

## WPLYW DOBORU MODELU SEMIWARIOGRAMU NA WYNIKI INTERPOLACJI PARAMETRÓW ZŁOŻOWYCH

### The influence of the choice of a semivariogram model on interpolation results of mineral deposits parameters

Zbigniew KOKESZ

*Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geologii, Geofizyki i Ochrony Środowiska,  
Katedra Geologii Złożowej i Górniczej;  
al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków;  
e-mail: zkokesz@geolog.geol.agh.edu.pl*

**Abstract:** In the paper the influence of the choice of a semivariogram model on interpolation results of mineral deposits parameters has been characterized. For the lack of knowledge of real variability of the variables on small distances, the nugget effect is interpreted arbitrarily from the semivariogram fitted. It leads to uncertainty on the interpolation and contour mapping.

**Key words:** mineral deposits, contour mapping, geostatistics

**Słowa kluczowe:** złoża kopaliny stałych, sporządzanie map izoliniowych, geostatystyka

## WPROWADZENIE

Mapy izolinii są jedną z najczęściej stosowanych w dokumentacjach geologicznych form przedstawiania kartograficznego informacji o złożu. Sporządzane są przy zastosowaniu różnych procedur interpolacyjnych. Technika komputerowa i odpowiednie oprogramowania (np. Surfer 8.0) umożliwiają zastosowanie bardziej złożonych procedur interpolacyjnych. Spośród różnych formuł estymacyjnych szczególnego znaczenia nabiera geostatystyczna technika krigingu. Wyróżnia się wiele jej wersji. Omówienie ich znaleźć można w pozycjach książkowych z zakresu geostatystyki (np. Namysłowska-Wilczyńska 2006). Najczęściej wykorzystywaną do interpolacji techniką krigingu jest kriging zwyczajny. Jest to najstarsza, parametryczna, liniowa wersja procedury krigingu.

Wszystkie formuły krigingu umożliwiają prognozowanie wielkości poszczególnych parametrów złoża w dowolnych jego miejscach, dzięki czemu znajdują zastosowanie przy sporządzaniu map izoliniowych jako metody interpolacyjne. Wspólną cechą procedur geostatystycznych jest oparcie prognozy wartości parametrów złożowych w punktach sieci interpolacyjnej na opisie struktury ich zmienności. Dzięki temu cechują się one w porównaniu z innymi metodami wyższą efektywnością.

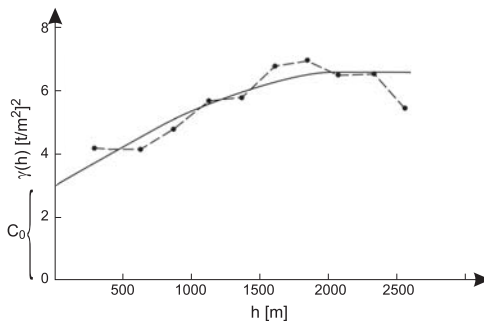
Stosowanie procedur krigingu do sporządzania map izolinii wymaga znajomości charakteru zmienności podstawowych parametrów złożowych. Informacji na ten temat dostarczają semiwariogramy  $\gamma(h)$ . Funkcje  $\gamma(h)$  oblicza się dla poszczególnych parametrów złożowych na podstawie wyników ich pomiaru we wszystkich punktach obserwacyjnych, tj. otworach wiertniczych i wyrobiskach górniczych. Funkcje te przedstawiają zróżnicowanie wartości parametrów w zależności od odległości między punktami pomiaru, a zatem strukturę ich zmienności i w sposób pośredni charakteryzują autokorelację między obserwacjami. Semiwariogramy empiryczne aproksymuje się modelami teoretycznymi, które następnie wykorzystuje się do wyliczania wartości współczynników wagowych, przypisywanych poszczególnym obserwacjom, przy szacowaniu wartości parametrów złożowych w węzłach założonej sieci interpolacyjnej. W procedurach krigingu wartość interpolowana ma bowiem postać średniej ważonej.

