Górnictwo i Geoinżynieria • Rok 34 • Zeszyt 2 • 2010

*Paweł Fedczuk**

ANALIZA MES–MKEB NIELINIOWEGO PROBLEMU WSPÓŁDZIAŁANIA ŁAWY FUNDAMENTOWEJ Z PODŁOŻEM GRUNTOWYM

1. Wprowadzenie

Zwykle w obliczeniach numerycznych wykorzystuje się pojedyncze klasyczne metody obliczeniowe, takie jak metoda elementów skończonych [1] i elementów brzegowych [2]. Rzadko spotyka się zastosowania kombinacji obu tych metod, lepiej wykorzystujące ich zalety.

W niniejszym opracowaniu prezentuje się koncepcję zastosowania kombinacji metod elementów skończonych (MES) i kontaktowych elementów brzegowych (MKEB) do analizy trójwymiarowego problemu współdziałania układu „ława fundamentowa-podłoże gruntowe", z uwzględnieniem sprężysto-plastycznych własności gruntu w podłożu. Ławę fundamentową modeluje się zgodnie z zasadami pierwszej metody [1], natomiast podłoże gruntowe w sposób właściwy dla drugiej. MKEB stanowi odmianę klasycznej wersji metody elementów brzegowych [2], w której fundamentalne rozwiązanie Kelvina dla przestrzeni sprężystej zastąpione jest kombinacją rozwiązań problemów Boussinesqa i Ceruttiego dla izotropowej i jednorodnej półprzestrzeni sprężystej. Zastosowanie prezentowanej kombinacji ogranicza się do fundamentów spoczywających na jednorodnym geologicznie podłożu gruntowym.

Zakres niniejszego opracowania obejmuje podstawy teoretyczne tej kombinowanej metody rozwiązania, uwzględniające sformułowanie i wyprowadzenie podstawowych zależności oraz prezentację sposobu ich rozwiązania, wykorzystującego technikę przyrostowo-iteracyjną, opartą na metodzie Raphsona-Newtona [5, 6]. Zachowanie ławy modeluje prawo Hooke'a, natomiast gruntu w podłożu — sprężysto-plastyczny model Modified Cam-Clay [7]. Postawy teoretyczne uzupełnia przykład obliczeniowy, ilustrujący zastosowanie tej metody analizy.

* Katedra Geotechniki i Geodezji, Wydział Budownictwa, Politechnika Opolska, Opole

2. Założenia upraszczające

Ława jest fundamentem bezpośrednim, posadowionym w jednorodnym geologicznie podłożu gruntowym, modelowanym przez jednorodną półprzestrzeń. Dyskretyzuje się ją zgodnie z zasadami MES [1], zastępując układem prętowych elementów skończonych, natomiast podłoże — stosownie do zasad MKEB [4, 5], wycinając z półprzestrzeni prostopadłościan o wymiarach dostosowanych do rozmiarów ławy. Powierzchnię brzegową wyciętej bryły w obszarze kontaktu z fundamentem — dzieli się na regularny układ prostokątnych elementów kontaktowych o środkach pokrywających się z węzłami elementów MES, tworzących strukturę ławy. Wnętrze prostopadłościanu modeluje struktura prostopadłościennych komórek (cel o jednym węźle umieszczonym w środku), skoordynowana z siatką elementów brzegowych. Obciążenie ławy stanowi zestaw przyrostów, symulujących proces jego narastania.

3. Przyrostowe sformułowanie problemu

Każdy ze składników układu „ława fundamentowa-podłoże gruntowe” rozpatrywany jest oddzielnie, stosownie do przyjętej metody analizy. Ława analizowana jest w sposób właściwy dla MES, natomiast podłoże — zgodnie z zasadami MKEB. Złożenie otrzymanych oddzielnie równań równowagi daje kompleksową zależność dla całego układu. Przedstawione sformułowanie ujęte jest w formie przyrostowej.

