

*Irena Bagińska**, *Ryszard Jerzy Izbicki**

OPTIMALIZACJA GEOMETRII BRYŁY ODŁAMU W UOGÓLNIONEJ METODZIE ELEMENTÓW KINEMATYCZNYCH

1. Wstęp

Uogólniona metoda elementów kinematycznych jest jedną z grupy metod wywodzących się z teorii plastyczności. Oszacowuje poszukiwane wielkości z góry na mocy jednego z twierdzeń stanu granicznego mówiącego, iż dowolne kinematycznie dopuszczalne pole prędkości, które spełnia warunki brzegowe, dostarcza górną ocenę rozwiązania ścisłego [6]. Metoda powstała na bazie metody elementów kinematycznych liczącej sobie niespełna 20 lat [3, 4]. Wprowadzone uogólnienie do klasycznej MEK zapewniło konsekwentne zastosowanie w całym algorytmie obliczeniowym stowarzyszonego prawa płynięcia i uzyskiwanie kinematycznie dopuszczalnych mechanizmów zniszczenia [1].

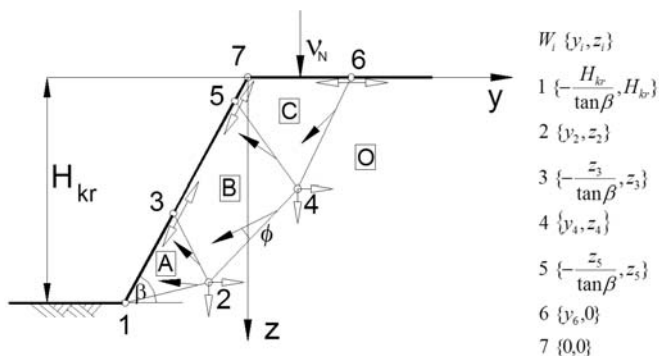
Podczas obliczeń założono sztywno-idealnie plastyczny model gruntu. Przyjęto warunek plastyczności zgodny z hipotezą Coulomba oraz stowarzyszonego prawa płynięcia.

2. Algorytm obliczeniowy uogólnionej metody elementów kinematycznych

Algorytm obliczeniowy uogólnionej MEK składa się z trzech zasadniczych etapów. Pierwszym jest przyjęcie topologii bryły odłamu, czyli kształtu i liczby sztywnych bloków będących wyidealizowanym obrazem strefy deformacji.

Na rysunku nr 1 przedstawiono przykładową topologię bryły odłamu składającą się z trzech elementów. Może ona posłużyć do oceny wysokości krytycznej dowolnego zbocza o zadanym kącie nachylenia opisanym kątem β . Wszystkie linie międzyelementowe są liniami nieciągłości prędkości. Konsekwentne zastosowanie stowarzyszonego prawa płynięcia, zarówno na etapie budowy bryły odłamu jak również bilansu mocy,

* Instytut Geotechniki i Hydrotechniki, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wroclawska, Wrocław



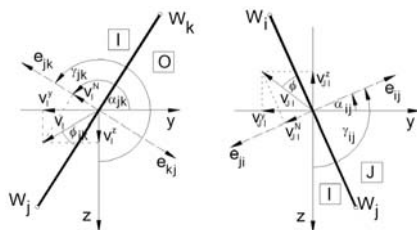
Rys. 1. Topologia bryły odłamu wraz z wyjściowymi współrzędnymi węzłów siatki bryły odłamu

wymusza odchylenie wektorów skoku prędkości od linii nieciągłości o kąt równy kątowi tarcia wewnętrzznego ϕ . Wszystkie wierzchołki elementów opisane są współrzędnymi względem przyjętego układu odniesienia. Ostateczne wartości współrzędnych zostają wyznaczone po optymalizacji geometrii bryły odłamu, ponieważ w trakcie analizy położenie niektórych wierzchołków ulega zmianie zgodnie z przyjętymi stopniami swobody. Na powyższym rysunku stopnie swobody przedstawiono za pomocą strzałek z pustymi grotami.

