

Joanna Pieczyńska*, Wojciech Puła*

ZASTOSOWANIE LOSOWEJ METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DO ANALIZY LOSOWEJ ZMIENNOŚCI NOŚNOŚCI GRANICZNEJ FUNDAMENTU BEZPOŚREDNIEGO

1. Wprowadzenie

Projektowanie posadowienia bezpośredniego opiera się na badaniu nośności granicznej podłoża. Losowy charakter poszczególnych parametrów stał się podstawą do rozważań nad losową zmiennością nośności. Jedną z metod pozwalającą odnieść się do powyższego problemu jest Losowa Metoda Elementów Skończonych (ang. *The Random Finite Element Method*) (Griffiths i Fenton [6], Fenton i Griffiths [3]) znana, jako RFEM. RFEM jest metodą łączącą teorię pól losowych (por. np. [2]) z deterministyczną metodą elementów skończonych. Uwzględnia ona wartości średnie, odchylenia standardowe a także skale fluktuacji parametrów geotechnicznych występujących w analizowanym problemie. Ponadto parametry losowe są lokalnie uśredniane na obszarze poszczególnych elementów losowych. Zwykle stosuje się ją w połączeniu z metodą Monte Carlo, co w rezultacie prowadzi do oszacowań statystycznych parametrów. Publikacje cytowane powyżej dały początek wielu pracom skupiającym się wokół problemów geotechniki.

W 2001 roku pojawiła się praca Griffithsa i Fentona [7], stosująca RFEM do obliczeń nośności granicznej podłoża idealnie spoiстого o cechach losowych. Natomiast w 2003 roku ci sami autorzy opublikowali pracę [5], dotyczącą gruntów, których wytrzymałość scharakteryzowano się przez spójność i kąt tarcia wewnętrznego.

Do wyznaczenia nośności granicznej podłoża autorzy posłużyli się powszechnie stosowanym wzorem Terzagiego [9]:

$$q_f = cN_c + \bar{q}N_q + \frac{1}{2}\gamma BN_\gamma \quad (1)$$

* Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wroclawska, Wrocław

gdzie:

- q_f — naprężenie graniczne,
- c — kohezja,
- q — naprężenie wywołane obciążeniem gruntu w sąsiedztwie fundamentu (względnie jego zagłębieniem),
- γ — ciężar objętościowy gruntu,
- B — szerokość fundamentu,
- N_c, N_q, N_γ — są współczynnikami nośności.

Dla uproszczenia obliczeń i koncentracji wysiłków na kwestii wpływu losowości parametrów podłoża na nośność, uproszczono wzór (1) do postaci:

$$q_f = cN_c. \quad (2)$$

Równanie to pomija wpływ zagłębienia fundamentu oraz traktuje grunt jako nieważki. Współczynnik nośności N_c ma postać

$$N_c = \frac{e^{\pi \tan \phi} \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) - 1}{\tan \phi}. \quad (3)$$

W oparciu o pracę [5] autorzy postawili sobie trzy cele:

- 1) rozszerzenie koncepcji i obliczeń na przypadek anizotropowych pól losowych parametrów wytrzymałościowych podłoża, co realizowano, poprzez przyjęcie różnych wartości skali fluktuacji, w kierunkach poziomym i pionowym (w pracy [5] przedstawiono przypadek izotropowy — jednakowa skala fluktuacji we wszystkich kierunkach);
- 2) weryfikację koncepcji tzw. najgorszego przypadku, czyli stwierdzenia, że w każdej sytuacji daje się wyznaczyć pewną charakterystyczną wartość skali fluktuacji, przy której otrzymuje się najbardziej konserwatywne oszacowanie nośności granicznej;
- 3) wykonanie obliczeń przy różnych wartościach współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego.

2. Losowy model podłoża

Losowy model podłoża przyjęto według propozycji Griffithsa i Fentona [5]. Zakłada on opis parametrów wytrzymałościowych podłoża, pod fundamentem, za pomocą dwuwymiarowych pól losowych, z zastosowaniem lokalnych uśrednień [2]. I tak, pole spójności przyjęto jako lognormalne z wartością średnią μ_c , odchyleniem standardowym σ_c oraz skal fluktuacji (patrz np. [8]) $\theta_{(\ln c)_y}$ i $\theta_{(\ln c)_x}$ w kierunkach, odpowiednio, pionowym i poziomym.

