

Dariusz Foszcz, Tomasz Niedoba*, Tadeusz Tumidajski**

WYBRANE PROBLEMY BILANSOWANIA PRODUKTÓW WZBOGACANIA RUD MIEDZI

1. Wstęp

Wzbogacanie surowców mineralnych polegające na rozdziale nadawy na co najmniej dwa produkty (koncentrat i odpady) musi być oceniane zarówno pod względem technologicznym (określanie wychodów i zawartości składnika użytecznego w produktach), jak i ekonomicznym (uzysk, koszt produkcji). Oceny te dokonywane są zawsze w sposób pośredni w oparciu o analizy chemiczne wykonywane dla pobieranych prób. Z założenia — próby te powinny być reprezentatywne (właściwie charakteryzować opróbowywane masy materiałów) a analizy chemiczne — wykonywane bezbłędnie (lub z błędem jak najmniejszym). Masy materiałów powinny odpowiadać sobie (koncentrat i odpady muszą pochodzić z danej próbki nadawy). Z problemem zgodności mas mamy do czynienia przy bilansowaniu efektów pracy zakładu przeróbki surowców mineralnych dla zmian oraz większych okresów czasu (dekad, miesięcy, roku). Wchodząca ruda daje koncentrat i odpady z różnymi przesunięciami czasowymi, które powinny być uwzględniane przy tworzeniu prób zmianowych. Ze względu na istnienie zawrotów, różnego rodzaju flotacji — dających składowe koncentratu końcowego — jest to praktycznie niemożliwe. Przy bilansowaniu produkcji za dany okres czasu występuje problem zalegania koncentratu w osadnikach Dorra. Ustalenie średnich wartości zawartości miedzi w produktach a także wychodów i uzysków technologicznych i towarowych jest zagadnieniem, które zawsze budziło kontrowersje. Prezentowany artykuł jest głosem w dyskusji dotyczącej problemów bilansowania i prezentacji pewnych rozwiązań.

2. Ocena wpływu błędów pomiarowych i stosowanych formuł na bilans produkcji

Sposoby prowadzenia bilansów miedzi i srebra są zależne od celów bilansowania (wychód lub uzysk technologiczny i ich odpowiedniki towarowe) oraz dostępnych środków

* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

i możliwości. Bilans technologiczny prowadzi się na podstawie analiz chemicznych prób pobieranych ze strumieni nadawy, koncentratu i odpadów. Są one w pracującym zakładzie pobierane w układzie zmianowym przez Centrum Badania Jakości.

Jeżeli przyjmiemy, że bilans dotyczy dokładnie mas (strumieni) sobie odpowiadających (z danej nadawy otrzymano koncentrat i odpady — proces wzbogacania jest ukończony (zamknięty)), to o dokładności wyznaczania wychodu koncentratu decydują tylko błędy pobrania prób (w tym błędy pomniejszania i przygotowania do dalszych analiz) oraz błędy analiz chemicznych [2–4, 6].

W przypadku opróbowania procesu ciągłego (rzeczywistego procesu (układu) przemysłowego) do błędów wymienionych wyżej należy doliczyć błędy wynikające z przesunięć czasowych powstawania produktów (część koncentratu i odpadów pochodzi z nadawy przerabianej na zmianie poprzedzającej zmianę badaną). Ten błąd może być większy od błędów pobrania prób i błędów analiz.

Ze względu na to, że wychody produktów oraz uzyski składników użytecznych są wielkościami zależnymi od wielkości podstawowych, mierzonych bezpośrednio (zawartości składników, mas, wilgotności) błędy ich wyznaczania będą w różny sposób zależne od wielkości błędów wyznaczania wielkości składowych. Analizę wpływu błędów wyznaczania wielkości podstawowych na błędy określenia wychodu i uzysku można przeprowadzić w oparciu o ich pochodne cząstkowe, które mogą być użyte jako miara zmiany wartości funkcji w badanym punkcie. Jako miary bezpośrednie stosuje się wektor gradientu wychodu lub uzysku oraz ich błędy kwadratowe uzyskane metodą różniczki zupełnej [7–9].

