

*Tomasz Niedoba**

WIELOWYMIAROWE ROZKŁADY
CHARAKTERYSTYK MATERIAŁÓW UZIARNIONYCH
PRZY ZASTOSOWANIU NIEPARAMETRYCZNYCH
APROKSYMACJI FUNKCJI GĘSTOŚCI
ROZKŁADÓW BRZEGOWYCH**

1. Wstęp

W wielu procesach przeróbczych o rozdziale ziaren decyduje więcej niż jedna ich własność, jak np. wielkość i gęstość ziaren. W pracy przedstawiony zostanie problem związany z wielowymiarowymi rozkładami właściwości ziaren i wpływem na przebieg procesów rozkładów, biorąc pod uwagę rozmiar ziarna D i ich gęstość P . Przy znanych dystrybuantach zmiennych D i P , czyli funkcjach

$$F_1(x) = P(D < x) \text{ i } F_2(y) = P(D < y) \quad (1)$$

dystrybuantę zmiennej dwuwymiarowej (D , P) możemy określić stosując tzw. rozkłady Morgensterna [1, 2, 8, 9], za pomocą wzoru

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)(1 + \mu(1 - F_1(x))(1 - F_2(y))) \quad (2)$$

Funkcja gęstości ma wówczas postać

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)(1 + \mu(1 - 2F_1(x))(1 - 2F_2(y))) \quad (3)$$

gdzie $f_1(x) = (F_1(x))'$, $f_2(y) = (F_2(y))'$, μ jest parametrem $\in \langle -1, 1 \rangle$.

* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

** Artykuł jest wynikiem pracy badawczej nr 11.11.100.276

Dla określenia funkcji gęstości rozkładu zmiennej (D , P) należy więc wyznaczyć poszczególne brzegowe funkcje gęstości zmiennych D i P . Można w tym celu skorzystać z powszechnie stosowanych rozkładów, jak np. Weibulla, Pareto, czy Gumbela [9]. Nie zawsze jednak dają one zadowalającą zgodność z danymi empirycznymi. Istnieje jednakże możliwość zastosowania w tym celu innych metod, w tym tzw. statystycznych metod nieparametrycznych.

2. Metodyka

W pracy wykorzystano nieparametryczne metody aproksymacji gęstości metodą ortogonalnego szeregu Fouriera oraz aproksymację jądrową przy pomocy funkcji Gaussa [3–7].

2.1. Metoda Fouriera

Przy zastosowaniu tej metody gęstości brzegowe poszczególnych zmiennych mają postać

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \left[1 + \sqrt{2} \sum_{j=1}^j Q_j \cos \pi j \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right] \quad (4)$$

gdzie zmienna X przyjmuje wartości należące do przedziału (a, b)

$$Q_j = \frac{\sqrt{2}}{n} \sum_{i=1}^n \cos \pi j \left(\frac{x_i - a}{b-a} \right) \quad (5)$$

$$\hat{J} = \arg \min_{0 \leq J \leq J_N} \sum_{j=0}^J \left(\frac{2}{n} - \hat{Q}_j^2 \right), \quad J_N = [4 + 0,5 \ln n], \quad ([x] \text{ — część całkowita liczby } x).$$

Po scałkowaniu otrzymujemy wzór na dystrybuantę zmiennej X

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{j=1}^j \frac{Q_j}{j} \sin j\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \quad (6)$$

2.2. Metoda jądrowa z użyciem funkcji Gaussa

Przy zastosowaniu tej metody, gęstość brzegowa zmiennej ma postać

$$f(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-x_i}{h} \right)^2} \quad (7)$$

zaś dystrybuanta tej zmiennej zadana jest wzorem

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{x - x_i}{h} \right) \quad (8)$$

gdzie h oznacza maksymalną szerokość pasma i zadana jest wzorem

$$h = 1,066n^{-\frac{1}{5}}\sigma \quad (9)$$

gdzie σ oznacza odchylenie standardowe.