W stosunku do propozycji Fentona i Griffithsa ([5]) stanowi to odejście od założenia pełnej izotropii pola, poprzez zróżnicowanie wartości skal fluktuacji w kierunku poziomym i pionowym. Lognormalne pole losowe można otrzymać z normalnego pola losowego $G_{\ln c}(x)$, o zerowej średniej i jednostkowej wariancji oraz skali fluktuacji $\theta_{\ln c}$, poprzez zastosowanie następującej transformacji:

$$c(\mathbf{x}) = \exp\{\mu_{\ln c} + \sigma_{\ln c} G_{\ln c}(\mathbf{x})\}. \quad (4)$$

Parametry $\mu_{\ln c}$ oraz $\sigma_{\ln c}$ otrzymuje się jako funkcje wartości średniej i odchylenia standardowego spójności c , a mianowicie:

$$\sigma_{\ln c}^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\mu_c^2}\right), \quad (5)$$

$$\mu_{\ln c} = \ln \mu_c - \frac{1}{2} \sigma_{\ln c}^2. \quad (6)$$

Takie podejście jest bardzo wygodne, ze względu na stosowaną dalej metodę Monte Carlo, gdyż istnieje wiele skutecznych metod generowania pól gaussowskich. Po wygenerowaniu realizacji pola gaussowskiego, przechodzi się do realizacji pola spójności poprzez zastosowanie transformacji (4). Strukturę korelacyjną w polu $G_{\ln c}(x)$ określa funkcja korelacji, której parametrem są skale fluktuacji $\theta_{(\ln c)y}$ i $\theta_{(\ln c)x}$. W ramach tej pracy przyjęto funkcję korelacji postaci:

$$\rho_{\ln c} = \exp\left(-\frac{2|\tau_1|}{\theta_{(\ln c)y}}\right) \exp\left(-\frac{2|\tau_2|}{\theta_{(\ln c)x}}\right), \quad (7)$$

gdzie $\tau_1 = y_2 - y_1$ oraz $\tau_2 = x_2 - x_1$, przy czym $x_2 - x_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, która pozwala na uwzględnienie anizotropowych własności pola (tej możliwości nie dawała funkcja stosowana w pracy [5]). Należy też zauważyć, że wskazana funkcja korelacji działa w gaussowskim polu losowym $\ln c$. Wartości $\theta_{(\ln c)y}$ i $\theta_{(\ln c)x}$ wyznacza się na podstawie θ_{cy} i θ_{cx} . Te ostatnie należy określić w wyniku badań podłoża, zaś sposób przeliczenia podany został w pracy Fentona [4].

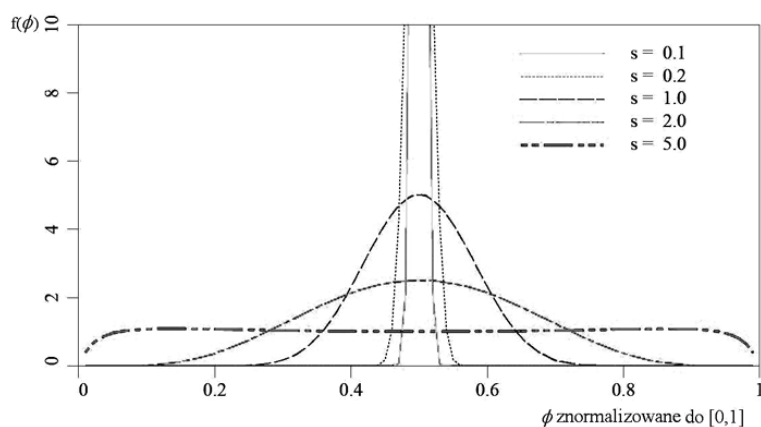
Drugim polem losowym rozpatrywanym w zadaniu jest pole kąta tarcia wewnętrznego. Ponieważ wartości kąta zmieniają się w ograniczonym przedziale, przeto ani rozkład normalny, ani rozkład lognormalny nie są tu odpowiednie.

Za pracą [5] przyjęto pole o ograniczonych rozkładach, otrzymane ze standardowego pola gaussowskiego $G_\phi(x)$, za pomocą następującej transformacji:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_{\min} + \frac{1}{2}(\phi_{\max} - \phi_{\min}) \left\{ 1 + \tanh\left(\frac{s G_\phi(\mathbf{x})}{2\pi}\right) \right\} \quad (8)$$

gdzie ϕ_{\min} oraz ϕ_{\max} są odpowiednio minimalną i maksymalną wartością kąta tarcia wewnętrznego, zaś s jest parametrem skali zależnym od odchylenia standardowego.