Drugi etap polega na wyznaczeniu za pomocą równań kinematycznych składowych poziomych i pionowych wszystkich wektorów prędkości. Dla każdej bowiem linii nieciągłości prędkości zapisane zostaje równanie opisujące rzut składowych wektora skoku prędkości na kierunek normalny do linii nieciągłości prędkości:

$$v_{ji}^y \cos \alpha_{ji} + v_{ji}^z \cos \gamma_{ji} = v_{ji}^N \quad (1)$$

W powyższym równaniu (1) kąty α i γ , są kątami skierowanymi, które jednoznacznie definiują położenie względem przyjętego układu odniesienia jednostkowych wektorów e_{ij} oraz e_{jk} prostopadłych do linii nieciągłości prędkości.



Rys. 2. Wektory prędkości i ich składowe na liniach nieciągłości prędkości

Cosinusy kierunkowe tych kątów można wyrazić za pomocą współrzędnych węzłów siatki bryły odłamu następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{ij} &= \frac{z_{ij}}{\sqrt{y_{ij}^2 + z_{ij}^2}} = l_{ij} = -l_{ji} \\ \cos \gamma_{ij} &= \frac{y_{ij}}{\sqrt{y_{ij}^2 + z_{ij}^2}} = n_{ij} = -n_{ji}\end{aligned}\quad (2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}y_{ij} &= y_j - y_i = -y_{ji}, \\ z_{ij} &= z_j - z_i = -z_{ji}.\end{aligned}$$

Wykorzystując powyższy zapis oraz zależności trygonometryczne, równanie (1) można zapisać ogólnie dla wszystkich linii nieciągłości prędkości ij międzyelementowych w postaci:

$$v_i^y l_{ji} + v_i^z n_{ji} + v_j^y l_{ij} + v_j^z l_{ij} = (v_i^y - v_j^y) \frac{\tan \phi_{ij}}{l_{ij} \tan \phi_{ij} - n_{ij}} \quad (3)$$

natomiast dla wszystkich linii nieciągłości prędkości jk oddzielających mechanizm od nieruchomego otoczenia:

$$v_i^y l_{jk} + v_i^z l_{jk} = v_j^y \frac{\tan \phi_{jk}}{l_{jk} \tan \phi_{jk} - n_{jk}} \quad (4)$$

Po zapisaniu powyższych równań (3) i (4) dla wszystkich linii nieciągłości prędkości i zastosowaniu prostych przekształceń otrzymano układ równań kinematycznych, który w zapisie macierzowym można przedstawić jako:

$$[K_{uK}] \cdot \{v\} = \{v_N\} \quad (5)$$

W układzie równań (5) $[K_{uK}]$ to niesymetryczna macierz, w której zawarte są cosinusy kierunkowe jednostkowych wektorów prostopadłych do linii nieciągłości prędkości. Wektor $\{v_n\}$ to wektor zadanych warunkami brzegowymi wyrazów wolnych, natomiast $\{v\}$ to wektor poszukiwanych składowych pionowych i poziomych wektorów prędkości.

Dla przykładowego zadania polegającego na wyznaczeniu wysokości krytycznej zboża przedstawionego na rys. 1 układ równań (5) przyjmie następującą postać:

$$\begin{bmatrix} l_{12} - \frac{\tan \phi}{l_{12} \tan \phi + n_{12}} & n_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{32} + \frac{\tan \phi}{l_{32} \tan \phi - n_{32}} & -n_{32} & l_{32} - \frac{\tan \phi}{l_{32} \tan \phi - n_{32}} & n_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{24} - \frac{\tan \phi}{l_{24} \tan \phi + n_{24}} & n_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_{54} + \frac{\tan \phi}{l_{54} \tan \phi - n_{54}} & -n_{54} & l_{54} - \frac{\tan \phi}{l_{54} \tan \phi - n_{54}} & n_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{46} - \frac{\tan \phi}{l_{46} \tan \phi + n_{46}} & n_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{67} & n_{67} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_A^y \\ v_A^z \\ v_B^y \\ v_B^z \\ v_C^y \\ v_C^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Z równań kinematycznych wyznaczono związki opisujące składowe wektorów prędkości wyrażone w funkcji poszukiwanych współrzędnych węzłów siatki bryły odłamu.