Zastosowanie MES [1] do analizy ławy fundamentowej daje wyjściową postać równania prac przygotowanych. Użycie MKEB [4, 5] do analizy podłoża z uwzględnieniem podziału przyrostu deformacji na części sprężystą i plastyczną oraz oddzielnym ich zdefiniowaniem, daje kompletne równanie, określające przyrost uogólnionego przemieszczenia $d\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ brzegu półprzestrzeni (wywołanego przyrostem obciążenia $d\mathbf{q}(\mathbf{x})$ w punkcie $\mathbf{x}$ płaszczyzny granicznej). Uzupełnia je uogólniona zależność transformacyjna [3, 4]. Tworzą one razem zestaw trzech zależności:

$$\begin{aligned}
&\delta\mathbf{u}^T d\mathbf{P} + \int_{(S)} \delta\mathbf{u}_B^T d\mathbf{p}\, dS = \int_{(V)} \{\mathbf{L}_B[\delta\mathbf{u}_B(\mathbf{x})]\}^T \mathbf{D}_B^e \mathbf{L}_B d\mathbf{u}_B\, dV \\
&d\mathbf{u}(\xi) = d\mathbf{u}^e(\boldsymbol{\xi}) + d\mathbf{u}^p(\boldsymbol{\xi}) = \int_{(A)} [\mathbf{G}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})]^T d\mathbf{q}(\mathbf{x})\, dA + \int_{(V)} [\mathbf{C}(\mathbf{z},\boldsymbol{\xi})]^T d\boldsymbol{\sigma}'^p(\mathbf{z})\, dV \\
&d\mathbf{u}_B(\mathbf{x}) = \mathbf{T} d\mathbf{u}(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{1}$$

w których: $\delta\mathbf{u}$, $\delta\mathbf{u}_B$ oznaczają uogólnione wirtualne przemieszczenia węzłowe i „powierzchniowe”, $d\mathbf{P}$, $d\mathbf{p}$ — przyrosty uogólnionego obciążenia skupionego i powierzchniowego, $d\mathbf{u}_B$, $d\boldsymbol{\sigma}^p{}_B$ — przyrosty składników układu: węzłowego przemieszczenia i plastycznej części naprężenia. $\mathbf{L}_B$ i $\mathbf{D}_B^e$ to odpowiednio operator macierzowy pochodnych i macierz konstytutywna sprężystości. Składowymi macierzy Greena $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ są rozwiązania zagadnień Boussinesqa i Ceruttiego. Macierz przemieszczeń $\mathbf{C}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ definiuje operacja $\mathbf{LG}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ (gdzie $\mathbf{L}$ to macierzowy operator pochodnych), $d\boldsymbol{\sigma}'^p(\mathbf{x})$ oznacza plastyczny przyrost naprężenia, a $\mathbf{T}$ — macierz transformacji.

4. Równanie równowagi układu

Zastosowanie do zdyskretyzowanej struktury ławy standardowych formuł MES na uogólnione przemieszczenie $\mathbf{u}_B(\mathbf{x})$ i macierz odkształceń $\mathbf{B}_B(\mathbf{x})$, oraz zastąpienie obciążenia ciągłego $d\mathbf{p}$ ekwiwalentnym obciążeniem skupionym $d\mathbf{Q}$ sprowadza wyrażenie (1.a) do końcowego równania równowagi MES dla tej substruktury:

$$
\begin{aligned}
d\overline{\mathbf{P}} &= \mathbf{K}_B d\mathbf{u}_B \\
d\overline{\mathbf{P}} &= d\mathbf{P} + d\mathbf{Q} = d\mathbf{P} + \int_{(S)} d\mathbf{p}\, dS \\
\mathbf{K}_B &= \int_{(V)} \mathbf{B}_B^T \mathbf{D}_B^e \mathbf{B}_B\, dV
\end{aligned}
\tag{2}
$$

