

*Jerzy Bauer\**, *Janusz Kozubal\*\**, *Wojciech Puła\*\**, *Marek Wyjadłowski\*\**

## WPŁYW ZMIENNOŚCI LOSOWEJ PARAMETRÓW PODŁOŻA NA OCENĘ NIEZAWODNOŚCI PRACY PAŁA OBCIĄŻONEGO SIŁĄ POZIOMĄ\*\*\*

---

### 1. Wstęp

Zagadnienia pali obciążonych siłami poprzecznymi odnoszą się zarówno do stanów granicznych nośności, jak i stanów granicznych użytkowania. W przypadku stanu granicznego nośności decydujący jest warunek nośności gruntu na docisk boczny pała. Z punktu widzenia projektowania najistotniejszy jest zazwyczaj warunek stanu granicznego użytkowania czyli ograniczenie przemieszczeń poziomych głowicy pała oraz ograniczenie rozwarcia rys.

Obliczenia pali obciążonych siłami poziomymi przeprowadza się przede wszystkim metodami numerycznymi. Ze względu na dużą wrażliwość zadania na zmienność parametrów podłoża oraz obciążeń istotne staje się uwzględnienie podejścia probabilistycznego.

Kompleksową analizę probabilistyczną ugięć dla pali obciążonych siłami poziomymi przedstawiono w pracy [12]. Ugięcia pali obliczono w tej pracy na podstawie szeroko stosowanej w Stanach Zjednoczonych metody „*p-y curves*”, które mogą być przedstawione także w postaci nieliniowej lub zależnej od głębokości. Jako narzędzie probabilistyczne wykorzystano metodę powierzchni odpowiedzi. Istotnym ograniczeniem pracy [12] jest zawężenie zagadnienia do analizy przestrzeni dwuwymiarowej.

W pracy [2] autorzy przedstawili modelowanie probabilistyczne odkształceń pała pod wpływem losowych sił poprzecznych działających w jego głowicy. Pał zagłębiony był w uwarstwionym ośrodku liniowo-sprężystym o cechach losowych. Elementem nowym, w stosunku do znanych z literatury prac było podejście probabilistyczne dla modelu trójwymiarowego w oparciu o metodę elementów skończonych. W ramach jednej warstwy podłoża gruntowego

---

\* Instytut Górnictwa, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska, Wrocław

\*\* Instytut Geotechniki i Hydrotechniki, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska, Wrocław

\*\*\* Praca finansowana ze środków na naukę w latach 2008–2010 jako projekt badawczy

moduł sprężystości miał stałą wartość średnią, niezależną od głębokości. Aby umożliwić ocenę probabilistyczną zastosowano metodę powierzchni odpowiedzi, a następnie metodę SORM.

Obecna praca stanowi kontynuację pracy [2]. Opracowano nowy model numeryczny, w którym możliwe są zmiany modułu sprężystości wraz z głębokością. Przeprowadzono obliczenia probabilistyczne uwzględniające różne współczynniki zmienności parametrów przyjętych jako losowe oraz korelację pomiędzy nimi. Oszacowano prawdopodobieństwa przekroczenia przemieszczeń dopuszczalnych przez głowicę pala oraz odpowiadające im wskaźniki niezawodności.

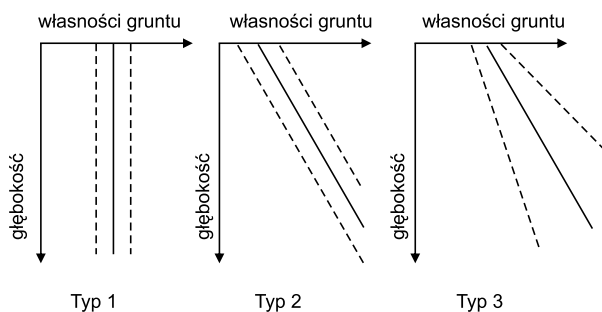
## 2. Zmienność parametrów podłoża z głębokością