Dla wychodu określonego wzorem $\gamma = \frac{\alpha - \vartheta}{\beta - \vartheta}$ i uzysku ε określonego wzorem

$$\varepsilon = \frac{\alpha - \vartheta}{\beta - \vartheta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \text{ mamy:}$$

$$\vec{\text{grad}} \gamma = \left[\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}, \frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} \right] = \left[\frac{1}{\beta - \vartheta}, \frac{-\beta + \alpha}{(\beta - \vartheta)^2}, \frac{-1}{(\beta - \vartheta)^2} \right] \quad (1)$$

$$\vec{\text{grad}} \varepsilon = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta} \right] = \left[\frac{\beta \vartheta}{\alpha^2 (\beta - \vartheta)}, \frac{\vartheta (\vartheta - \alpha)}{\alpha (\beta - \vartheta)^2}, \frac{(\alpha - \beta) \beta}{\alpha (\beta - \vartheta)^2} \right] \quad (2)$$

Współrzędne gradientów wychodu i uzysku wyznaczone w wybranym punkcie określają długości tych wektorów (tempo wzrostu wartości) i są traktowane jako miary wrażliwości badanej wielkości na drodze zmiany wartości podstawowych. Przy przyjęciu punktu średniego $\bar{\alpha} = 2\%$, $\bar{\beta} = 25\%$, $\bar{\vartheta} = 0,2\%$ uzyskujemy odpowiednio:

$$\vec{\text{grad}} \gamma = [\gamma'_{\alpha} = 0,05, \gamma'_{\beta} = 0,0025, \gamma'_{\vartheta} = 0,5]$$

oraz

$$\vec{\text{grad}} \varepsilon = [\gamma'_\alpha = 0,0504, \gamma'_\beta = -0,0003, \gamma'_\vartheta = -0,4674]$$

Jeżeli uzysk towarowy określimy wzorem:

$$\varepsilon = \frac{(1-w_k) \cdot Q_k \cdot \beta}{(1-w_n) \cdot Q_n \cdot \alpha} \quad (3)$$

to wtedy

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} \varepsilon_T &= [\varepsilon'_{w_k}, \varepsilon'_{Q_k}, \varepsilon'_{\beta}, \varepsilon'_{w_n}, \varepsilon'_{Q_n}, \varepsilon'_{\alpha}] = \\ &= \left[\begin{array}{l} -\frac{Q_k \beta}{(1-w_n) Q_n \alpha}, \frac{(1-w_k) \beta}{(1-w_n) Q_n \alpha}, \frac{(1-w_k) Q_k}{(1-w_n) Q_n \alpha}, \\ \frac{(1-w_k) Q_k \beta}{Q_n \alpha} \left(\frac{1}{(1-w_n)^2} \right), \frac{(1-w_k) Q_k \beta}{(1-w_n) \alpha} \left(-\frac{1}{Q_n^2} \right), \frac{(1-w_k) Q_k \beta}{(1-w_n) Q_n} \left(-\frac{1}{\alpha^2} \right) \end{array} \right] \end{aligned}$$

gdzie:

w_k — wilgotność koncentratu (% wyrażony ułankowo),

w_n — wilgotność nadawy (% wyrażony ułankowo),

Q_k — masa koncentratu w tonach,

Q_n — masa nadawy w tonach,

α — zawartość składnika użytecznego w nadawie,

β — zawartość składnika użytecznego w koncentracie.

Jeżeli przyjmiemy, że $Q_n = 12\,000$ t, $Q_k = 800$ t, $\beta = 25\%$, $\alpha = 2\%$, $1 - w_k = 0,92$ oraz $1 - w_n = 0,98$, to

$$\vec{\text{grad}} \varepsilon_T = [-0,8500, 0,0010, 0,0031, 0,7800, -0,0001, -0,0390]$$

Dla $s_\alpha = 0,02\%$, $s_\beta = 0,2\%$, $s_{Q_n} = 20$ t, $s_{Q_k} = 5$ t, $s_{w_k} = 0,01$, $s_{w_n} = 0,1$, $s_\vartheta = 0,01\%$ uzyskujemy

$$s_{\varepsilon_T}^2 = 0,000013 + 0,000000 + 0,000002 + 0,000078 + 0,000002 + 0,000098 = 0,0193\%.$$

Największy wpływ na wartość błędu wychodu i uzysku technologicznego ma oznaczenie zawartości składnika użytecznego w odpadach, potem — zawartości składnika użytecznego w nadawie oraz najslabiej oddziałuje błąd w wyznaczeniu zawartości składnika użytecznego w koncentracji. Na wyznaczenie wartości uzysku towarowego największy wpływ mają (patrz przykład przeliczony): dokładność wyznaczenia zawartości składnika użytecznego w nadawie oraz wilgotności nadawy.