Na rysunku 1 pokazano kształt funkcji gęstości takiego rozkładu (znormalizowanego do przedziału $[0,1]$) w zależności od zmiany parametru s . Dla wartości s większych niż 5 gęstość rozkładu upodabnia się do litery U i ten przypadek jest nierealistyczny z fizycznego punktu widzenia. Łatwo zauważyć, że rozkłady tego typu są zbliżone do rozkładów beta, jednak są one o wiele łatwiejsze do numerycznego generowania, ze względu na zastosowanie rozkładu gaussowskiego. Wartość średnia tego rozkładu znajduje się w środku przedziału $[\phi_{\min}, \phi_{\max}]$.



Rys. 1. Ograniczony rozkład kąta tarcia wewnętrznego ϕ
(rysunek sporządzony na podstawie pracy [5])

Zależność pomiędzy odchyleniem standardowym a parametrem s nie ma postaci analitycznej. Można ją uzyskać na drodze całkowania numerycznego lub poprzez przybliżenie pierwszego rzędu, co prowadzi do zależności:

$$\sigma_{\phi} \approx \frac{1}{2}(\phi_{\max} - \phi_{\min}) \frac{2s}{\pi(\exp(2\phi_0) + \exp(-2\phi_0) + 2)} \quad (9)$$

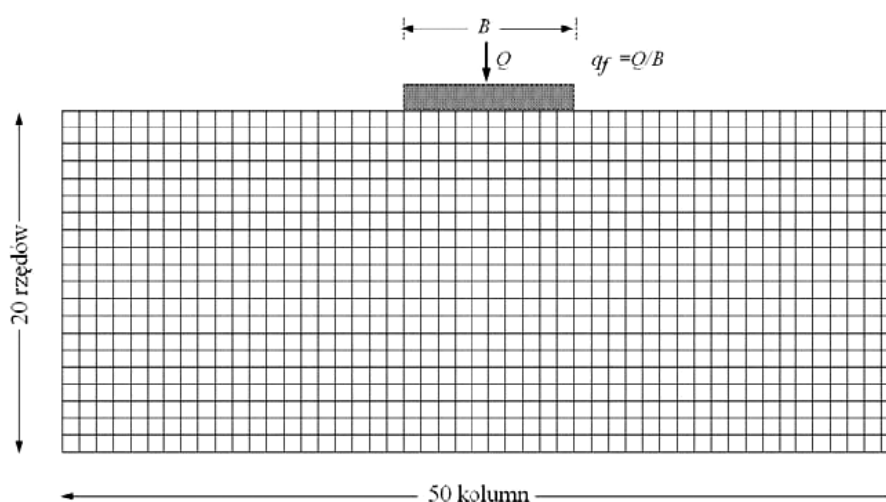
gdzie ϕ_0 jest wartością średnią kąta tarcia wewnętrznego. Funkcje korelacji oraz wartości skal fluktuacji przyjęto takie jak w przypadku spójności.

3. Obliczenia numeryczne

Na wstępie badań wykonano serię analiz, na podstawie których określono wymaganą dokładność obliczeń. W tym celu wykorzystano schemat pokazany na rysunku 2 oraz wartości średnie losowych parametrów gruntu. Otrzymane wyniki porównano ze wzorem na noś-

ność graniczną, wyznaczonym korzystając ze wzorów (2) i (3). Następnie przeprowadzono symulację obliczeniową zmieniając ilość realizacji. W pierwszej kolejności wykonano symulację Monte Carlo opartą na 1000 realizacji, która stała się punktem porównawczym. Następnie zmniejszono tę ilość starając się uzyskać najbardziej zbliżony wynik. W rezultacie, jako optymalną przyjęto ilość 300 realizacji. Jest to liczba wystarczająca do określenia pierwszych dwóch momentów. Wykorzystując powyższe założenie przeprowadzono analizy nośności granicznej opisane w artykule. Jednocześnie należy zaznaczyć, że aby określić rozkład należy przyjmować wyniki otrzymane z minimum 1000 realizacji lub więcej.