Metody krigingu umożliwiają efektywne prognozowanie wielkości parametrów złoża pod warunkiem, że dysponuje się wiarygodnym modelem geostatystycznym opisującym jego strukturę zmienności.

## INTERPRETACJA ZMIENNOŚCI LOKALNEJ I JEJ WPŁYW NA WYNIKI SZACOWANIA PARAMETRÓW ZŁOŻOWYCH

Przy sporządzaniu map izoliniowych metodami geostatystycznymi w obliczeniach wykorzystuje się przede wszystkim znajomość przebiegu semiwariogramu na małych odległościach. Szczególnie zatem istotna wydaje się wiarygodność interpretacji przebiegu funkcji w początku układu współrzędnych.

Ważnym parametrem ilustrującym ciągłość i płynność zmian wartości badanego parametru jest wielkość wariancji zmienności lokalnej  $C_0$  określanej jako wariancja samorodków. Definiuje się ją jako wartość, do której dąży semiwariogram, gdy odległość między obserwacjami zdąży do zera. Efekt samorodków, jako widoczna nieciągłość na początku przebiegu semiwariogramu, może być spowodowany bądź błędami pomiarów, bądź zmiennością na małych odległościach (lokalnymi strukturami zmienności o rozmiarach mniejszych od rozstawu sieci rozpoznawczej) lub obydwoma tymi czynnikami jednocześnie.

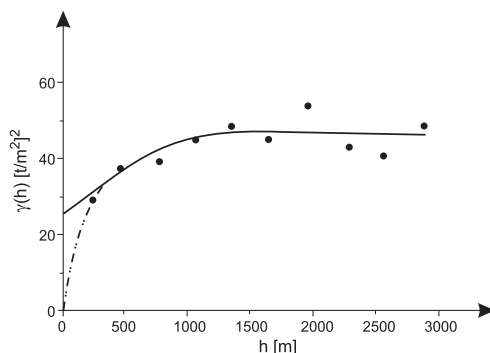


**Fig. 1.** Przykład interpretacji wielkości zmienności lokalnej parametru  $C_0$  (semiwariogram zawartości popiołu w pokładzie 501 KWK Staszic). Linia ciągła przedstawia model semiwariogramu a linia przerywana semiwariogram empiryczny

**Fig. 1.** An example of interpretation of value of local variability  $C_0$  (semivariogram of ash content in hard coal seam No. 501, Staszic Mine). The line displays semivariogram model and dashed line experimental semivariogram

Na ogół wartości  $C_0$  wyznacza się w sposób arbitralny z wykresu semiwariogramu, na podstawie znajomości jego przebiegu na większych odległościach (Fig. 1). Ustalone drogą ekstrapolacji przebiegu semiwariogramów wartości  $C_0$  są obarczone mniejszym lub większym błędem, co z kolei wpływa na wyniki szacowania procedurami krigingu. Zaleca się zatem, o ile to możliwe, wykonywanie na etapie rozpoznawania złóż pewnej ilości wyrobisk odległych od siebie mniej niż rozstaw podstawowy w celu pozyskania informacji o strukturze zmienności złoża na małych odległościach. Powinno to przyczynić się do zwiększenia dokładności prognozowania wartości parametrów złożowych procedurami geostatystycznymi.

Dokładność poznania zróżnicowania parametrów złożowych na małych odległościach warunkuje gęstość sieci rozpoznawczej. W zależności od rozstawu punktów rozpoznawczych w różnym stopniu wykrywana jest zmienność lokalna złoża. W warunkach złóż rozpoznanych rzadką siecią otworów interpretacja wartości  $C_0$  z przebiegu wykresów semiwariogramów prowadzi często do zawyżania wielkości zróżnicowania parametrów w zakresie małych odległości. Świadczą o tym rezultaty analizy struktury zmienności złoża siarki rodzimej Osiek, przedstawione na figurze 2, a potwierdzają wyniki oceny lokalnej zmienności zawartości metali w górnosląskich złożach rud cynku i ołowiu (Mucha 2002).