3. Metody estymacji wychodu i uzysku technologicznego

Jak zwrócono uwagę we wstępie można popełnić różnego rodzaju błędy przy ocenie zawartości miedzi w produktach. Przyjmując, że popełnia się tylko błędy przy analizach jednego produktu można zastosować metodę Grumbrechta umożliwiającą oszacowanie średniego (równoważnego) wychodu za okres podlegający bilansowaniu (wprowadzony dla bilansu produktów rozdziału węgla).

Przy analizie rozdziału węgla na dwa produkty przeprowadza się rozdział produktów w cieczach ciężkich w warunkach laboratoryjnych. Przyjmując założenie, że wszystkie frakcje rozdzielały się w tej samej proporcji (np. wychód produktu górnego separatora równy γ) mamy do czynienia z układem równań bilansu

$$\alpha_i = \gamma\beta_i + (1 - \gamma)\vartheta_i \quad (4)$$

Wartości α_i , β_i oraz ϑ_i (odpowiednio zawartości popiołu (składnika użytecznego) w i -tych frakcjach ciężarowych nadawy, koncentratu i odpadów) zostają ustalone metodą analizy zawartości popiołu (lub analizami chemicznymi w przypadku rud). W oparciu o te równania, w przypadku, gdy mamy ustalony metodą pomiaru mas produktów i nadawy wychód koncentratu oraz przyjmując, że dane są wartości β_i i ϑ_i można wyznaczyć wartości α_i (tzw. nadawa z odtworzenia, bardzo często stosowana w analizach procesów rozdziału). W rzeczywistości, jeżeli byłyby znane wartości α_i równania bilansu (przy założeniu bezbłędności wyznaczenia β_i i ϑ_i wykazywałyby niezgodność lewej i prawej strony równania (4), otrzymujemy więc

$$\alpha_i + \Delta\alpha_i = \gamma\beta_i + (1 - \gamma)\vartheta_i \quad (5)$$

Grumbrecht [1, 5] odwrócił zagadnienie i postanowił wyznaczyć taką wartość wychodu γ , która minimalizowałaby sumę kwadratów odchyłek $\Delta\alpha_i$ (czysto teoretycznie (wirtualnie) bez ich znajomości). Analogicznie możemy zapisać

$$\alpha_i = \gamma(\beta_i + \Delta\beta_i) + (1 - \gamma)\vartheta_i \quad (6)$$

$$\alpha_i = \gamma\beta_i + (1-\gamma)(\vartheta_i + \Delta\vartheta_i) \quad (7)$$

Po przekształceniach wzorów (5), (6) i (7) otrzymujemy

$$\Delta\alpha_i = \gamma\beta_i + (1-\gamma)\vartheta_i - \alpha_i \quad (8)$$

$$\Delta\beta_i = \frac{\alpha_i - \gamma\beta_i - (1-\gamma)\vartheta_i}{\gamma} \quad (9)$$

$$\Delta\vartheta_i = \frac{\alpha_i - \gamma\beta_i - (1-\gamma)\vartheta_i}{1-\gamma} \quad (10)$$

Podnosząc strony równości do kwadratu i sumując je otrzymujemy wyrażenia pozwalające minimalizować metodą najmniejszych kwadratów nieznanne wychody. Zgodnie z Grumbrechtem dla $\Delta\alpha$ mamy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 &= \sum_{i=1}^n [\gamma(\beta_i - \vartheta_i) - (\alpha_i - \vartheta_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(\gamma)^2 (\beta_i - \vartheta_i)^2 - 2\gamma(\beta_i - \vartheta_i)(\alpha_i - \vartheta_i) + (\alpha_i - \vartheta_i)^2] \end{aligned} \quad (11)$$

Wyznaczając pochodną względem γ i przyrównując ją do zera mamy kolejno

$$\frac{d\left(\sum_{i=1}^n \Delta_i^2\right)}{d\gamma} = 2\gamma \sum_{i=1}^n (\beta_i - \vartheta_i)^2 - 2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \vartheta_i)(\alpha_i - \vartheta_i) = 0$$

oraz

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^n (\beta_i - \vartheta_i)(\alpha_i - \vartheta_i)}{\sum_{i=1}^n (\beta_i - \vartheta_i)^2} \quad (12)$$

Ze względu na strukturę $\sum_{i=1}^n \Delta_i^2$ wyznaczona wartość γ zapewnia minimalizację jej wartości.