Przyjęto siatkę o wymiarach 50 kolumn, 20 rzędów. Wymiar pojedynczego element przyjęto $0,1 \times 0,1$ m. Natomiast szerokość fundamentu 1 m równą 10 elementom siatki. Model podłoża przyjęto zgodnie z opisem podanym w poprzednim punkcie. Wartość średnia spójności wynosiła $\mu_c = 45 \text{ kN/m}^2$, odchylenie standardowe $\sigma_c = 9 \text{ kN/m}^2$ (pole lognormalne). W przypadku kąta tarcia wewnętrznego przyjęto rozkład ograniczony zdefiniowany wzorem (8) o granicy dolnej równej $\phi_{\min} = 5^\circ$, granicy górnej $\phi_{\max} = 41^\circ$, co dało wartość średnią kąta tarcia wewnętrznego $\mu_\phi = 23^\circ$. Parametr s wyliczano na podstawie zmieniającego się odchylenia standardowego σ_ϕ , stosując przybliżony wzór (9).



Rys. 2. Model siatki użyty w stochastycznych obliczeniach nośności granicznej (rysunek sporządzony na podstawie pracy za [6])

Jako wielkości stałe (deterministyczne) przyjęto Moduł Younga równy $E = 100\,000 \text{ kN/m}^2$, współczynnik Poissona równy $\nu = 0,3$ oraz kąt dylatacji równy $\psi = 0$. Parametry sprężyste podłoża, służyły do analizy wstępnych sprężystych odkształceń, nie miały natomiast wpływu na wartości nośności granicznej.

Wyniki umieszczone w powyższej tabeli 1 przedstawiają obliczenia nośności granicznej podłoża gruntowego przy zmieniającej się skali fluktuacji. W kierunku pionowym θ_y ,

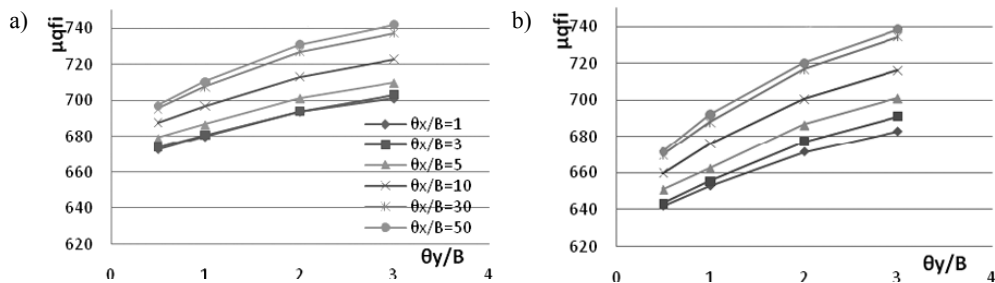
wartości skali przyjmowano 0,5; 1; 2; 3 m, skalę poziomą θ_x przyjmowano 1; 3; 5; 10; 30; 50 m. Zgodnie z założeniem przyjętym w punkcie 2 skale fluktuacji dla spójności i kąta są jednakowe.