**Fig. 2.** Wpływ gęstości sieci rozpoznawczej na obserwowaną wielkość zmienności lokalnej złoża (złóże siarki rodzimej Osiek). Linia ciągła przedstawia model semiwariogramu zasobności złoża określony wyłącznie na podstawie danych z otworów w kat. C<sub>1</sub>, a linia przerywana model semiwariogramu parametru przy uwzględnieniu informacji z otworów eksploatacyjnych (w kat. A)

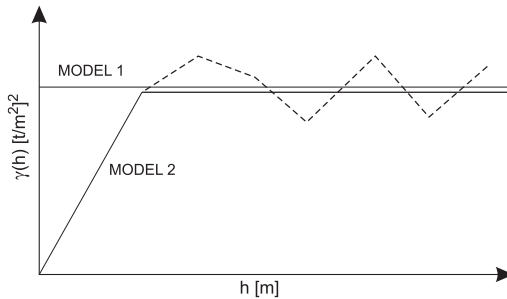
**Fig. 2.** Influence of exploratory grid density on observed value of local variability (Osiek native sulphur deposit). The line displays sulphur accumulation semi-variogram model defined on the basis of preliminary exploration vertical drillholes (drilled for C<sub>1</sub> category) and dashed line presents the semi-variogram model constructed from exploitation boreholes (for category A)

W przypadku złóż rozpoznanych wyrobiskami rozmieszczonymi w układzie sieciowym określenie rzeczywistej wielkości  $C_0$ , charakteryzującej zmienność parametrów złożowych na odległościach znacznie mniejszych od stosowanego rozstawu punktów rozpoznawczych jest praktycznie niemożliwe.

Brak informacji co do rzeczywistego charakteru zmienności parametrów na małych odległościach zmusza do interpretowania wielkości zmienności lokalnej na podstawie przebiegu semiwariogramu empirycznego. W niektórych przypadkach dane obserwacyjne nie pozwalają na jej jednoznaczne przeprowadzenie. Konstruowane przez dokumentatora modele semiwariogramów będą zawsze w mniejszym lub większym stopniu subiektywne. Subiek-

tywizmu tego nie można całkowicie wyeliminować. Jest jedynie sprawą rzetelności zawodowej geologa, by tworzony obraz struktury zmienności parametrów złożowych nie był dziełem jego fantazji lecz znajdował uzasadnienie w stwierdzonych faktach, znajomości procesów geologicznych i analogii badanych wcześniej złóż. Można bowiem oczekiwać, że postać semiwariogramu i jego parametry warunkowane są budową geologiczną złoża i znajdują wytłumaczenie w procesach prowadzących do ich powstania (Nieć *et al.* 1988). Znajomość ogólnej zmienności parametrów badanego złoża, jego budowy geologicznej i procesów formujących go winna więc ułatwiać interpretację przebiegu semiwariogramu. W złożach osadowych można przykładowo oczekiwać większej ciągłości zmian parametrów w kierunku zgodnym z ułożeniem warstw, niż w prostopadłym do uwarstwienia.

W praktyce, dla potrzeb weryfikacji wyników geostatystycznego modelowania zmienności stosuje się technikę zwaną oceną krzyżową (*cross validation*). Technika ta polega na szacowaniu metodą kriginu punktowego wartości parametru złożowego w poszczególnych punktach pomiarowych, przy różnych modelach struktury jego zmienności. W technice tej zakłada się, że wartość parametru w ocenianym punkcie nie jest znana i do jej oszacowania wykorzystuje się informacje z najbliższej położonych obserwacji. Weryfikacji wyników dokonuje się przez porównanie różnic między oszacowanymi i stwierdzonymi wartościami, a wielkościami ustalonych błędów kriginu. Porównanie wyników ocen dokonywanych przy różnych modelach semiwariogramów pozwala najczęściej na wybór optymalnego, który najlepiej opisuje strukturę zmienności parametru. Należy jednak pamiętać, że ocena krzyżowa nie daje możliwości weryfikowania dobroci dopasowania semiwariogramów na małych odległościach, mniejszych od najmniejszego rozstawu punktów obserwacyjnych.