Jeżeli będziemy minimalizować sumę kwadratów $M_i\Delta\alpha_i$, gdzie M_i jest masą suchą nadawy, uzyskamy wyrażenie na wychód średni ważony (metodą najmniejszych kwadratów).

W analogiczny sposób można wyznaczyć wzory określające γ , minimalizując sumy kwadratów $M_i\Delta\beta_i$ i $M_i\Delta\vartheta_i$:

$$\gamma = \frac{\sum M_i^2 (\alpha_i - \vartheta_i)^2}{\sum M_i^2 (\vartheta_i^2 - \beta_i \vartheta_i - \alpha_i \vartheta_i + \alpha_i \beta_i)} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\sum M_i^2 (\alpha_i^2 - \alpha_i \vartheta_i - \alpha_i \beta_i + \beta_i \vartheta_i)}{\sum M_i^2 (\beta_i^2 - \alpha_i \beta_i + \alpha_i \vartheta_i + \beta_i \vartheta_i)} \\ &= 1 - \frac{\sum M_i^2 (\alpha_i - \beta_i)^2}{\sum M_i^2 (\beta_i^2 - \beta_i \vartheta_i - \alpha_i \beta_i + \alpha_i \vartheta_i)} \end{aligned} \quad (14)$$

Drugą część wzoru (14) uzyskano na zasadzie symetrii wzorów (6) i (7) oraz korekty wzoru (13).

Jeżeli do wyznaczenia wychodu zastępczego przyjmiemy metodę Grumbrechta, co jest pewnym rodzajem uśredniania metodą najmniejszych kwadratów, mamy cztery drogi określania wychodu technologicznego w pewnym okresie czasu (dekady, miesiące itp.). Powszechnie stosowanym wychodem reprezentatywnym (zastępczym, średnim) jest wychód średni ważony uwzględniający masy przerabianej nadawy w ciągu zmiany określany wzorem

$$\gamma = \frac{\sum M_i (\alpha_i - \vartheta_i)}{\sum M_i (\beta_i - \vartheta_i)} \quad (15)$$

W tabeli 1 zamieszczono wyniki obliczeń.

Jak łatwo zauważyć, uzyskane oceny wartości wychodów są do siebie bardzo zbliżone i należy traktować występujące różnice jako wynik zaokrągleń (zastosowania różnych mnożeń). Wzory na uzysk średni ważony i uzyskany poprzez minimalizację odchyleń β są zgodne, podobnie jak zgodne są wzory uzyskane metodą minimalizacji odchyleń α i ϑ . Wyznaczone wychody oraz średnie ważne zawartości miedzi w koncentracie pozwalają oszacować ilości wyprodukowanego metalu. Istotą zastosowania tych wzorów jest użycie właściwych (w zamyśle — bezbłędnych danych). Oznacza to, że metodami rachunkowymi nie rozwiąże się problemu technicznego (rzeczywistego) problemu bilansowania produkcji, tzn. wyboru właściwego oszacowania. Wyniki te mogą pełnić jednak rolę kontrolną i weryfikacyjną przyczyn różnic pomiędzy wychodem technologicznym i towarowym.