Zmiany własności fizycznych i mechanicznych zachodzące z głębokością w warstwie gruntu, którą można uznać za w przybliżeniu jednorodną, zależą przede wszystkim od genezy geologicznej takiej warstwy. Obszerne dyskusje tego zagadnienia można znaleźć w pracach Cherubiniego [4, 5]. Autor ten powołuje się na własne badania dotyczące przekonsolidowanych gruntów „Matera Blue Clay” oraz „London Clay”, z których wynika, że zarówno wartości średnie jak i odchylenia standardowe wytrzymałości na ścinanie w warunkach bez drenażu, nie ulegają zmianom wraz ze wzrostem głębokości. Cherubini cytuje też niepublikowane badania Rethatiego, dotyczące lessów z okolicy Dunaujvaros na Węgrzech. Wynika z nich, że znaczną zależność współczynnika zmienności od głębokości zaobserwowano od powierzchni terenu do poziomu około 5 metrów, natomiast poniżej tej głębokości wahania współczynnika zmienności zmniejszały się. Inną tendencję, dotyczącą spójności w warunkach bez drenażu gruntu „Nong Nhoo Hao Clay”, wskazują Bergado i Chang [3]. W tym przypadku zarówno wartość średnia jak i odchylenie standardowe rosną wraz z głębokością. Najstarszą cytowaną pracą, dotyczącą tego zagadnienia jest praca Li i White’a [7], w której autorzy zaproponowali trzy typy statystycznego opisu zachowania się własności gruntowych w zależności od głębokości:

**Typ 1:** wartość średnia i odchylenie standardowe nie zmieniają się z głębokością;

**Typ 2:** wartość średnia zmienia się liniowo z głębokością, zaś odchylenie standardowe pozostaje stałe;

**Typ 3:** wartość średnia i odchylenie standardowe liniowo zmieniają się z głębokością. Zilustrowano to na rysunku 1.



Rys. 1. Modele zmian własności podłoża z głębokością wg [7]

W ramach obecnej pracy autorzy zdecydowali się na zastosowanie modelu trzeciego typu. Przyjęto mianowicie, że moduł Younga pierwszej warstwy opisany jest zależnością:

$$E = E_0 + kz \tag{1}$$

gdzie:

- $E_0$  — zmienna losowa o rozkładzie log-normalnym, charakteryzującą moduł Younga,
- $k$  — parameter przyrostu modułu  $E_0$ , o którym zakłada się, że jest zmienną losową o rozkładzie normalnym,
- $z$  — głębokość.

W tym przypadku wartość oczekiwana zmiennej losowej  $E$  oraz jej wariancja dane są wzorami:

$$E[E] = E[E_0] + E[k]z \tag{2}$$

$$Var[E] = Var[E_0] + Var[k]z^2 + 2zCov[E_0, k] \tag{3}$$

gdzie:

$$Cov[E_0, k] = E\{(E_0 - E[E_0]) \cdot (k - E[k])\} \tag{4}$$

jest kowariancją zmiennych losowych  $E_0$  i  $k$ . Jeśli zmienne  $E_0$  i  $k$  są nieskorelowane, to współczynnik zmienności zmiennej losowej  $E$  ma następującą postać:

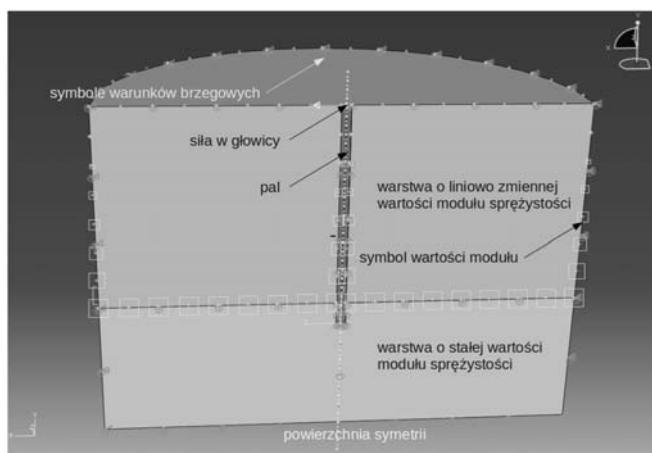
$$v_E = \frac{\sqrt{Var[E]}}{E[E]} = \frac{\sqrt{Var[E_0] + Var[k]z^2}}{E[E_0] + E[k]z} \tag{5}$$

Jak widać współczynnik zmienności jest funkcją głębokości  $z$ .