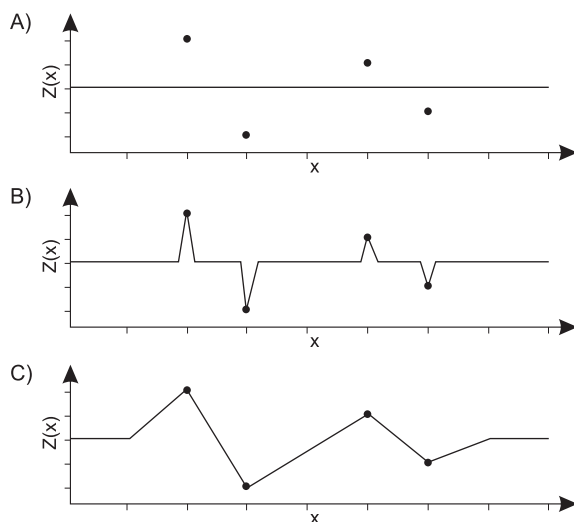
**Fig. 3.** Możliwe warianty interpretacji modelu semiwariogramu parametru. Objasnienia jak do figury 1

**Fig. 3.** Possible variants of semivariogram model interpretation. Explanation as for figure 1

Przedstawiony na figurze 3 przykład ukazuje możliwy zakres błędów popełnianych przy modelowaniu struktury zmienności parametrów złożowych. Wielkość popełnianego błędu jest praktycznie nieznaną z uwagi na brak danych o charakterze zmienności parametrów na małych odległościach. Błąd ten będzie tym większy, im rzadsza będzie sieć rozpoznawcza. Zależy on też od umiejętności i doświadczenia geologa przeprowadzającego interpretację. Przedstawiony na figurze 3 semiwariogram empiryczny można opisać co najmniej dwoma całkowicie różnymi typami modeli:

- 1) modelem losowym,
- 2) modelem z ograniczonym wzrostem o zasięgu odpowiadającym minimalnej odległości między obserwacjami.

Przyjmując model losowy zakładamy, że zróżnicowanie wartości parametru jest czysto losowe i nie obserwuje się autokorelacji między obserwacjami. W modelu drugim przyjmujemy, że zmienność ma charakter nielosowy i występuje autokorelacja na odległościach mniejszych od rozstawu sieci rozpoznawczej. Tak znaczne rozbieżności w ocenie struktury zmienności parametru muszą prowadzić do istotnych różnic w wynikach interpolacji dokonanej procedurą krigingu. Konsekwencją przyjęcia odmiennych modeli semiwariogramów jest różny obraz zróżnicowania wyinterpolowanych wartości parametru (Fig. 4).



**Fig. 4.** Wpływ doboru modelu semiwariogramu na wyniki interpolacji wartości parametru złożowego: A) model losowy (model 1 – Fig. 3), w którym efekt samorodków stanowi wynik błędów pomiaru parametru, B) model losowy (model 1 – Fig. 3), w którym efekt samorodków spowodowany jest lokalną zmiennością parametru, C) model z ograniczonym wzrostem o zasięgu odpowiadającym minimalnej odległości między obserwacjami (model 2 – Fig. 3)

**Fig. 4.** The influence of the choice of the semivariogram model on interpolation results of geological data: A) the pure nugget effect model (model 1 – Fig. 3) if the nugget is interpreted as a measurement error, B) the pure nugget effect model (model 1 – Fig. 3) if the nugget is interpreted as a microstructure with a very small range, C) the model with a sill and with a range that is equal to the minimum data spacing (model 2 – Fig. 3)