3. Eksperyment

W pracy rozważany jest rozdział materiału uziarnionego na przykładzie węgla frakcji lekkiej z KWK „Piaś”. Rozdział ten dokonany został na podstawie wielkości ziaren i ich gęstości.

Wyniki rozdziału materiału przedstawiono w tabelach 1 i 2.

Przy pomocy metody najmniejszych kwadratów wyznaczono optymalne μ w rozkładzie Morgensterna i otrzymano dystrybuantę zmiennej (D , P) z poprawką Morgensterna

$$F(d, \rho) = F_1(d)F_2(\rho)(1 - 0,2618(1 - F_1(d))(1 - F_2(\rho))) \quad (10)$$

W celu wyznaczania funkcji $F_1(d)$ (dystrybuanty zmiennej losowej D) zastosowano metodę jądrową z funkcją Gaussa.

Otrzymana funkcja dystrybuanty ma postać

$$F_1(d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \Phi \left(\frac{d - d_i}{2,14} \right) \quad (11)$$

gdzie:

- n_i — oznacza udział i -tej klasy ziarnowej,
- k — ilość klas.

Wyniki aproksymacji zawarto w tabeli 3.

Jako miarę dopasowania rozkładu zastosowano błąd średniokwadratowy

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum (F_{emp}(d_i) - F_{teor}(d_i))^2}{n - 2}} \quad (12)$$

Przy aproksymacji funkcją jądrową Gaussa uzyskaliśmy błąd $s_r = 3,62\%$.

TABELA 1
 Empiryczne funkcje gęstości $f_1(d)$ i $f_2(p)$

p\d	2	3,2	4	5	6,3	10	12,5	16	18	20	suma
1,26	0,0004	0,0004	0,0003	0,0004	0,0005	0,0021	0,001	0,0008	0,0005	0,0003	0,0067
1,3	0,0352	0,0283	0,0205	0,025	0,0343	0,0894	0,0407	0,0354	0,0109	0,0151	0,3348
1,35	0,0516	0,0551	0,0388	0,0494	0,059	0,1271	0,0536	0,0445	0,0127	0,0182	0,51
1,4	0,0048	0,0048	0,0039	0,0061	0,008	0,0171	0,0081	0,003	0,0021	0,0029	0,0608
1,45	0,003	0,0028	0,002	0,0026	0,0032	0,0068	0,0031	0,0025	0,0008	0,0011	0,0279
1,5	0,0017	0,0016	0,0011	0,0014	0,0017	0,0034	0,0015	0,0014	0,0003	0,0005	0,0146
1,6	0,0017	0,0013	0,0009	0,001	0,0011	0,0024	0,0012	0,0009	0,0004	0,0004	0,0113
1,8	0,0013	0,0011	0,0008	0,0008	0,001	0,002	0,0008	0,0006	0,0003	0,0002	0,0089
2	0,0007	0,0005	0,0004	0,0003	0,0004	0,0007	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0037
2,2	0,0035	0,0027	0,0018	0,0019	0,0023	0,0048	0,0019	0,0014	0,0004	0,0006	0,0213
suma	0,1039	0,0986	0,0705	0,0889	0,1115	0,2558	0,1122	0,0907	0,0285	0,0394	

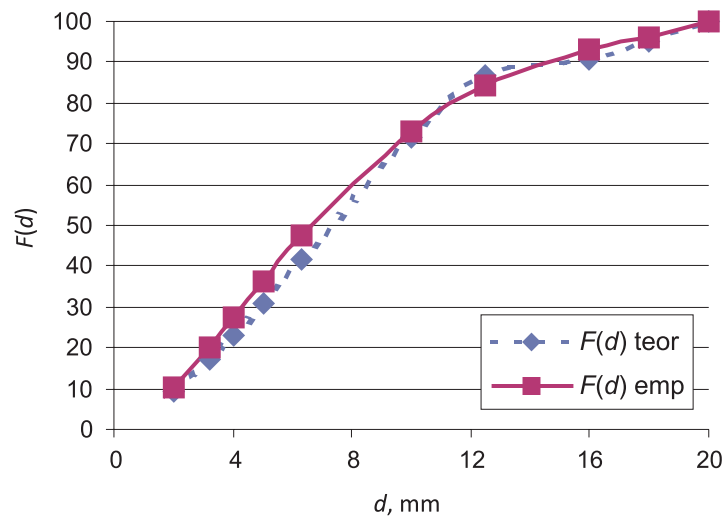
TABELA 2
Dystrybuanty empiryczna $F_1(d)$ i $F_2(\rho)$