### 3. Model obliczeniowy metody elementów skończonych

Przyjęty sposób wykonania obliczeń wskaźnika niezawodności stanu granicznego użytkownika pała obciążonego siłą poziomą za pomocą powierzchni odpowiedzi wymaga do jej zdefiniowania zestawu danych przemieszczeń poziomych głowicy pała w zależności od zbioru wartości zmiennych losowych takich jak: wartość siły, wartość modułów sprężystości podłoża i gradientu wzrostu modułu Younga podłoża wraz z głębokością zalegania warstwy. Teoretycznie można te wartości uzyskać wykonując odpowiednie badania modelowe. Jednak ten sposób postępowania ze względu na praco- i czasochłonność jest bardzo rzadko stosowany. Obecnie, prawie wyłącznie, w celu uzyskania danych potrzebnych do stworzenia powierzchni odpowiedzi stosuje się modelowania numeryczne. Trójwymiarowy model

pojedynczego pala obciążonego siłą poziomą jest przedstawiony na rysunku 2. Przy tworzeniu modelu, dla zmniejszenia ilości zastosowanych elementów i przyspieszenia obliczeń, wykorzystano płaszczyznę symetrii i jako bryłę modelu obliczeniowego przyjęto połowę walca o średnicy 20 m i wysokości 15 m. Na powierzchniach zewnętrznych ustanowiono warunki brzegowe w przemieszczeniach, a głowica pala jest obciążona naprężeniami stycznymi o wypadkowej 25 kN. Pal posiada przekrój kołowy o średnicy 40 cm, a jego długość wynosi 10 m. Ośrodek gruntowy składa się z dwóch warstw. Warstwa górna o miąższości 9 m charakteryzuje się rosnącym liniowo wraz z głębokością modułem sprężystości o wartości oczekiwanej na powierzchni równej 4 MPa i wartością oczekiwaną gradientu 1,6 MPa/m. Warstwa dolna posiada stały moduł sprężystości o wartości 80 MPa opisujący grunt o dobrych własnościach geotechnicznych. W warstwie dolnej pal jest zagłębiony na odcinku 1 m. Oba rodzaje gruntu zdefiniowano jako idealnie liniowo-sprężyste o jednostkowym ciężarze własnym  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$  oraz współczynniku Poissona  $\nu = 0,25$ .

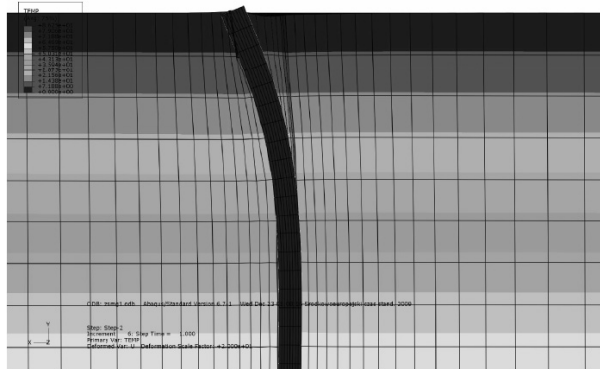


**Rys. 2.** Trójwymiarowy model obliczeniowy pala obciążonego siłą poziomą

Stale sprężyste pala przyjęto jak dla betonu klasy C25/30 o module Younga  $E_b = 30 \text{ GPa}$ , współczynniku Poissona  $\nu = 0,25$  oraz ciężarze własnym  $\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$ .

Przykładowy wynik obliczeń jest przedstawiony na rysunku 3. Rysunek przedstawia, w skązonej skali przemieszczeń poziomych z dwudziestokrotnym ich powiększeniem, odkształcony pal umieszczony w ośrodku gruntowym o własnościach sprężystych przedstawionych wyżej.

Na sposób wykonania obliczeń mają wpływ przyjęte warunki kontaktu powierzchni pala z ośrodkiem gruntowym w postaci braku przenoszenia naprężeń rozciągających i możliwości wystąpienia poślizgu po przekroczeniu przez naprężenia styczne sił tarcia związanych ze współczynnikiem tarcia o wartości 0,3 występującym na styku pal–podłoże. Te warunki kontaktu powodują, że model obliczeniowy, mimo zastosowania elementów skończonych o własnościach sprężystych, jest fizycznie nieliniowy i poszczególne rozwiązania są uzyskiwane w procesach czasochłonnych iteracji. Nieliniowy charakter modelu potwierdza cha-



**Rys. 3.** Przemieszczenie całkowite pala w skali skażonej

rakterystyczna, widoczna na rysunku 3 szczelina za palem powstająca po odkształceniu się obciążonego pala.