TABELA 1
Porównanie wychodów koncentratu miedzi obliczonych dla $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ oraz $\Delta\theta$

okres	γ ważony	γ Grumbrechta(α)	różnica ($\gamma_{\text{ważony}} - \gamma_{\text{Grumbrechta}(\alpha)}$)	γ Grumbrechta(β)	różnica ($\gamma_{\text{ważony}} - \gamma_{\text{Grumbrechta}(\beta)}$)	γ Grumbrechta(θ)	różnica ($\gamma_{\text{ważony}} - \gamma_{\text{Grumbrechta}(\theta)}$)
rok 2006	6,332	6,269	0,063	6,317	0,015	6,266	0,066
rok 2007	6,277	6,211	0,066	6,253	0,023	6,208	0,069
rok 2008	6,324	6,271	0,053	6,335	-0,011	6,297	0,027
sty-06	6,198	6,131	0,066	6,173	0,025	6,129	0,069
lut-06	6,096	6,066	0,030	6,107	-0,011	6,063	0,033
mar-06	6,006	5,948	0,058	5,984	0,021	5,946	0,060
kwi-06	6,387	6,344	0,043	6,382	0,005	6,341	0,046
maj-06	6,376	6,311	0,065	6,357	0,019	6,308	0,068
cze-06	6,536	6,459	0,078	6,503	0,033	6,455	0,081
lip-06	6,499	6,421	0,078	6,473	0,026	6,418	0,081
sie-06	6,551	6,477	0,074	6,527	0,024	6,473	0,078
wrz-06	6,299	6,255	0,044	6,290	0,009	6,252	0,046
paź-06	6,534	6,487	0,047	6,518	0,016	6,485	0,049
lis-06	6,487	6,420	0,067	6,482	0,005	6,416	0,071
gru-06	5,984	5,941	0,043	5,974	0,011	5,939	0,045
sty-07	6,141	6,005	0,136	6,075	0,066	6,001	0,141
lut-07	6,375	6,321	0,054	6,361	0,014	6,319	0,057
mar-07	6,370	6,308	0,063	6,352	0,018	6,305	0,065

TABELA 1 cd.

okres	γ wazony	γ Grumbrecht(α)	różnica ($\gamma_{wazony} - \gamma_{Grumbrecht(\alpha)}$)	γ Grumbrecht(β)	różnica ($\gamma_{wazony} - \gamma_{Grumbrecht(\beta)}$)	γ Grumbrecht(θ)	różnica ($\gamma_{wazony} - \gamma_{Grumbrecht(\theta)}$)
kwi-07	6,133	6,073	0,060	6,104	0,029	6,071	0,062
maj-07	6,275	6,210	0,065	6,255	0,020	6,207	0,068
cze-07	6,139	6,081	0,058	6,115	0,024	6,079	0,060
lip-07	6,287	6,252	0,035	6,274	0,013	6,251	0,036
sie-07	6,549	6,485	0,065	6,530	0,019	6,481	0,068
wrz-07	6,436	6,400	0,036	6,419	0,017	6,399	0,037
paź-07	6,161	6,085	0,076	6,128	0,033	6,082	0,079
lis-07	6,177	6,132	0,045	6,171	0,006	6,130	0,048
gru-07	6,528	6,504	0,024	6,538	-0,010	6,501	0,027
sty-08	6,250	6,195	0,056	6,231	0,020	6,192	0,058
lut-08	6,312	6,270	0,043	6,299	0,013	6,267	0,045
mar-08	6,250	6,207	0,043	6,241	0,009	6,205	0,045
kwi-08	6,335	6,301	0,034	6,328	0,008	6,299	0,036
maj-08	6,345	6,277	0,068	6,325	0,020	6,274	0,071
cze-08	6,356	6,332	0,024	6,364	-0,008	6,330	0,026
lip-08	6,211	6,165	0,046	6,200	0,011	6,162	0,049
sie-08	6,337	6,303	0,034	6,334	0,002	6,301	0,036
wrz-08	6,191	6,158	0,032	6,188	0,002	6,156	0,034
paź-08	6,439	6,412	0,028	6,443	-0,004	6,409	0,030
lis-08	6,537	6,489	0,049	6,524	0,013	6,486	0,051
gru-08	6,330	6,279	0,050	6,316	0,013	6,277	0,053

4. Uwagi ogólne dotyczące metodyki bilansowania produkcji koncentratów miedzi

Uzyskanie danych do wyznaczenia prawidłowych wartości wychodów, uzysków (ilości metalu w koncentracie) jest problemem, który można rozwiązać tylko na zasadzie przeprowadzenia właściwego opróbowania. Sprowadza się to do odpowiedniej częstotliwości opróbowania strumieni materiałowych właściwego (maksymalnie reprezentatywnego) pobrania próbki składowej, wykonania właściwych operacji uśredniających próbkę zmianową, praktycznie bezbłędnego wykonania analiz chemicznych (w tym oznaczenia wilgotności nadawy) oraz ustalenia właściwych przesunięć czasowych w organizacji tworzenia prób zmianowych nadawy i produktów. Częstotliwość opróbowania związana jest ze zmiennością zawartości miedzi w strumieniu i związana ona jest także z dokładnością (szerokością przedziału ufności) określenia wartości średniej występującej w równaniach bilansu.