$\rho \backslash d$	2	3,2	4	5	6,3	10	12,5	16	18	20
1,26	0,0004	0,0008	0,0011	0,0015	0,002	0,0041	0,0051	0,0059	0,0064	0,0067
1,3	0,0356	0,0643	0,0851	0,1105	0,1453	0,2368	0,2785	0,3147	0,3261	0,3415
1,35	0,0872	0,171	0,2306	0,3054	0,3992	0,6178	0,7131	0,7938	0,8179	0,8515
1,4	0,092	0,1806	0,2441	0,325	0,4268	0,6625	0,7659	0,8496	0,8758	0,9123
1,45	0,095	0,1864	0,2519	0,3354	0,4404	0,6829	0,7894	0,8756	0,9026	0,9402
1,5	0,0967	0,1897	0,2563	0,3412	0,4479	0,6938	0,8018	0,8894	0,9167	0,9548
1,6	0,0984	0,1927	0,2602	0,3461	0,4539	0,7022	0,8114	0,8999	0,9276	0,9661
1,8	0,0997	0,1951	0,2634	0,3501	0,4589	0,7092	0,8192	0,9083	0,9363	0,975
2	0,1004	0,1963	0,265	0,352	0,4612	0,7122	0,8225	0,9118	0,9399	0,9787
2,2	0,1039	0,2025	0,273	0,3619	0,4734	0,7292	0,8414	0,9321	0,9606	1

TABELA 3

Wyniki aproksymacji dystrybuanty $F_1(d)$

d_i , mm	n_i	F_{emp} , %	F_{teor} , %
<2	10,39	10,39	9,48
<3,2	9,86	20,25	17,29
<4,0	7,05	27,30	22,99
<5,0	8,89	36,19	30,73
<6,3	11,15	47,34	41,52
<10,0	25,58	72,92	71,37
<12,5	11,22	84,14	86,57
<16	9,07	93,21	90,71
<18	2,85	96,06	95,23
<20	3,94	100	100



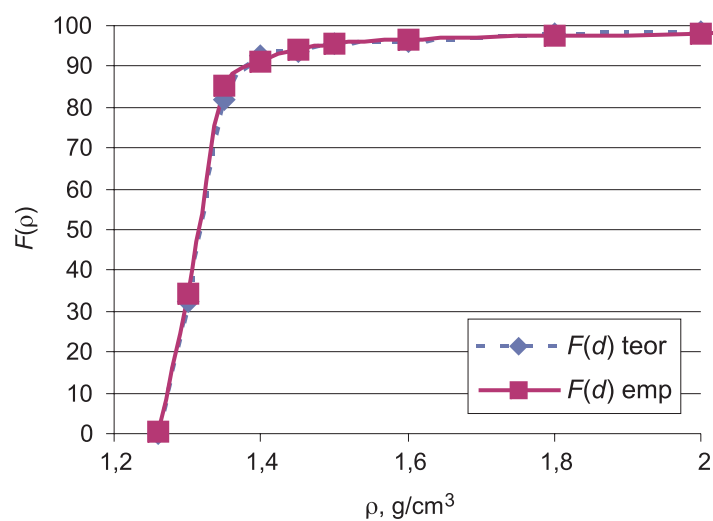
Rys. 1. Porównanie dystrybuanty brzegowej $F(d)$ uzyskanej metodą jądrową Gaussa z dystrybuantą empiryczną

Dla aproksymacji dystrybuanty zmiennej P (gęstości ziaren) posłużono się metodą Fouriera.