Pierwszym krokiem przy wykonywaniu obliczeń było określenie wielkości przemieszczenia poziomego głowicy pala dla trzech wartości siły poziomej o wartościach zbliżonych i przekraczających wartość oczekiwaną siły. Uzyskane rezultaty pozwoliły stwierdzić, że obliczone przemieszczenia są z dokładnością do trzeciego miejsca znaczącego liniowe w stosunku do wartości przyłożonej siły, co umożliwiło utworzenie powierzchni odpowiedzi w postaci liniowej w stosunku do siły obciążającej głowicę pala, mimo że model obliczeniowy MES jest fizycznie nieliniowy. Drugim krokiem obliczeń było uzyskanie zbioru wartości przemieszczeń poziomych głowicy dla zbioru wartości stałych sprężystych modułu Younga dla powierzchni terenu i wartości gradientu wzrostu modułu sprężystości wraz z głębokością. Ze względu na czasochłonność procesu iteracyjnego w dochodzeniu do rozwiązania, obliczenia zautomatyzowano przy użyciu skryptu napisanego w języku programowania Python, który nadawał wartości rosnących modułów Younga, przypisywanych następnie poszczególnym elementom skończonym i archiwizował rezultaty poszczególnych obliczeń. Po utworzeniu powierzchni odpowiedzi dla pierwszego zestawu wyników obliczeń i wykonaniu obliczeń niezawodnościowych uzyskuje się wartości parametrów losowych w punkcie obliczeniowym (design point), w otoczeniu którego należy utworzyć powierzchnię odpowiedzi drugiego przybliżenia. Wykorzystanie przygotowanego skryptu w języku Python automatyzuje również tą ostatnią fazę obliczeń.

Do obliczeń użyto programu ABAQUS 6.7 w ramach przyznanego grantu przez Wrocławskie Centrum Sieciowo Superkomputerowe.

#### **4. Zastosowanie metody obliczeń probabilistycznych**

Zastosowane w tej pracy metody obliczeń probabilistycznych są zbliżone do tych, które użyto w pracy [2]. Dlatego ich opis podany jest jedynie w postaci zwięzłej informacji. Aby otrzymać w jawnej postaci zależność przemieszczenia głowicy pala w zależności od przyjętych z założenia trzech zmiennych losowych, którymi były tu: dwie zmienne losowe charak-

teryzujące zmienny z głębokością moduł Younga wierzchniej warstwy oraz przyłożona siła poprzeczna, zastosowano metodę powierzchni odpowiedzi.

Metoda ta opisana jest w wielu opracowaniach monograficznych, np. [9, 10]. Tu polegała ona na aproksymowaniu numerycznych rezultatów otrzymywanych metodą elementów skończonych, a konkretnie przemieszczeń poziomych pała, związkiem funkcyjnym pomiędzy parametrami losowymi a przemieszczeniami głowicy pała. Zależność funkcyjną znajdowano stosując metodę regresji nieliniowej z zastosowaniem kompromisu Marquardta [8]. Obszerniejsze omówienie metody przedstawiono w pracy [2].

Jako stan awaryjny konstrukcji przyjęto taki, w którym przemieszczenie głowicy przekroczy określoną wartość  $u_0$ . Zadanie będzie polegało na znalezieniu prawdopodobieństwa postaci:

$$p_F = P\{U(\mathbf{X}) > u_0\} \quad (6)$$

gdzie  $U(\mathbf{X})$  jest przemieszczeniem głowicy pała zależnym od wektora parametrów  $\mathbf{X}$ , zawierającego zarówno losowe jak i nielosowe komponenty. Jako równoważną miarę stosuje się wskaźnik niezawodności  $\beta$ , związany z prawdopodobieństwem (6) zależnością:

$$p_F = \Phi_0(-\beta) \quad (7)$$

w której  $\Phi_0$  jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Do obliczenia miar (6) i (7) zastosowano metody FORM i SORM szeroko rozpowszechnione w ramach teorii niezawodności konstrukcji [6]. Najistotniejszym elementem tych metod jest znalezienie tzw. punktu obliczeniowego  $y^*$ , leżącego na powierzchni stanu granicznego:

$$\{x: U(x) = u_0\} \quad (8)$$

którego odległość do początku układu współrzędnych w układzie standardowych zmiennych normalnych jest najmniejsza [6, 10]. Wokół tego punktu skoncentrowana jest największa „masa prawdopodobieństwa” determinująca prawdopodobieństwo (6). Punkt ten jest punktem centralnym zestawu danych uzyskanych z modelu MES, definiujących ostateczną postać powierzchni odpowiedzi. W ramach niniejszej pracy przyjęto następującą procedurę zaproponowaną przez Bauera i Pułę [1].