W przypadku podłoża rozwiązanie wymaga oddzielnego potraktowania części sprężystej i plastycznej końcowego równania (1.b). Wyrażenie przyrostu obciążenia $d\mathbf{q}(\mathbf{x})$ w dowolnym elemencie kontaktowym (k) typową dla MES formułą interpolacyjną dla j węzłów elementu (k), przekształca równanie Somigliany (pierwszy fragment relacji (1.b)) w zależność określającą liniowo-sprężystą część przyrostu przemieszczenia w węźle elementu kontaktowego (i):

$$
d\mathbf{u}_i^e = \sum_{(k)} \int_{(A_k)} [\mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})]^T \sum_{(j)} [\overline{N}_j(\mathbf{x}) \mathbf{I} d\mathbf{q}_j^k]\, dA_k = \sum_{(j)} \mathbf{A}_{ij} d\mathbf{q}_j
\tag{3}
$$

gdzie $\mathbf{A}_{ij}$ — elementarna macierz podatności podłoża.

Plastyczną część przemieszczenia w węźle elementu kontaktowego (i) określa druga część zależności (1.b), w której położenie komórki (h) ustalają współrzędne $\mathbf{z}$:

$$
d\mathbf{u}_i^p = \sum_{(h)} \int_{(V_h)} [\mathbf{C}(z, \boldsymbol{\xi}_i)]^T d\boldsymbol{\sigma}'^p(\mathbf{z})\, dV_h
\tag{4}
$$

Pełny przyrost przemieszczenia w węźle i określa równanie złożone z zależności (3) i (4), które po uogólnieniu na wszystkie węzły struktury podłoża daje związek:

$$
d\mathbf{u} = \mathbf{A} d\mathbf{q} + d\mathbf{u}^p = \mathbf{A} d\mathbf{q} + d\boldsymbol{\Psi}
\tag{5}
$$

Wstawia się go po przekształceniu do zależności na przyrost sił węzłowych $d\mathbf{F}_g$, otrzymanej z zasady prac przygotowanych, uzyskując relację:

$$
d\mathbf{F}_g = \boldsymbol{\Lambda} d\mathbf{q} = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{A}^{-1}(d\mathbf{u} - d\boldsymbol{\Psi})
\tag{6}
$$

Końcowe równanie równowagi dla podłoża definiuje zależność:

$$
\begin{aligned}
&d\mathrm{F}_g = \mathrm{K}_g d\mathbf{u} - d\mathrm{F}^p \\
&\mathrm{K}_g = \overline{A}^{-1} = \mathbf{\Lambda A}^{-1} \\
&d\mathrm{F}^p = \mathrm{K}_g d\Psi
\end{aligned}
\tag{7}
$$

w której $\mathbf{K}_g$ to macierz sztywności podłoża, $d\mathbf{F}^p$ — plastyczna część przyrostu sił węzłowych, a $\mathbf{\Lambda}$ – macierz powierzchni brzegowych elementów kontaktowych.

Integracja całego układu „ława fundamentowa–podłoże gruntowe” wymaga złożenia równań (2) i (7) z uwzględnieniem zależności transformacyjnej (1.c). Przyrost sił w węzłach rozważanego układu $d\mathbf{R}$ równoważy suma reakcji:

$$
d\mathrm{R} = d\overline{\mathbf{P}} + \mathrm{T}d\mathrm{F}_g = \mathbf{K}_B d\mathbf{u}_B + \mathbf{T}(\mathbf{K}_G d\mathbf{u} - d\mathrm{F}^p) = \mathbf{K}_g d\mathbf{u}_B + [\mathbf{K}_g(\mathbf{T}^T d\mathbf{u}_B) - d\mathrm{F}^p] \tag{8}
$$

Po elementarnych przekształceniach otrzymuje się końcowe równanie równowagi dla całego układu:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{K}d\mathbf{u}_B = d\mathrm{R} + d\overline{\mathrm{F}}^p \\
&\mathrm{K} = \mathrm{K}_B + \mathrm{TK}_g\mathrm{T}^T \\
&d\overline{\mathrm{F}}^p = \mathrm{T}d\mathrm{F}^p
\end{aligned}
\tag{9}
$$

w którym $\mathbf{K}$ oznacza globalną macierz sztywności układu, natomiast $d\overline{\mathbf{F}}^p$ — sprowadzony przyrost sił węzłowych.