TABELA 1''
Wyniki obliczeń w programie RFEM

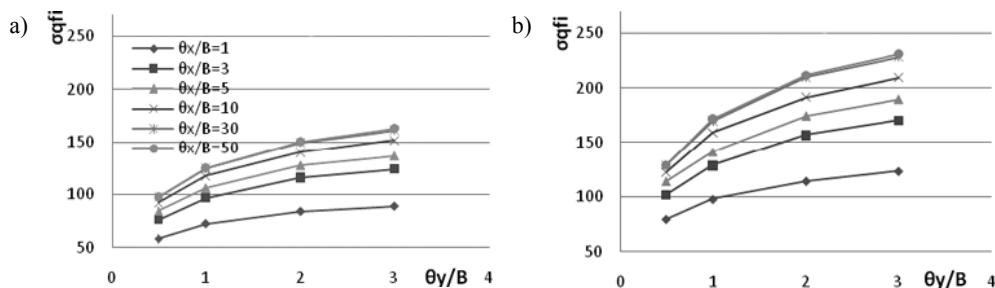
		C.O.V.Φ 0.10			C.O.V.Φ 0.15			C.O.V.Φ 0.20			C.O.V.Φ 0.25		
		s	σΦ [kN/m ²]	σΦ [kN/m ²]	s	σΦ [kN/m ²]	σΦ [kN/m ²]	s	σΦ [kN/m ²]	σΦ [kN/m ²]	s	σΦ [kN/m ²]	
θ _x	θ _y	μq _f	σq _f	σq _f /μq _f	μq _f	σq _f	σq _f /μq _f	μq _f	σq _f	σq _f /μq _f	μq _f	σq _f	σq _f /μq _f
1	0.5	672.278	58.266	0.087	657.252	69.384	0.106	642.016	79.558	0.124	626.832	88.743	0.142
	1	679.660	72.520	0.107	666.665	85.518	0.128	653.006	97.893	0.150	639.878	109.516	0.171
	2	693.918	84.035	0.121	683.095	99.434	0.146	671.732	114.509	0.170	662.847	128.117	0.193
3	0.5	701.208	88.958	0.127	692.480	106.720	0.154	683.089	123.635	0.181	674.037	139.433	0.207
	1	673.874	76.365	0.113	659.010	89.301	0.136	643.597	102.302	0.159	628.194	114.221	0.182
	2	690.952	96.491	0.142	668.431	112.965	0.169	655.565	128.970	0.197	643.333	144.468	0.225
5	0.5	703.322	123.833	0.176	696.706	147.022	0.211	690.839	170.576	0.247	685.543	193.209	0.282
	1	679.304	84.865	0.125	665.942	99.340	0.149	651.094	114.196	0.175	635.986	126.741	0.199
	2	686.561	106.461	0.155	674.934	123.385	0.183	662.597	141.293	0.213	651.559	159.263	0.244
10	0.5	701.239	127.953	0.182	694.174	150.395	0.217	686.566	174.727	0.254	679.987	197.647	0.291
	1	709.748	136.934	0.193	705.219	162.441	0.230	701.155	189.957	0.271	697.369	215.771	0.309
	2	687.796	92.551	0.135	674.959	108.170	0.160	659.898	122.872	0.186	645.829	136.876	0.212
30	0.5	696.920	117.514	0.169	687.524	138.477	0.201	676.204	159.128	0.235	665.094	178.930	0.269
	1	713.233	140.394	0.197	707.125	165.078	0.233	700.707	191.689	0.274	695.036	218.381	0.314
	2	722.828	151.710	0.210	719.121	179.751	0.250	716.214	209.276	0.292	714.800	240.672	0.337
50	0.5	695.570	97.804	0.141	684.021	113.132	0.165	669.990	129.243	0.193	655.259	143.675	0.219
	1	707.481	124.502	0.176	698.525	146.795	0.210	687.791	169.870	0.247	678.030	194.150	0.286
	2	727.040	149.535	0.206	721.560	178.132	0.247	716.735	209.982	0.293	712.080	240.287	0.337
	0.5	737.326	160.846	0.218	735.563	192.977	0.262	734.184	228.394	0.311	732.908	263.945	0.360
	1	697.042	97.785	0.140	685.514	113.021	0.165	671.818	129.159	0.192	657.455	143.987	0.219
	2	710.095	124.898	0.176	701.683	147.565	0.210	692.081	171.484	0.248	681.733	194.353	0.285
	3	730.793	150.600	0.206	725.236	179.741	0.248	720.134	211.545	0.294	715.372	241.772	0.338
	3	741.708	162.891	0.220	739.506	195.314	0.264	738.299	230.715	0.312	738.015	266.560	0.361

Załączone powyżej wykresy przedstawiają zmiany wartości średniej (rys. 3), odchylenia standardowego (rys. 4) oraz współczynnika zmienności (rys. 5) nośności granicznej podłoża, w zależności od pionowej skali fluktuacji dla różnych skal poziomych.

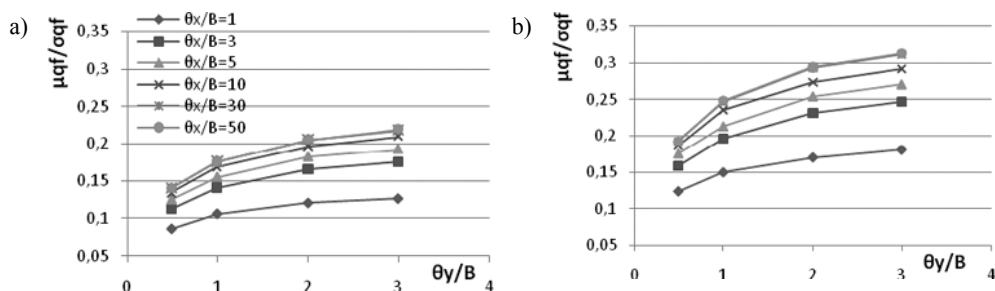
Przedstawione wyniki pokazują, że uwzględnienie anizotropii poprzez zróżnicowanie wartości pionowej i poziomej skali fluktuacji, ma istotny wpływ na oszacowanie losowych zmian nośności granicznej. Przy niewielkiej wartości współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego (10%), zmiany wartości średniej nośności q_f są także niewielkie (maksymalnie ok. 7,5%), a wzrost współczynnika zmienności kąta ϕ do 20% implikuje wzrost wahania q_f do 15%. Należy zwrócić uwagę na fakt, że odchylenia standardowe i współczynniki zmienności nośności q_f (rys. 4 i 5) zmieniają się istotnie wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji θ_x . Punktem odniesienia może być wartość $\theta_y/B = 3$, przy której wzrost stosunku, θ_x/B powyżej wartości 3 ($\theta_y/B = \theta_x/B$ to przypadek izotropowy), skutkuje znacznym wzrostem odchylenia standardowego i współczynnika zmienności nośności. Ponieważ w warunkach naturalnych obserwuje się dużo większe wartości skali fluktuacji w kierunku poziomym w stosunku do kierunku pionowego [1], zatem przyjmowanie przypadku izotropowego, powoduje zaniżenie wartości współczynnika zmienności nośności podłoża. Dla wartości $\theta_x/B > 10$ przyrost wariancji oraz współczynnika zmienności jest już coraz mniejszy.