- Mając dane wartości oczekiwane zmiennych losowych wyznacza się ich przybliżony zakres zmienności. Jego zasięg można przyjąć jako plus — minus wartość odchylenia standardowego od wartości oczekiwanej dla każdej zmiennej.
- Wybierając wartości stałych materiałowych z zakresu ich zmienności uzyskuje się (poprzez obliczenia metodą elementów skończonych) kilkanaście wartości przemieszczeń głowicy pała.
- Przyjmując powierzchnię odpowiedzi w postaci następującego wielomianu trzeciego stopnia względem zmiennych losowych  $F, E_0, k$ :

$$U(F, E_0, k) = \frac{F}{50}(B_1 + B_2 E_0 + B_3 k + B_4 E_0^2 + B_5 k^2 + B_6 E_0 k) \quad (9)$$

i traktując to wyrażenie jako model regresji wyznacza się początkowe wartości bi parametrów  $B_i$  za pomocą regresji nieliniowej. Wyniki, przy przyjętej dokładności obliczeń, wykazały, że nieliniowość modelu jest pomijalna.

- Tak otrzymaną powierzchnię  $U(F, E_0, k)$  podstawia się do wzoru (8), uzyskując powierzchnię stanu granicznego.
- Następnie stosując metodę FORM znajduje się punkt obliczeniowy  $y^*$  położony na tej powierzchni.
- Powyższe kroki postępowania powtarza się w otoczeniu punktu obliczeniowego, zmniejszając zakres zmiennych losowych na przykład do plus/minus połowy odchylenia standardowego od wartości współrzędnych wyznaczających punkt obliczeniowy. Wymaga to wyznaczenia nowego zestawu współczynników  $B_i$ .
- Wyznaczone w ten sposób współrzędne punktu obliczeniowego najczęściej są już wystarczająco dokładne, co sprawdza się przez obliczenia MES.

## 5. Wyniki obliczeń

Obliczenia przeprowadzono dla następujących zmiennych losowych: siły  $F$ , modułu Younga  $E_0$  dla pierwszej warstwy gruntu oraz parametru  $k$  przyrostu modułu Younga warstwy wraz z głębokością. Uwzględniono różne wartości współczynników zmienności zmiennych losowych. Założenia dotyczące probabilistycznych charakterystyk parametrów losowych modelu zestawiono w tabeli 1.

TABELA 1  
Charakterystyki probabilistyczne parametrów zadania

Parametr	Wartość średnia	Współczynnik zmienności	Rozkład prawdopodobieństwa
Moduł Younga warstwy $E_1$	4,0 MPa	10% 20%	log-normalny
Parametr $k$ przyrostu modułu Younga dla warstwy	1,6 MPa	7,5% 10% 15% 20%	normalny
Siła pozioma w głowicy $F$	50 kN	10% 15%	log-normalny
Dopuszczalne przemieszczenie głowicy pała $u_0$	0,010 m	—	nielosowe

W pierwszym etapie obliczeń traktowano poszczególne zmienne losowe jako stochastycznie niezależne. W kolejnym etapie obliczeń założono korelację pomiędzy zmiennymi

losowymi modułu Younga  $E$  oraz parametru przyrostu modułu  $k$ . Przyjęto korelacje dodatnią oraz ujemną o wartościach  $\rho = -0,50$ ,  $\rho = +0,50$ ,  $\rho = +0,75$ .

Wartości współczynników Poissona przyjęto jako nielosowe, gdyż ich losowość w wielu zagadnieniach sprężystych jest pomijalna [11]. Powierzchnie odpowiedzi wyznaczano w postaci wielomianu trzech zmiennych trzeciego stopnia w postaci (9), zgodnie z procedurą przedstawioną w punkcie 4. Zadawalająca zbieżność została osiągnięta w dwóch iteracjach.