Dystrybuanta ma wówczas postać

$$F_2(\rho) = \frac{\rho - 1,26}{0,94} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\begin{aligned} &1,18 \sin \pi \frac{\rho - 1,26}{0,94} + 0,06405 \sin 2\pi \frac{\rho - 1,26}{0,94} + \\ &+ 0,2791 \sin 3\pi \frac{\rho - 1,26}{0,94} + 0,1554 \sin 4\pi \frac{\rho - 1,26}{0,94} + \\ &+ 0,0449 \sin 5\pi \frac{\rho - 1,26}{0,94} \end{aligned} \right) \quad (13)$$

Wyniki aproksymacji przedstawione są w tabeli 4.



Rys. 2. Porównanie dystrybuanty brzegowej $F(\rho)$ uzyskanej metodą Fouriera z dystrybuantą empiryczną

TABELA 4

Wyniki aproksymacji dystrybuanty $F_2(\rho)$

ρ_j , g/cm ³	n_j	F_{emp} , %	F_{teor} , %
<1,26	0,67	0,67	0
<1,30	33,48	34,15	32,19
<1,35	51,00	85,15	81,92
<1,40	6,08	91,23	92,87

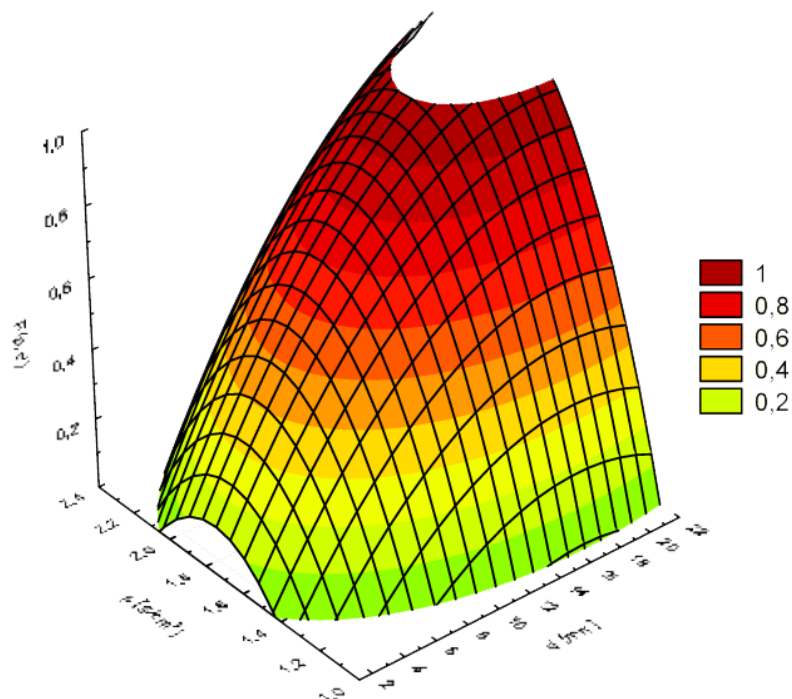
TABELA 4 cd.

ρ_j , g/cm ³	n_j	F_{emp} , %	F_{teor} , %
<1,45	2,79	94,02	93,61
<1,50	1,46	95,48	95,36
<1,60	1,13	96,61	96,28
<1,80	0,89	97,50	97,87
<2,00	0,37	97,87	98,54
<2,20	2,13	100	100

Błąd aproksymacji wynosi w tym przypadku $s_r = 1,35\%$.

Dla tak zadanych dystrybuant funkcji brzegowych dokonano aproksymacji dystrybuanty zmiennej dwuwymiarowej $F(d, \rho)$. Wyniki tej aproksymacji zawarto w tabeli 5 a wykres otrzymanej powierzchni przedstawiono na rysunku 3.