Rys. 3. Wykres wartości średnich nośności granicznej dla różnych poziomych skal fluktuacji: a) dla współczynnika zmienności kąta ϕ równego 0,1; b) dla współczynnika zmienności kąta ϕ równego 0,2

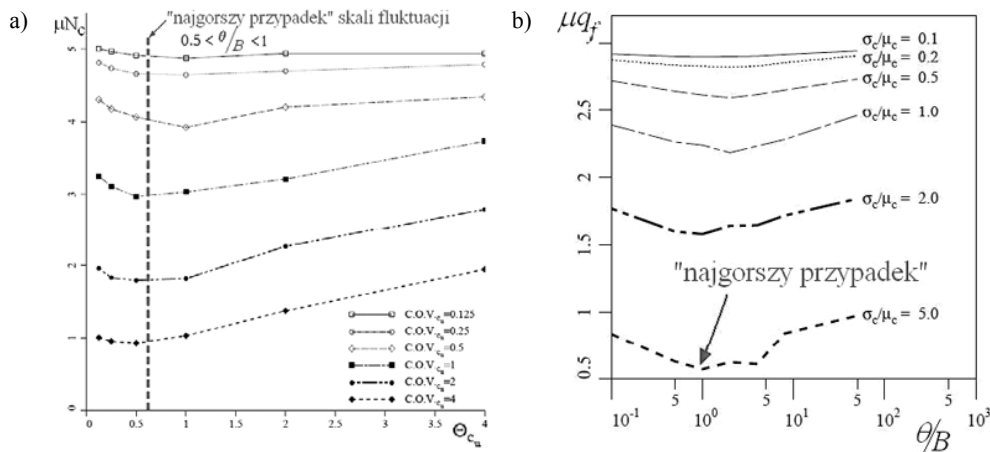


Rys. 4. Wykres odchylenia standardowego nośności granicznej dla różnych poziomych skal fluktuacji: a) dla współczynnika zmienności kąta ϕ równego 0,1; b) dla współczynnika zmienności kąta ϕ równego 0,2



Rys. 5. Wykres współczynnika zmienności nośności granicznej dla różnych poziomych skal fluktuacji: a) dla współczynnika zmienności kąta ϕ równego 0,1; b) dla współczynnika zmienności kąta ϕ równego 0,2

Analizując przypadki izotropowe, $\theta_y/B = \theta_x/B$, autorzy prac [5] i [6] wskazali na efekt tzw. „najgorszego przypadku” wartości skali fluktuacji. Efekt ten pokazano na rysunku 6.



Rys. 6. Ilustracja efektu „najgorszego przypadku”: a) zależności wartości średniego współczynnika N_c od wartości skali fluktuacji θ_c (rysunek sporządzony na podstawie pracy [7]), b) średniej wartości nośności od θ/B (rysunek sporządzony na podstawie pracy [5])