Związki te zostają podstawione do równania bilansu mocy, z którego wyłoniona zostaje funkcja celu.

Ostatni, trzeci etap algorytmu obliczeniowego uogólnionej MEK polega na optymalizowaniu bryły odłamu poprzez ostateczne określenie współrzędnych węzłów siatki, dla których funkcja celu osiąga minimum globalne.

3. Funkcja celu

Funkcja celu określana jest na podstawie równania bilansu mocy, w którym moc obciążeń zewnętrznych wraz z siłami masowymi w stanie granicznym równa jest mocy dysypowanej wewnątrz ośrodka. Zakładając, iż kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia składa się ze sztywnych bloków wydzielonych liniami nieciągłości prędkości dysypacja zostaje obliczona jako suma dysypacji występujących wzdłuż linii nieciągłości prędkości. Dlatego zgodne ze stowarzyszonym prawem płynięcia równanie bilansu mocy dla kryterium Coulomba-Mohra można zapisać w sposób następujący:

$$\sum d_{ij} \cdot c \cdot v_{ij} \cdot \cos \phi = \sum Q \cdot v_i^0 + \sum X_i \cdot v_i^z \quad (7)$$

Lewa strona powyższego równania określa dysypację. Natomiast prawą stronę stanowi suma dwóch członów, z których pierwszy określa pracę sił zewnętrznych działających na kierunku prędkości v_i^0 , natomiast drugi pracę sił masowych działających na pionowych składowych wektorów prędkości poszczególnych elementów v_i^z .

Do pełnego uzupełnienia równania bilansu mocy konieczna jest znajomość warunków brzegowych zadania, wartości wektorów skoku prędkości oraz opis geometrii bryły odłamu. Warunki brzegowe pozwalają jednoznacznie sprecyzować charakter poszukiwanych wielkości i narzucić jednostkowy wektor prędkości zadany na jednej z krawędzi zewnętrznych bryły odłamu.

Wartości wektorów skoku prędkości opisane funkcjami wielu zmiennych wyznaczone zostają z równań kinematycznych. Równania kinematyczne (5) powstają po zapisaniu dla każdej linii nieciągłości prędkości elementarnego równania opisującego rzut składowych wektora skoku prędkości na kierunek normalny do linii nieciągłości prędkości, co dokładnie zostało opisane w poprzednim punkcie. Wyznaczone zależności opisują składowe wektorów prędkości i wyrażone są w funkcji poszukiwanych współrzędnych węzłów siatki bryły odłamu.

Opis geometrii bryły odłamu, w przypadku zadań płaskich, sprowadza się do wyznaczenia długości linii nieciągłości prędkości oraz pola powierzchni elementów bryły odłamu. Wszystkie wielkości podawane są w postaci funkcji poszukiwanych współrzędnych węzłów siatki bryły odłamu.

Po przekształceniach ostatecznie zdefiniowana zostaje funkcja celu określająca np. wysokość zbocza:

$$H = \frac{c}{\gamma} f(y_2, z_2, z_3, y_4, z_4, z_5, y_6) \quad (8)$$

Wyznaczając minimum globalne zdefiniowanej funkcji celu określone zostaje górne oszacowanie poszukiwanej wysokości krytycznej zbrocza będącego w stanie równostatecznym. Liczba zmiennych w funkcji celu równa jest liczbie przyjętych warunkami brzegowymi stopni swobody.