W tabeli 2 zamieszczono współczynniki uzyskane w poszczególnych iteracjach.

TABELA 2  
**Obliczenie współczynników powierzchni odpowiedzi**

Iteracja	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$
1	0,22894E+00	-0,35919E+00	-0,34252E+00	0,20784E-01	0,2211E-01	0,38634E-01
2	0,2358E+01	-0,38686E+00	-0,37038E+00	0,23439E-01	0,24741E-01	0,44512E-01

Uzyskana w pierwszym etapie powierzchnia odpowiedzi została zastosowana w funkcji stanu granicznego (8) do obliczenia prawdopodobieństwa (6) i wskaźnika niezawodności (7).

W tabeli 3 podano przykładowe wyniki obliczeń wskaźnika niezawodności i prawdopodobieństwa awarii przy dwóch różnych zestawach wartości współczynników zmienności poszczególnych zmiennych losowych. Zmienne losowe były w tych przykładach stochastycznie niezależne. Pokazano też współrzędne punktu obliczeniowego. W ostatnich trzech kolumnach zestawiono współczynniki wrażliwości poszczególnych zmiennych (suma kwadratów tych współczynników jest równa jedności). Podają one informację, które ze zmiennych losowych mają największy wpływ na wskaźnik niezawodności (prawdopodobieństwo awarii). Widać, że największe znaczenie ma zmienność losowa siły zewnętrznej, niezależnie od założonej zmienności pozostałych zmiennych losowych. Spośród dwóch parametrów charakteryzujących moduł Younga istotniejsze są losowe wahania wartości początkowej  $E_0$ . Oczywiście duży wzrost współczynników zmienności powoduje istotny spadek wskaźnika niezawodności a także zmiany współrzędnych punktu obliczeniowego.

TABELA 3  
**Przykładowe wyniki wraz ze współczynnikami wrażliwości**

Współczynniki zmienności	$\beta$	$p_F$	Współrzędne punktu obliczeniowego			Współczynniki wrażliwości		
			$E^*$	$k^*$	$F^*$	$\alpha_E$	$\alpha_k$	$\alpha_F$
$v_F = 10\%$ $v_E = 10\%$ $v_k = 10\%$	2,485	6,47E-03	3,54977	1,52557	49,3129	0,463	0,188	-0,866
$v_F = 15\%$ $v_E = 20\%$ $v_k = 20\%$	1,53	6,30E-02	3,3253	1,48291	47,3704	0,551	0,242	-0,799



Dla różnych wartości współczynników zmienności  $v$  w przypadku niezależnych zmiennych losowych  $E_0$  oraz  $k$  otrzymano wyniki wskaźnika niezawodności  $\beta$ , które zestawiono w tabeli 4.

**TABELA 4**  
**Wskaźniki niezawodności uzyskane w obliczeniach probabilistycznych**

Współczynnik zmienności		Wskaźniki niezawodności $\beta$			
$v_F$	$v_E$	Współczynnik zmienności $v_k$			
		7,50%	10%	15%	20%
10%	10%	2,505	2,485	2,43	2,357
10%	20%	1,952	1,941	1,907	1,862
15%	10%	1,842	1,835	1,814	1,785
15%	20%	1,569	1,566	1,551	1,53

Warto odnotować, że wielkość współczynnika zmienności zmiennej  $k$  (charakteryzującej nachylenie „trendu” zmienności modułu) nie ma wielkiego wpływu na wskaźnik niezawodności. Jest to fakt zadawalający, gdyż estymacja wariancji zmiennej  $k$  na podstawie wyników badań może narażać pewne trudności w przypadku małej liczebności próby. Można więc uznać, że przedstawiony sposób modelowania zmienności modułu Younga jest dobry.

Dla wybranych przykładów skorelowanych zmiennych losowych  $E_0$  oraz  $k$  otrzymano wskaźniki niezawodności  $\beta$ , które zestawiono w tabeli 5.

**TABELA 5**  
**Wskaźnik niezawodności obliczony dla przykładów skorelowanych zmiennych**

Współczynnik zmienności			Wskaźniki niezawodności $\beta$		
$v_F$	$v_E$	$v_k$	Współczynnik korelacji $\rho$		
			-0,50	+0,50	+0,75
10%	10%	10%	2,603	2,389	2,331
15%	20%	20%	1,651	1,434	1,383

Jak łatwo zauważyć dodatnia korelacja zmiennych  $E_0$  oraz  $k$ , która wydaje się być bardziej prawdopodobna z intuicyjnego punktu widzenia, powoduje spadek wskaźnika niezawodności (wzrost prawdopodobieństwa awarii), zaś ujemna korelacja — wzrost wskaźnika niezawodności. Zmiany te nie są jednak bardzo duże.