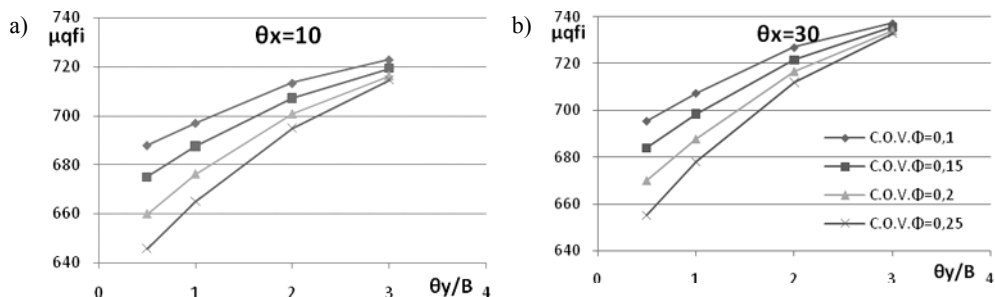
Na rysunku 6b pokazano wykres średniej wartości zmiennej losowej $\ln M_c$, przy czym M_c jest wartością średnią nośności odniesioną do średniej wartości spójności, czyli:

$$M_c = \frac{q_f}{\mu_c} = \frac{c}{\mu_c} N_c \quad (10)$$

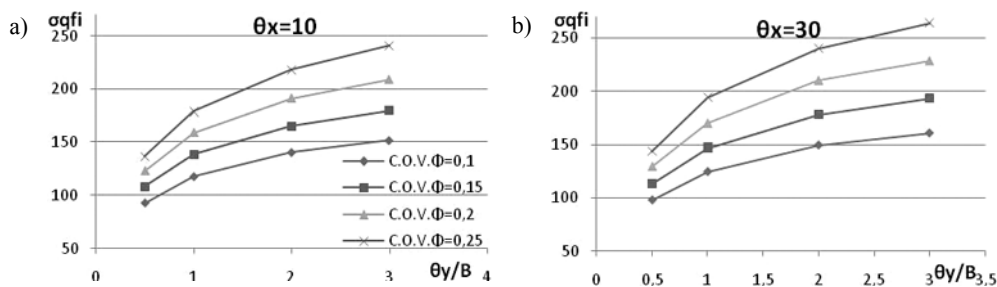
W obu przypadkach (rys. 6) zaobserwowano wartość skali fluktuacji, przy której średnie mają minima. Minima te są zlokalizowane w zbliżonych do siebie punktach pomimo różnych wartości współczynnika zmienności zmiennej losowej c . Obecność tych minimów autorzy uznali za ważną informację, która pozwoliłaby przyjmować określone wartości skali fluktuacji. Miało by to miejsce w przypadkach, gdy brak jest odpowiednich wyników badań polowych do określenia skal. Takie podejście ma jednak tę wadę, że o wiele istotniejsze z punktu widzenia oszacowania bezpieczeństwa są wartości odchyłeń standardowych i współczynników zmienności nośności granicznej podłoża, a takich analiz w pracach [5] i [6] nie przedstawiono.

Analiza rysunków 3, 4 i 5 nie daje podstaw do konkluzji, że efekt „najgorszej wartości” występuje. Zdaniem autorów obecnej pracy efektu tego nie zaobserwowano (nawet dla średnich — rys. 3), gdyż zmianie podlegały niezależnie obie skale fluktuacji (efekt anizotropii). Jest też możliwe, że efekt taki może się uwidaczniać tylko w określonych warunkach gruntowych (grunty o bardzo dużej spójności), a w innych warunkach — nie. Należy też zwrócić uwagę (rys. 6), że efekt ten jest „silny” dla dużych wartości współczynnika zmienności. Dla współczynników zmienności parametrów podłoża realnych w warunkach naturalnych (takie stosowano w prezentowanych tu obliczeniach) był on już znacznie mniejszy (por. wartości C.O.V. $c < 0,5$ oraz $\sigma_c/\mu_c > 0,5$ na rys. 6).

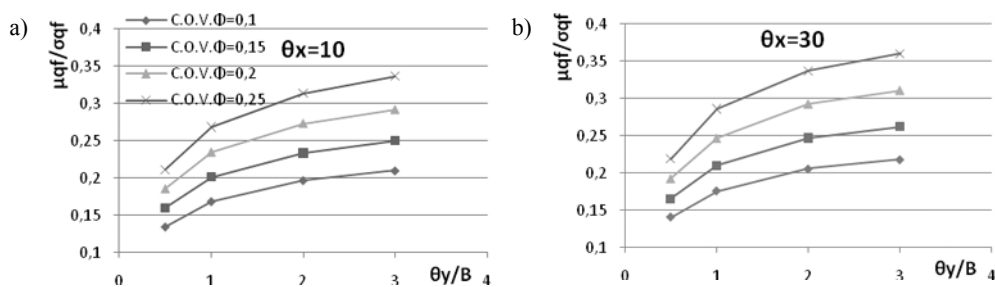
Rysunki 7, 8 i 9 pokazują wpływ zmian, wartości współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego podłoża, na losowe wahania nośności.