4. Optymalizacja geometrii bryły odłamu

Optymalizacja geometrii bryły odłamu odbywa się poprzez ostateczne określenie współrzędnych węzłów siatki bryły odłamu, dla których funkcja celu osiągnęła minimum globalne. Poszukiwanie minimum globalnego skomplikowanej funkcji wielu zmiennych, dla której istnienia pochodnej w całym obszarze poszukiwań nie można zagwarantować, może nastęrczać wiele trudności. Pomocne w tym zakresie są różne programy numeryczne między innymi MATHEMATICA, czy MATLAB.

Ponieważ funkcja celu ma bardzo zawiłą postać i nie można zagwarantować istnienia pochodnej w całym jej obszarze poszukiwań, do przeprowadzenia pełnej analizy optymalizacyjnej wykorzystana została metoda Nelder-Meada należąca do grupy metod bezgradientowych [7]. Istotą tej metody jest wykonywanie numerycznych iteracji, w których bada się wartość funkcji celu w punktach stanowiących wierzchołki sympleksu rozpiętego w przestrzeni rozwiązań. Położenie sympleksu zmienia się odpowiednio w zależności od wyniku badań. Należy jednak pamiętać, iż mimo zbieżności nazw metoda ta nie ma nic wspólnego z metodami sympleksu do rozwiązywania zadań programowania liniowego.

W n -wymiarowej przestrzeni rozwiązań zostaje wybrane $n+1$ punktów tworzących figurę wypukłą zwaną sympleksem. Przyjmuje się, że przed przystąpieniem do obliczeń początkowy sympleks jest regularny, tzn. wszystkie jego boki mają równą długość. Jako informację wejściową wprowadza się w związku z tym dowolnie wybrany punkt startowy poszukiwań x^0 . Pozwoli to wyliczyć startowe współrzędne punktów wierzchołkowych regularnego sympleksu P_i dla $i=1, 2, \dots, n+1$. Długość boku początkowego sympleksu wynosi s . We wszystkich wierzchołkach sympleksu obliczana jest wartość funkcji i na tej podstawie w trakcie kolejnych iteracji sympleks zostaje przekształcany. W każdej iteracji punkt P_{n+1} zwany „najgorszym” zastępowany jest punktem, w którym funkcja przyjmuje wartości nie gorsze, niż w dotychczas badanych punktach. W algorytmie stosuje się operację odbicia, ekspansji (rozciągania) i kontrakcji (ściągania), które są regulowane doboranymi wartościami współczynników odbicia $\alpha > 0$, kontrakcji $0 < \beta < 1$ oraz ekspansji $\gamma > 1$. W analizie przyjęto jako optymalną strategię $\alpha = 1, \beta = 0,5, \gamma = 2$. Obliczenia trwają tak długo, aż odległość między wierzchołkami sympleksu, a środkiem symetrii w pobliżu znalezionej minimum osiągnie wartość nie większą od zakładanej dokładności ϵ .

W czasie obliczeń na funkcję celu nakładane są różne ograniczenia. Można je zadawać poprzez ograniczanie przedziałów zmienności poszukiwanych wielkości lub poprzez nakładanie systemu kar odrzucających rozwiązanie niezgodne z np. warunkami brzegowymi. Niezależnie od sposobu zadawania ograniczeń wszystkie generalnie można podzielić na trzy grupy.

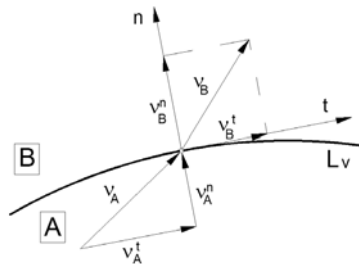
Pierwszą grupę stanowią ograniczenia nakładane bezpośrednio na funkcję celu. W przypadku poszukiwania wysokości krytycznej jest to odrzucenie wszystkich rozwiązań, dla których funkcja celu osiąga wartości ujemne.