## 6. Podsumowanie

Praca przedstawia rezultaty probabilistycznego modelowania przemieszczeń pała obciążonego siłą poziomą. Stanowi ona kontynuację pracy [2]. Istotnie nowym elementem jest opracowanie modelu, w którym wartość oczekiwana oraz odchylenia standardowe modułu

Younga mogą zmieniać się z głębokością. Zadania tego rodzaju: losowe i modelowane przestrzennie łączą obliczenia metodą elementów skończonych z metodą powierzchni odpowiedzi z metodami wyznaczania wskaźników niezawodności FORM i SORM. Przedstawione przykłady pokazują, że o prawdopodobieństwie przekroczenia dopuszczalnego przemieszczenia decyduje przede wszystkim zmienność losowa działającego obciążenia, a spośród pozostałych przyjętych parametrów zmienność modułu Younga.

Obecny algorytm pozwala na realistyczną ocenę miar niezawodności związanych z przekroczeniami przemieszczeń dopuszczalnych w głowicy pała.

Planuje się rozbudowę modelu, aby umożliwić porównanie analizy dwuwymiarowej, bazującej na modelu Winklera oraz rozwiązaniach typu „*p-y curves*” [12] z trójwymiarową analizą probabilistyczną bazującą na modelu półprzeźreni sprężystej.

## LITERATURA

- [1] *Bauer J., Pula W.*: Reliability with Respects to Settlement Limit-states of Shallow Foundation on Linearly-deformable Subsoil. *Computers & Geotechnics*, 25, 3–4, 2000, p. 281–308
- [2] *Bauer J., Kozubal J., Pula W., Wyjadłowski M.*: Analiza przemieszczeń poprzecznie obciążonego pała w trójwymiarowym ośrodku liniowo sprężystym o cechach losowych, *Inżynieria i Górnictwo*, vol. 33, z. 1, 2009, s. 65–74
- [3] *Bergado D.T., Chang J.C.*: Application of Interactive Computer Aided Probabilistic Slope Stability Assessment for Embankments of Soft Bangkok Clay. W: *Proceedings of The International Symposium on Computer and Physical Modelling in Geotechnical Engineering*, Bangkok 1989, p. 25–52
- [4] *Cherubini C.*: Data and Consideration on the Variability of Geotechnical Properties of Soils, *Proc. of the ESREL Conf. Lisboa 1997*, p. 1538–1591
- [5] *Cherubini C.*: Probabilistic Approach to the Design of Anchored Sheet Pile Walls, *Computers and Geotechnics*, Vol. 26, No. 3–4, 2000, p. 309–330
- [6] *Hohenbichler M., Gollwitzer S., Kruse W., Rackwitz R.*: New Light on First and Second-order Reliability Methods, *Structural Safety*, 4, 1987, p. 267–284
- [7] *Li K.S., White W.*: Probabilistic Characterization of Soil Profile. *Research Studies from the Department of Civil Engineering, University College, Australian Defence Force Academy, UNSW Report no. 20*, 1987
- [8] *Marquardt D.W.*: An Algorithm for Least-squares Estimation of Non-linear Parameters, *J. Soc. Indust. Appl. Math*, 11, No. 2., 1963
- [9] *Mayers R.H., Montgomery D.C.*: *Response Surface Methodology Process and Product Optimisation Using Design Experiments*, John Wiley and Sons, New York 1995
- [10] *Pula W.*: *Zastosowania teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa fundamentów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004
- [11] *Pula W., Wyjadłowski M.*: Effect of Elastic Parameters Random Variability on Shallow Foundations Settlements by Finite Layers Method, *Studia Geotechnica et Mechanica*, vol. 21, No. 3–4, 1999, p. 87–118
- [12] *Tangjirira V., Teh C.I., Low B.K.*: Reliability Analysis of Laterally Loaded Piles Using Response Surface Methods, *STRUCT SAF* 22: 4, 2000, p. 335–355