Błąd aproksymacji dla zmiennej dwuwymiarowej wyniósł $s_r = 0,0301$.



Rys. 3. Wygładzona dystrybuanta rozkładu $F(d, \rho)$ uzyskana metodą Morgensterna

TABELA 5
Dystrybuanta teoretyczna $F(d, \rho)$

	2	3,2	4	5	6,3	10	12,5	16	18	20
1,26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,3	0,0256	0,0475	0,0639	0,0867	0,1198	0,2180	0,2720	0,2871	0,3039	0,3219
1,35	0,0743	0,1361	0,1814	0,2435	0,3307	0,5767	0,7046	0,7398	0,7783	0,8192
1,4	0,0865	0,1580	0,2104	0,2817	0,3813	0,6592	0,8019	0,8409	0,8836	0,9287
1,45	0,0874	0,1596	0,2124	0,2843	0,3848	0,6649	0,8085	0,8472	0,8907	0,9361
1,5	0,0894	0,1632	0,2171	0,2905	0,3931	0,6782	0,8241	0,8640	0,9075	0,9536
1,6	0,0904	0,1651	0,2196	0,2938	0,3974	0,6852	0,8324	0,8725	0,9164	0,9628
1,8	0,0923	0,1684	0,2240	0,2995	0,4050	0,6973	0,8466	0,8873	0,9317	0,9787
2	0,0930	0,1698	0,2258	0,3020	0,4082	0,7025	0,8526	0,8935	0,9382	0,9854
2,2	0,0948	0,1729	0,2299	0,3073	0,4152	0,7137	0,8657	0,9071	0,9523	1

4. Wnioski

Uzyskane wyniki pozwalają stwierdzić, że uzyskana dystrybuanta teoretyczna $F(d, \rho)$ wystarczająco dobrze aproksymuje rzeczywisty rozkład zmiennej losowej (D, P) . Niewielka wartość współczynnika Morgensterna $\mu = -0,26118$ nie przeczy hipotezie niezależności zmiennych D i P , tzn., że $F(d, \rho) = F_1(d) \cdot F_2(\rho)$. Rozkład uzyskany poprzez klasyczne mnożenie dystrybuant brzegowych daje znacząco inny wynik (gorzej dobrany) w porównaniu do zastosowanego rozkładu Morgensterna. Świadczy to o słuszności stosowania metody.

LITERATURA

- [1] *Butkiewicz J.*: Wielowymiarowe uogólnienia rozkładu Weibulla. Wrocław, Ossolineum, 1977
- [2] *Butkiewicz J.*: Przegląd rozkładów wielowymiarowych. Wrocław, Ossolineum, 1977
- [3] *Efromovich S.*: Nonparametric curve estimation. New York, Springer-Verlag, 1999
- [4] *Niedoba T., Tumidajski T.*: The approximation of grain composition curves by non-parametric statistical methods. XXIII International Mineral Processing Congress, vol. 1, Stambuł, Turcja, 2006, 203–209
- [5] *Niedoba T.*: Ocena zawartości popiołu w pokładach węgla za pomocą nieparametrycznych metod statystycznych. Górnictwo i Geoinżynieria, vol. 4, 2007, 39–50
- [6] *Sheskin D.J.*: Handbook of parametric and non parametric statistical procedures. Londyn, 2006
- [7] *Silverman B.W.*: Nonparametric density estimation for statistic and data analysis. London New York, Chapman and Hall, 1986
- [8] *Tumidajski T., Niedoba T.*: Multidimensional analysis of coal separation processes. Proceedings of XXIV international mineral processing congress: Beijing, China, vol. 2, Beijing, Chiny, 2008, 2357-2364
- [9] *Tumidajski T.*: Stochastyczna analiza własności materiałów uziarnionych. Wydawnictwo AGH, Kraków, 1997