Drugą grupę stanowią ograniczenia nakładane na poszukiwane zmienne. Mają one na celu wykluczenie niedopuszczalnych przemieszczeń węzłów siatki podczas optymalizacji kształtu bryły odłamu. Chodzi o to, aby węzły w trakcie optymalizacji przemieszczały się wzdłuż konkretnych prostych (warunki brzegowe, zewnętrzny kontur skarpy) lub przemieszczały się swobodnie, lecz bez możliwości zamiany wzajemnego położenia względem siebie. W ten sposób zapewniona zostaje stała topologia bryły odłamu, która może jedynie zostać zredukowana do prostszej o mniejszej liczbie elementów.

Ostatnią grupę ograniczeń stanowią ograniczenia nakładane na części składowe funkcji celu. Mowa tu o ograniczeniu wynikającym z zasady największej mocy dysypowanej $D \geq 0$. Czyli poszukiwania minimum żądanej wielkości dotyczą tylko tych obszarów rozwiązań, dla których dysypacja jest nieujemna. Ponadto w myśl zasad rządzących na wszystkich liniach nieciągłości prędkości na zależności opisujące wielkości wektorów skoku prędkości nakładane są również pewne ograniczenia. Otóż różnica pomiędzy składowymi normalnymi wektorów prędkości sąsiednich bloków musi dostarczać dodatni przyrost, co zapewnienia kinematyczną dopuszczalność mechanizmu zniszczenia (por. [6]). Czyli zgodnie z oznaczeniami zastosowanymi na rys. 3:

$$v_B^n \geq v_A^n \tag{9}$$

Ograniczenia te wyeliminują rozwiązania, w których elementy mechanizmu złożone ze sztywnych bloków nasuwałyby się na siebie, co byłoby sprzeczne z przyjętym prawem płynięcia.



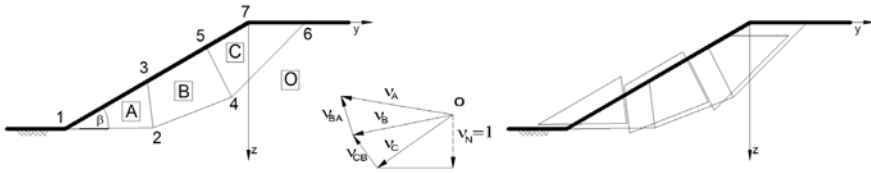
Rys. 3. Wektory prędkości i ich składowe styczne i normalne do linii nieciągłości prędkości dwóch sąsiednich bloków

W zależności od stosowanego zapisu ograniczenia mogą zostać zapisane w postaci nierówności, bądź związków liniowych z wprowadzeniem dodatkowych zmiennych o znanej zmienności. Stosowano oba podejścia i zaobserwowano, iż wprowadzanie dodatkowych zmiennych znacznie wydłuża czas obliczeń iteracyjnych. Ograniczenia do algorytmu optymalizacyjnego zostały wprowadzone jako system kar odrzucających rozwiązania niezgodne z założeniami brzegowymi oraz przyjętymi ograniczeniami.

Rozwiązanie w postaci wartości współrzędnych węzłów siatki bryły odłamu, dla której funkcja celu uzyskała minimum jest podstawą do graficznego przedstawienia zoptymalizowanej bryły odłamu oraz hodografu prędkości i mechanizmu zniszczenia.

