$$

W tym wzorze:

W_{pl} i W_s — sprężysto-plastyczne momenty (wskaźniki) wytrzymałości przekroju belki względem strefy rozciąganej przed i po pojawiania się rysy;

A_s i p_1 — pole przekroju oraz parametr przekroju poprzecznego zbrojenia, współczynnik η_1 uwzględnia typ oraz profil zbrojenia i dla prętów zbrojeniowych o powierzchni żebrowanej przyjmuje się równy 0,7.

Przy zwiększeniu wartości momentu zginającego rysa zaczyna propagować w przypadku, kiedy współczynnik natężenia naprężenia K_I osiąga wartość krytyczną K_{IC} dla danego materiału. Współczynnik natężenia naprężenia oblicza się według wzoru [7]:

$$K_I^2 = EJ \tag{11}$$

gdzie:

$$J = \int_C \left(W \cdot n_x - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} n_j \right) ds \quad (i = 1, 2; j = 1, 2)$$

J — niezależna od obwodu całka Czerepanowa-Raisa,

C — obwód, który wyznacza się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówki zegara dookoła wierzchołka rysy, względem osi Oy ,

W — gęstość energii odkształcenia,

n_j — składowa wektora jednostkowego normy zewnętrznej do obwodu,

u_i — składowa wektora przemieszczeń.

Całkę J oblicza się przy pomocy znanych składowych stanu naprężeniowo-odkształceniowego. Wartość K_{IC} oblicza się według znanego wzoru empirycznego [9], w którym wartość modułu przyczepności K ($K = K_{IC}(0,5\pi)^{0,5}$) wyraża się przez wytrzymałość kostkową betonu R (R_{20}):

$$K = 2\sqrt{R\sqrt{R}} \quad \text{przy } R \leq 350$$
$$K = 38^4\sqrt{R} \quad \text{przy } R > 350 \tag{12}$$

gdzie:

R — podano w KG/cm^2 ,
 K — podano w $\text{KG}/\text{cm}^{3/2}$.

Dla znanej wcześniej długości rysy, oblicza się wartość K_r , którą porównuje się z wartością K_{rc} . W przypadku ich różnicy, długość rysy przyjmuje się inną. Procedurę powtarza się do uzyskania zbieżnych wartości. W takim przypadku przyjmuje się, że długość rysy jest wyznaczona.

Obliczanie rys w belce żelbetowej zbrojonej taśmą stalową można wykonać również z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Zamodelowano pręt o wysokości h , szerokości b oraz długości $6h$. System wielu rys w belce zamieniono na system z trzema rysami (rys. 2). Obliczenia przeprowadzono dla rysy środkowej. Uwzględniając symetrie belki z rysami, rozpatrywana jedynie jej połowa, dla której została zbudowana siatka numeryczna z elementów skończonych, zawierająca 400 liniowych czterościanych komórek elementarnych. Układ współrzędnych xy przyjęto z początkiem w dolnej części siatki. Oś Oy skierowano wzdłuż rysy, Ox — wzdłuż dolnych włókien zbrojenia. Warstwę zbrojenia oraz WK przyjęto o wysokości jednego elementu skończonego. Siatka numeryczna była zagęszczana w pobliżu wierzchołków oraz osi rys. Wartość szerokości rozwarcia rysy wyznaczono podwajając wartość przemieszczenia węzła (ponieważ rozpatrywano połowa pręta), który znajdował się na pograniczu WK i podstawowej części przekroju belki.

4. Obliczenia liczbowe oraz wyniki obliczeń

W celu weryfikacji proponowanej metody obliczania rozwarcia rys, uzyskane wyniki porównano z wynikami badań doświadczalnych [10] oraz z wynikami obliczeń szerokości rys w strefie czystego zginania belki żelbetowej według norm [1, 2] oraz Eurokodu 2 [13, 15–17]. Wszystkie oznaczenia we wzorach obliczeniowych pozostawiono zgodnie z przyjętymi w oryginałach wykorzystanych Norm.