Prowadzenie procesu wzbogacania opartego o nowoczesną aparaturę kontrolno-pomiarową, w szczególności analizatory zawartości składnika użytecznego w produktach stwarzają możliwości określenia parametrów technologicznych dla produktów wzbogacania (wychód, uzysk) praktycznie w czasie rzeczywistym. Poznanie tych wartości umożliwia zarówno kontrolę, jak i oddziaływanie na przebieg procesu w celu poprawy uzyskiwanych wyników wzbogacania. Istotnym elementem dla określonych parametrów technologicznych jest ich wiarygodność. Możliwość weryfikacji uzyskanych wyników określonego wychodu daje zaprezentowana metoda Grumbrechta, dzięki której można minimalizować błędy analizatora wynikające z pobrania niereprezentatywnej próbki czy analizy. Przyjmując, że próbki pobierane i analizowane przez system Courier 300 są bardzo reprezentatywne można je wykorzystać zapewniając bardzo dużą, potrzebną częstotliwość opróbowania. Nadążna analiza pojawiających się różnic $\Delta\alpha_i$, $\Delta\beta_i$ lub $\Delta\vartheta_i$ wyznaczanych z równań (8), (9) i (10) może wskazać złą pracę określonego kanału analizatora lub zmiany wartości przesunięć czasowych dla produktów.

Biorąc pod uwagę zmienność zawartości miedzi w strumieniach, istotną sprawą staje się ustalenie odpowiedniości czasowej tworzonych próbek zmianowych. Jeżeli, dla przykładu, pierwsza próbka cząstkowa dla nadawy pobierana jest na początku zmiany, to pierwsze próbki cząstkowe dla koncentratu powinny być pobrane z opóźnieniem czasowym rzędu 30÷45 minut. Istotne jest to zwłaszcza, gdy występują znaczne zmiany w zawartości miedzi w nadawie, szczególnie na początku i końcu zmiany.

Uzgodnienie ilości metalu (uzysku) wysyłanego do hut z ilościami określanymi technologicznie jest niewykonalna ze względu na istniejącą stałą i nieokreśloną ilość metalu zalegającą w osadnikach Dorra.

LITERATURA

- [1] *Gajdenrajch G.*: Ocena promyslnych rezultatów obogaszczania policznych iskopajemnych. Izd. Niedra, Moskwa, 1962
- [2] *Gy P.M.*: Sampling of Heterogenous and Dynamic Material Systems. Elsevier Scientific Publishing, Amsterdam, 1992

- [3] *Kozin W.Z.*: Oprobowanie na obogatitielnych fabrikach. Izd. Nedra, Moskwa, 1988
- [4] *Martyniak J.*: Niepewność wyników oznaczania właściwości produktu ziarnistego w badaniach wrywkowych. *Gospodarka Surowcami mineralnymi*, t. 20, z. 2, Wyd. IGSMiEPAN — Kraków, 2004
- [5] *Nawrocki J.*: Analityczno-graficzne metody oceny pracy wzbogocalników grawitacyjnych. Katowickie Wydawnictwo „Śląsk”, 1976
- [6] *Oktawiec M.Z., Wierzbicki K., Grabowski T.*: Niektóre pozatechnologiczne przyczyny rozrzutu wyników prób flotacji. *Rudy i Metale* nr 2, 1983
- [7] *Teoria pomiarów*, Warszawa PWN, 1974
- [8] *Tora B., Tumidajski T.*: Wpływ błędów oprobowania na dokładność bilansów składników materiałów uziarnionych. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, t. 15, z. Specjalny, 1999
- [9] *Tumidajski T., Saramak D.*: Metody i modele statystyki matematycznej w przeróbce surowców mineralnych. Wydawnictwo AGH, Kraków, 2009