W przypadku modelu losowego obraz zróżnicowania wartości parametru będzie zależał od zdefiniowania przyczyny obserwowanej na semiwariogramie wielkości  $C_0$ . Wartość  $C_0$  i jej geneza określane są w danych sterujących programem. Jeśli przyjmiemy w obliczeniach, że efekt samorodków stanowi wyłącznie wynik błędów pomiaru parametru, to wartości interpolowane w węzłach sieci (w oparciu o wszystkie obserwacje w złożu) będą odpowiadać średniej arytmetycznej. Wartości obserwowane w punktach rozpoznawczych będą ignorowane, gdyż według oceny krigingiem wartości parametru w punktach obserwacyjnych odpowiadają również średniej arytmetycznej (Fig. 4A). W przypadku, gdy wielkość  $C_0$  spowodowana jest lokalną zmiennością, to wartości wyinterpolowane w oparciu o wszystkie obserwacje w złożu będą odpowiadać średniej arytmetycznej, jednak wartości obserwowane w punktach rozpoznawczych nie będą ignorowane (Fig. 4B).

W przypadku modelu z ograniczonym wzrostem o zasięgu odpowiadającym minimalnej odległości między obserwacjami, interpolacja prowadzi do uzyskiwania wartości średniej arytmetycznej w węzłach interpolacyjnych oddalonych od punktów pomiarowych więcej niż obserwowany zasięg semiwariogramu. W miarę zbliżania się do punktów pomiarowych interpolowane wartości zdążają do pomierzonych wielkości (Fig. 4C).

## PODSUMOWANIE

Efektywność stosowania procedur krigingu do interpolacji i sporządzania map izoliniowych zależy w znacznym stopniu od wiarygodności przyjmowanych do obliczeń modeli semiwariogramów parametrów złożowych.

Wpływu doboru semiwariogramu na wyniki interpolacji parametrów złożowych dokonywanych metodami geostatystycznymi nie sposób nie doceniać. Brak informacji co do rzeczywistego charakteru zmienności parametrów na małych odległościach, zmusza do interpretowania wielkości zmienności lokalnej na podstawie przebiegu semiwariogramu empirycznego. Prowadzić to może do obniżenia wiarygodności sporządzanych map izolinii. Rzeczywisty obraz zróżnicowania wartości parametru złożowego może nawet znacznie odbiegać od przewidywanego na podstawie opracowanej interpolacyjnej mapy izolinii, zwłaszcza, gdy sporządzana jest ona na podstawie niewielkiej liczby obserwacji w początkowych stadiach rozpoznania złoża.

Wskazuje to na potrzebę głębszego analizowania struktury zmienności parametrów złożowych, a także na konieczność wszechstronnej interpretacji wyników tych badań przed podjęciem obliczeń procedurą krigingu. Modelowanie struktury zmienności parametrów złożowych winno być oparte na znajomości budowy złoża. Powinno ono obejmować szczegółową analizę statystyczną i geostatystyczną danych, uwzględniającą oceną krzyżową, a także badanie zachowania się semiwariogramów przy różnym kroku odległościowym grupowania danych, w celu sprawdzenia stabilności uzyskiwanych funkcji i wybrania optymalnego modelu opisującego zmienność badanego parametru.

*Praca wykonana w ramach badań statutowych AGH nr 11.11.140.562.*

*Praca była prezentowana na Sesji Naukowej organizowanej przez Katedrę Mineralogii, Petrografii i Geochemii pt. „90 lat Katedry Mineralogii, Petrografii i Geochemii w AGH”.*

## LITERATURA

- Mucha J., 2002. Struktura zmienności zawartości Zn i Pb w śląsko-krakowskich złożach rud Zn-Pb. *Studia, Rozprawy, Monografie*, IGSMiE Polskiej Akademii Nauk, Kraków, 108, 1–149.
- Namysłowska-Wilczyńska B., 2006. *Geostatystyka. Teoria i zastosowanie*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, 1–356.
- Nieć M., Mucha J. & Kokesz Z., 1988. Geological background for geostatistical models. *Science de la Terre*, ser. Inf., Nancy, 27, 263–278.