W normie SNiP 1989 [1] obliczenia wartości szerokości rozwarcia rys prostokątnych acrc wykonuje się według wzoru:

$$a_{arc} = \delta\varphi_i \frac{\sigma_s}{E_s} 20(3,5 - 100\bar{\mu})^3 \sqrt{d} \quad (13)$$

Wg Eurokodu 2 [15] szerokość rys w_k można obliczyć ze wzoru:

$$w_k = s_{r,\max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad (14)$$

w którym:

$s_{r,\max}$ — maksymalny rozstaw rys,
 ε_{sm} — średnie odkształcenie zbrojenia,
 ε_{cm} — średnie odkształcenie betonu między rysami.

Wartość $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$ można obliczać ze wzoru:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_1 \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + a_e \rho_{p,eff})}{E_s} \quad (15)$$

gdzie:

σ_s — naprężenie w zbrojeniu rozciągany, obliczone przy założeniu, że przekrój jest zarysowany,

a_e — stosunek E_s/E_{cm} .

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s + \xi_1^2 A_p}{A_{c,eff}} \quad (16)$$

$A_p, A_{c,eff}, \xi_1$ — jak zdefiniowano w [16].

Obliczenia liczbowe przeprowadzono dla belki badawczej o parametrach podanymi w pracy [10] (belka BI-3):

$h = 0,365$ m, $b = 0,144$ m, $E_1 = 190000$ MPa, $R = 54,9$ MPa, $M_{crc} = 12,7$ kNm, $\rho = 0,94\%$,
 $A_s = 4,94 \cdot 10^{-4}$ m²,

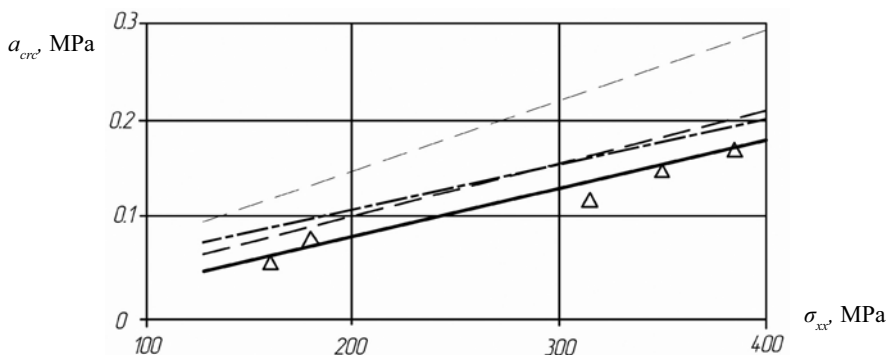
gdzie:

b — szerokość belki,

ρ — stopień zbrojenia,

M_{crc} — moment rysujący,

A_s — pole przekroju zbrojenia.



Rys. 3. Zależności szerokości rozwarcia rys od naprężenia w zbrojeniu σ_{xx}

———— wg proponowanej metody [12]

- - - - - wg Eurokodu 2 [16]

- . - . - wg wzoru podanego w [1]

△ wg badań doświadczalnych w [10]

- - - - - wg wzoru podanego w [2]

Wysokość zbrojenia h_1 w siatce elementów skończonych modelu wyznaczono, jako stosunek wartości A_s do szerokości belki b . Wysokość WK przyjęto równą wysokości taśmy ($h_2 = h_1$). Liczbę Poissona ν_1 dla stali przyjęto 0,3; dla betonu oraz WK (początkowy) — 0,2. Moduł sprężystości betonu i granicę plastyczności zbrojenia stali klasy A-IV (20XGST) podano w pracy [8].

Obliczenia wykonano do chwili osiągnięcia w zbrojeniu, w przekroju zarysowanym naprężeń normalnych σ_{xx} równych granicy plastyczności (400 MPa). Na wykresach (rys. 3) pokazano zależności szerokości rozwarcia rys od naprężeń w zbrojeniu w przekroju zarysowanym σ_{xx} .