5. Procedura przyrostowo-iteracyjna

Do rozwiązania różniczkowego równania równowagi (9) dla analizowanego zagadnienia współdziałania układu „ława fundamentowa-podłoże gruntowe”, stosuje się technikę numeryczną, opartą na metodzie Newtona-Raphsona. Algorytm operacyjny tej przyrostowo-iteracyjnej procedury (wykorzystującej stałą styczną macierz sztywności układu $\mathbf{K}$) obejmuje:

1) podział obciążenia $\mathbf{R}$ na szereg przyrostów $d\mathbf{R}_{i=1}^{(l)}$ (i przyjęcie kroku przyrostowego $l = 1$),
2) utworzenie (w iteracji $i = 1$ kroku l) macierzy sztywności substruktury ławy fundamentowej $\mathbf{K}_B$, podłoża $\mathbf{K}_g$ i całego układu $\mathbf{K}$,
3) obliczenie przyrostów przemieszczeń i sił węzłowych, oraz aktualizację przemieszczeń i sił węzłowych:

$$
\begin{aligned}
&d\mathbf{u}_B^i = \mathrm{K}^{-1}d\mathbf{R}_{i=1}^{(l)} \quad d\mathbf{u}^i = \mathrm{T}^{-1}d\mathbf{u}_B^i \quad d\mathrm{F}_g = \mathrm{K}_g d\mathbf{u}^i \\
&\mathbf{u}_B^{(l)} = \mathbf{u}_B^{(l-1)} + d\mathbf{u}_B^i \quad \mathbf{u}^{(l)} = \mathbf{u}^{(l-1)} + d\mathbf{u}^i \quad \mathrm{F}_g^{(l)} = \mathrm{F}_g^{(l-1)} + d\mathrm{F}_g
\end{aligned}
\tag{10}
$$

4) wyznaczenie (w iteracji $i = i + 1$) przyrostu naprężeń $d\boldsymbol{\sigma}'$ w środkach komórek podłoża (wywołanego obciążeniem elementów kontaktowych $d\mathbf{F}_g$) i odpowiadającego im przyrostu odkształceń $d\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$
d\varepsilon = (\mathbf{D}^e)^{-1}d\boldsymbol{\sigma}' \tag{11}
$$

5) obliczenie (w środkach komórek podłoża) części plastycznej przyrostu naprężeń $d\boldsymbol{\sigma}'^{p}$ i odkształceń $d\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ dla sprężysto-plastycznego modelu gruntu,
6) określenie korekty przemieszczeń w środkach elementów kontaktowych $d\boldsymbol{\Psi}$ i sprowadzonej plastycznej części przyrostu sił węzłowych $d\overline{\mathbf{F}}^{p}$:

$$
\begin{aligned}
d\Psi &= \hat{\mathrm{C}} d\boldsymbol{\sigma}'^{p} = \left(\int_V \mathrm{C}^T \, dV\right) d\boldsymbol{\sigma}'^{p} \\
d\overline{\mathrm{F}}^{p} &= \mathrm{T}(\mathbf{K}_g d\Psi)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