5. Wnioski

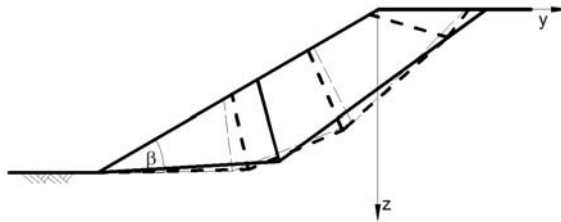
Za pomocą uogólnionej Metody Elementów Kinematycznych przeprowadzono wiele analiz wysokości krytycznej zboczy o zmiennym kącie nachylenia oraz zmiennych parametrach ośrodka gruntowego [1, 2]. Po każdej analizie numerycznej otrzymane rozwiązania przedstawiano graficznie rysując zoptymalizowaną bryłę odłamu, hodograf prędkości oraz mechanizm zniszczenia (rys. 4). W ten sposób sprawdzano kinematyczną dopuszczalność otrzymanych mechanizmów zniszczenia oraz weryfikowano poprawność algorytmu obliczeniowego [5].



Rys. 4. Zoptymalizowana bryła odłamu, hodograf prędkości, mechanizm zniszczenia

Analizie poddawano mechanizmy o zmiennej liczbie elementów. Wzrost liczby elementów wiązał się każdorazowo ze wzrostem liczby zmiennych w funkcji celu. Przykładowo funkcja celu, przy pomocy której można określić wysokość krytyczną zbocza dla bryły odłamu składającej się z dwóch elementów liczyła sobie cztery zmienne. Natomiast ta sama funkcja dla czteroelementowej bryły odłamu liczyła już dziesięć zmiennych.

Zaobserwowano, iż każdorazowy wzrost liczby elementów przybliżał rozwiązanie do rozwiązania ścisłego dając coraz mniejsze wartości wyznaczanej wysokości krytycznej zbocza. Na rysunku 5 porównano zoptymalizowane różnoelementowe bryły odłamu powstałe podczas określania wysokości krytycznej zbocza jednorodnego o kącie nachylenia równym $\beta = 30^\circ$ oraz parametrach gruntu $c = 20 \text{ kPa}$, $\phi = 10^\circ$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$.



Rys. 5. Porównanie zoptymalizowanych różnoelementowych brył odłamu

Ciągłą grubą linią zaznaczono kontur skarpy oraz zoptymalizowaną dwuelementową bryłę odłamu, dla której wysokość krytyczna wyniosła 16,42 m. Przerywaną cienką rozwią-

zanie dla trzejelementowej bryły odłamu o wysokości krytycznej równej 15,17 m. Natomiast przerywaną grubą rozwiązaniem dla czteroelementowej bryły odłamu, dla której wysokość krytyczna została określona jako 15,12 m. Jak widać dwa ostatnie rozwiązania dały bardzo zbliżone wyniki, co może świadczyć o dużej zbieżności rozwiązania przy stosunkowo niewielkiej liczbie elementów. Widać to również na graficznym porównaniu wszystkich brył odłamu, które dostarczyły zbliżoną powierzchnię zniszczenia.

LITERATURA

- [1] *Bagińska I.*: Wykorzystanie uogólnionej Metody Elementów Kinematycznych do oceny stateczności zboczy, Gliwice, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 2005, s. 51–56
- [2] *Bagińska I., Izbicki R.J.*: Niejednorodność ośrodka gruntowego w kinematycznej analizie stateczności zboczy, *Górnictwo i Geoinżynieria*, r. 32, z. 2, 2008, s. 27–33
- [3] *Smoldezyk U.* (red.), *Geotechnical Engineering Handbook*, Vol. 1, Berlin, Ernst&Sohn 2002
- [4] *Gussmann P.*: Die Methode der Kinematischen Elemente, Stuttgart, Baugrundinstitut 1986, Mitteilung 25
- [5] *Izbicki R.J.*: Kinematycznie dopuszczalna analiza stateczności skarp i zboczy. *Archiwum Hydrotechniki*, tom XXIX, z. 3, 1982
- [6] *Izbicki R.J., Mróz Z.*: Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał, Warszawa, PWN 1976
- [7] *Stadnicki J.*: Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji z przykładami zastosowań technicznych, Warszawa, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 2006