5. Wnioski

- 1) Wyniki obliczeń przeprowadzonych według zaproponowanej metody, zadowalająco zgadzają się z wynikami badań doświadczalnych. Maksymalna różnica pomiędzy wynikami badań doświadczalnych a wynikami obliczeń stanowi 13,9%, 108,1 % — dla wzoru podanego w [1], 48,7% — dla wzoru podanego w [2] oraz 32,4% — dla wzoru podanego w [16]. Minimalna różnica wynosi odpowiednio — 1,6%, 15,8%, 62,1% oraz 12,0%.
- 2) Wykorzystanie przedstawionej w artykule metody obliczenia szerokości rozwarcia rys prostopadłych w belkach żelbetonowych umożliwia osiągnięcie lepszej dokładności wyników obliczeń w porównaniu ze stosowanymi metodami w normach projektowania.

LITERATURA

- [1] СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции/ Госстрой СССР — М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989
- [2] Нормоконтроль. Изменение № 1 к СНиП 2.03.01-84 (изд. 1989 г.) Будівництво України, № 6, 1995
- [3] *Пересыткін Е.Н.*: Расчет стержневых железобетонных элементов. Стройиздат, 1988
- [4] *Холмянский М.М.*: Контакт арматуры с бетоном. Стройиздат, 1981
- [5] *Русинко К., Павленко П.*: Дослідження процесу розвитку системи нормальних тріщин в армованій балці. Машинознавство, № 9/10, 1998. с. 6–9
- [6] *Писаренко Г.С., Можаровский Н.С.*: Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. Наукова думка, Киев 1981
- [7] *Морозов Е.М., Никишков Г.П.*: Метод конечных элементов в механике разрушения. Наука, 1980
- [8] *Байков В.Н., Сигалов Э.Е.*: Железобетонные конструкции. Стройиздат, 1985
- [9] *Митрофанов В. П., Жовнир А. С.*: Экспериментальное исследование характеристики сопротивления распространению трещин обычного тяжелого бетона. Известия вузов. Строительство и архитектура, №3, 1976, с. 19–23
- [10] *Немировский Я.М., Кочетков О.И.*: Влияние работы растянутой и сжатой зон бетона на деформации обычных изгибаемых железобетонных элементов после возникновения в них трещин. Особенности деформаций бетона и железобетона и использование ЭВМ для оценки их влияния на поведение конструкций. НИИЖБ. Стройиздат, 1969, с. 106–156

- [11] *Kінаш Р.І.*: Витривалість сталобетонних балок із зовнішньою стрічковою арматурою. Праца докторска, Роїтава, 1992
- [12] *Кінаш Р.І., Павленко П.В.*: Визначення ширини розкриття нормальних тріщин в залізо-бетонній балці з позицій механіки руйнування. Зб. наук. праць, вип. 5, Рівне, 2000, с. 178–184
- [13] *Starosolski W.*: Konstrukcje żelbetowe: według PN-B-03264:2002 i Eurokodu 2. T. 1, 2, 3
- [14] PN-B-03264: Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie. PKN, 2002
- [15] *Łapko A.*: Projektowanie konstrukcji żelbetowych: wg Eurokodu 2 i PN-B-03264:1999. Arkady, Warszawa 2000
- [16] Eurokod 2. Projektowania konstrukcji z betonu. Cz. 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków, PKN, Warszawa, 2008
- [17] *Zespół autorski Knauff M. i in.*: Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych według Eurokodu 2. Sekcja Konstrukcji Betonowych KILiW PAN, 2006
- [18] *Muraszow W.I.*: Тресzczиностойкость, жесткость и прочность железобетона. Масштройиздат, Москва 1950
- [19] *Czaja P., Hydzik J., Walach D.*: Ekonomiczne aspekty stosowania betonu wysokowartościowego w budownictwie podziemnym. Kwartalnik Górnictwo i Geoinżynieria. Wydawnictwa AGH, R. 33 z. 3/1, Kraków 2009, s. 121–130