7) wyznaczenie wektora obciążeń residualnych dla całego układu $d\mathbf{R}_i^{(l)}$ z zależności:

$$
d\mathbf{R}_i^{(l)} = d\overline{\mathbf{F}}^{p} \tag{13}
$$

8) obliczenie przyrostów przemieszczeń i sił węzłowych oraz aktualizację przemieszczeń i obciążenia według relacji:

$$
\begin{aligned}
&d\mathbf{u}_B^i = \mathbf{K}^{-1} d\mathbf{R}_i^{(l)}, \quad d\mathbf{u}^i = \mathbf{T}^{-1} d\mathbf{u}_B^i, \quad d\mathbf{F}_g = \mathbf{K}_g d\mathbf{u}^i \\
&\mathbf{u}_B^{(l)} = \mathbf{u}_B^{(l-1)} + d\mathbf{u}_B^i, \ \mathbf{u}^{(l)} = \mathbf{u}^{(l-1)} + d\mathbf{u}^i, \ \mathbf{F}_g^{(l)} = \mathbf{F}_g^{(l-1)} - d\mathbf{F}^{p} + \mathbf{K}_g d\mathbf{u}^i
\end{aligned}
\tag{14}
$$

9) sprawdzenie warunku zbieżności obliczeń:

$$
[d\mathbf{u}_B^i]^T d\mathbf{u}_B^i = \tau [d\mathbf{u}_B^1]^T d\mathbf{u}_B^1 \tag{15}
$$

gdzie:

$d\mathbf{u}_B^1$, $d\mathbf{u}_B^i$ — przyrosty przemieszczeń wywołane odpowiednio rzeczywistym i kolejnym residualnym przyrostem obciążenia fundamentu,

τ — stała rzędu 10^{-2}–10^{-6}.

wymagającego w przypadku:
— niespełnienia — realizacji obliczeń od punktu (4) dla następnej iteracji,
— spełnienia — kontynuacji obliczeń od punktu (2) (w kroku $l = l + 1$) dla następnego przyrostu obciążenia $d\mathbf{R}_i^{(l)}$ (lub ich zakończenia), poprzedzoną aktualizacją parametrów modeli.

Części plastyczne przyrostów naprężeń i odkształceń dla sprężysto-plastycznego modelu gruntu ustala się w kroku (5) za pomocą procedury Nayaka-Zienkiewicza [6].

Numeryczną implementację podanego algorytmu stanowi autorski program S2BF napisany w języku Fortran. Uzupełnia go para dodatkowych programów: S2BFa — edytor danych i wyników oraz S2BFb — wyznaczający w środkach komórek początkowe wartości wektora naprężeń pierwotnych, parametrów modelu gruntu, globalnej macierzy całki z macierzy przemieszczeń $\hat{\mathbf{C}}$ (dla jednostkowych obciążeń elementów brzegowych) i składowych funkcji zaniku naprężeń (dla jednostkowych nacisków pionowego i poziomego na kontaktowe elementy).

6. Modele konstytutywne mediów

Zachowanie ławy fundamentowej modelowanej przez belkowy ustrój prętowy opisuje liniowo sprężyste prawo Hooke'a, specyfikowane przez parę stałych materiałowych: moduł odkształcenia materiału E_B i współczynnik Poissona v_B.

Zachowanie gruntu w środku dowolnej komórki podłoża opisuje sprężysto-plastyczny model Modified Cam-Clay [7] o powierzchni plastyczności i prawie wzmocnienia (wiążącym aktualne wartości ciśnienia prekonsolidacji p_c i wskaźnika porowatości e zdefiniowanych równaniami:

$$\begin{aligned} &F(q,p) = q^2 + M^2 p(p - p_c) \\ &p_c = p_{c0} \exp\left[\frac{e_0 - e - \kappa \ln\left(p/p_{c0}\right)}{\lambda - \kappa}\right] \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie:

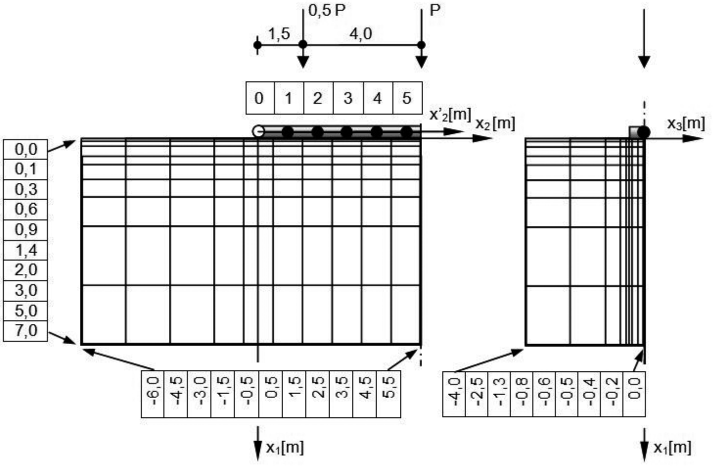
M — nachylenie linii stanu krytycznego,
q, p — naprężenie ścinające i średnie,
p_c — ciśnienie prekonsolidacji,
λ, κ — stałe modelu,
e_0, p_{c0} — początkowe wartości wskaźnika porowatości i ciśnienia prekonsolidacji.

Wnętrze powierzchni plastyczności modeluje liniowo-sprężyste zachowanie gruntu, specyfikowane przez moduł odkształcenia E i współczynnik Poissona v dla gruntu podłoża.

7. Przykład obliczeniowy

Do ilustracji zastosowania opisanej koncepcji analizy MES-MKEB trójwymiarowego problemu współdziałania układu „ława fundamentowa–podłoże gruntowe" wybrany został przykład ławy fundamentowej (rys. 1, prezentujący połowę symetrycznego układu) o długości 10 m i prostokątnym przekroju poprzecznym 0,4×1,0 m, posadowionej na głębokości 1,0 m poniżej poziomu terenu w jednorodnym podłożu z piasku. Obciąża ją układ 3 pionowych sił skupionych rozmieszczonych symetrycznie. Modeluje ją ustrój prętowy zbudowany z 10 jednakowych elementów prętowych o długości L = 1,0 m i charakterystyce geometrycznej: polu przekroju F_B = 0,5 m^2, momencie bezwładności J_B = 0,5·10^{-4} m^4.

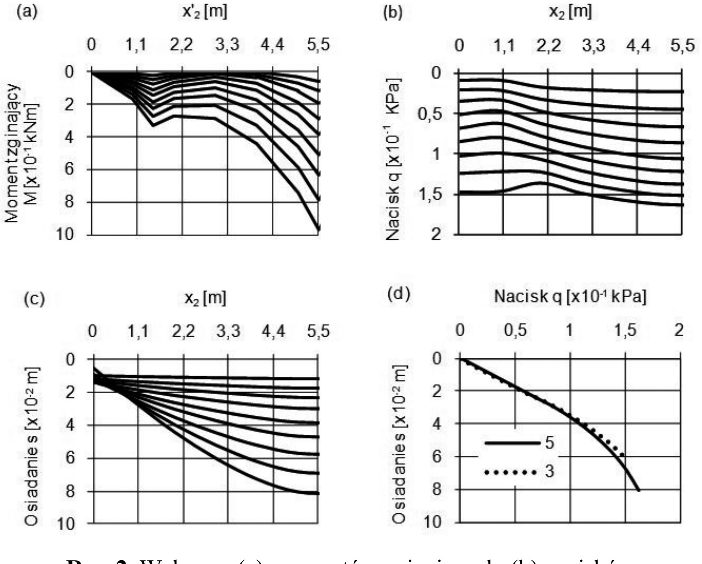
Podłoże modeluje prostopadłościenna bryła złożona z 2880 komórek rozmieszczonych symetrycznie. Obszar kontaktu podłoża z ławą podzielony jest na 11 brzegowych elementów kontaktowych o wymiarach 1,0×1,0 m. Zachowanie betonowej ławy opisuje prawo Hooke'a, natomiast piasku — sprężysto-plastyczny model Modified Cam-Clay [7]. Parametry obu modeli wyspecyfikowane są w tabeli 1. Obciążenie podzielone zostało na 9 jednakowych przyrostów, narastających stosownie do schematu krokiem co 0,1P (w stosunku do bazowej wartości P = 100 kN).



Rys. 1. Schemat substruktur „ława fundamentowa–podłoże gruntowe”

TABELA 1
Parametry modeli materiału ławy i gruntu podłoża

E_b [kPa]	v_b	E [kPa]	v	m	κ	λ
18000	0,1667	40	0,3	1,348	0,034	0,17



Rys. 2. Wykresy: (a) momentów zginających, (b) nacisków, (c) osiadań, (d) charakterystyka „nacisk-osiadanie”

Wyniki obliczeń (wykonanych za pomocą programu S2BF) przedstawiono na rysunku 2. Zawierają one komplet charakterystyk (ograniczonych do połowy symetrycznego układu), obejmujących narastające w kolejnych 9 przyrostach rozkłady momentów zginających, pionowych nacisków i osiadań brzegu podłoża pod ławą. Dla dwóch środków elementów kontaktowych (leżących pod węzłami ławy (3) i (5)) wykreślona została charakterystyka „nacisk–osiadanie".

Wzrostowi obciążenia ławy fundamentowej towarzyszy „narastanie" wykresów momentów i osiadań (stopniowo rosnących pod środkiem i malejących pod końcami), oraz bardziej złożony przyrost nacisków pod ławą (charakteryzujący się początkowo zdecydowanie szybszym ich narastaniem pod środkiem niż na końcach, z późniejszym odwróceniem trendu tzn. szybszym przyrostem pod końcami niż pod środkiem). Charakterystyki „nacisk-osiadanie" (dla środków elementów brzegowych leżących pod węzłami ławy (3) i (5)) po początkowo prawie liniowym fragmencie, mają później zdecydowanie nieliniowy kształt.

8. Podsumowanie

Przedstawiona koncepcja analizy MES-MKEB trójwymiarowego problemu współdziałania układu „ława fundamentowa–podłoże gruntowe" stanowi efektywne narzędzie obliczeniowe. Posiada ona szereg zalet, których pozbawione są stosowane klasycznie metody „składowe". Najistotniejszą z nich jest znaczne ograniczenie rozmiarów macierzy sztywności układu i głównego układu równań do węzłów substruktury „ława fundamentowa–podłoże", uwzględniającej jedynie węzły kontaktowe podłoża. Dalszy rozwój metody wymaga uwzględnienia niejednorodności geologicznej podłoża.

LITERATURA

[1] *Zienkiewicz O. C., Taylor R.L.*: The Finite Element Method. Fourth Edition, Vol. 1 & 2, McGraw-Hill Book Company, London 1991

[2] *Banerjee P.K., Butterfield R.*: Boundary Element Methods in Engineering Science. McGraw-Hill Book Company, London 1981

[3] *Cheung Y.K.*: Beams, Slabs and Pavements, [w:] Desai Ch. S. and Christian J. T., Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill Book Company, New York 1977, p. 194–210

[4] *Gryczmański M.*: Metoda elementów kontaktowych i jej zastosowanie do obliczania belek na półprzestrzeni sprężysto-lepkoplastycznej, Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, Budownictwo z. 21, Nr 97/1984, Opole 1984, s. 128–139

[5] *Fedczuk P.*: Ława fundamentowa na podłożu nieliniowo odkształcalnym. Praca doktorska, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, Opole 1992

[6] *Nayak G.C., Zienkiewicz O.C.*: Elasto-plastic Stress Analysis. A Generalized for Various Constitutive Relations Including Strain Softening. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.5, 1972, p. 113–135

[7] *Roscoe K.H., Burland J.B.*: On the Generalized Stress-strain Behavior of "wet" Clay. [w:] Heymann J., Leckie F. A., Engineering Plasticity, Cambridge University Press, 1968, p. 535–609