Rys. 7. Wykres wartości średniej nośności granicznej dla różnych współczynników zmienności kąta ϕ : a) dla poziomej skali fluktuacji równej dziesięciokrotności szerokości fundamentu; b) dla poziomej skali fluktuacji równej trzydziestokrotności szerokości fundamentu



Rys. 8. Wykres odchylenia standardowego nośności granicznej dla różnych współczynników zmienności kąta ϕ : a) dla poziomej skali fluktuacji równej dziesięciokrotności szerokości fundamentu; b) dla poziomej skali fluktuacji równej trzydziestokrotności szerokości fundamentu



Rys. 9. Wykres współczynnika zmienności nośności granicznej dla różnych współczynników zmienności kąta ϕ : a) dla poziomej skali fluktuacji równej dziesięciokrotności szerokości fundamentu; b) dla poziomej skali fluktuacji równej trzydziestokrotności szerokości fundamentu

Ponieważ w warunkach naturalnych obserwuje się dużo większe wartości skali fluktuacji w kierunku poziomym niż w stosunku do kierunku pionowego [1], zatem efekt zmian, współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego, przedstawiono przyjmując poziomą skalę $\theta_x = 10$ m oraz i dla skali poziomej $\theta_x = 30$ m.

Jak łatwo zauważyć współczynnik zmienności kąta tarcia wewnętrznego ma bardzo duży wpływ na wartości odchyień standardowych i współczynników zmienności nośności podłoża. Odchylenia standardowe rosną wraz ze wzrostem pionowej skali fluktuacji. Jest to konsekwencja faktu, że jeśli wartość skali fluktuacji rośnie w stosunku do wielkości obszaru uśrednienia, to redukcja wariancji w uśrednionym polu jest coraz słabsza (por. np. [8]). Warto też odnotować, że przy wartości θ_x/B ok. 3 wielkość współczynnika zmienności kąta tarcia wewnętrznego nie ma już wpływu na wartość średnią nośności.

4. Uwagi końcowe

Podsumowując przeprowadzone analizy numeryczne należy stwierdzić, że podstawową zaletą metody RFEM jest możliwość efektywnej implementacji stochastycznych pól losowych parametrów wytrzymałościowych podłoża, z uwzględnieniem efektu lokalnych uśrednień. Pozwala to na analizę zmienności losowej nośności granicznej, bez przyjmowania dużych uproszczeń modelowych, a więc analizę w warunkach zbliżonych do naturalnych. Wydaje się jednak, że uproszczenie polegające na przyjęciu izotropowego modelu zmian losowych pola nie powinno być stosowane. Podobnie — efekt „najgorszego przypadku” wydaje się być efektem występującym tylko w warunkach izotropowych lub w bardzo szczególnych przypadkach. Tak, więc rzetelna informacja na temat współczynników zmienności parametrów wytrzymałościowych oraz skal fluktuacji jest konieczna, jeśli przeprowadzane analizy mają służyć do celów oceny bezpieczeństwa fundamentów. Ponieważ badanie skali fluktuacji, w kierunku poziomym jest najczęściej kłopotliwe, przeto pewnym uproszczeniem, wynikającym z podanych tu rezultatów, może być przyjęcie poziomej skali fluktuacji θ_x/B na poziomie 10 lub nieco większym. Prowadzi to do raczej konserwatywnych oszacowań.

LITERATURA

- [1] *Cherubini C.*: Data and considerations on the variability of geotechnical properties of soils. Proceedings of the Int. Conf. on Safety and Reliability (ESREL), t. 97, nr 2, 1997, s. 1583–1591
- [2] *Fenton G.A., Vanmarcke E.H.*: Simulation of Random Fields via Local Average Subdivision, ASCE Journal of Engineering Mechanics, 116(8), 1990, s. 1733–1749
- [3] *Fenton G.A., Griffiths D.V.*: Statistics of Block conductivity through a Simple bounded stochastic medium. Water Resour Res, t. 29, nr 6, 1993, s. 1825–1830
- [4] *Fenton G.A.*: Estimation for stochastic soil models. ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, t. 125, nr 6, 1999, s. 470–485
- [5] *Fenton G.A., Griffiths D.V.*: Bearing capacity prediction of spatially random $c - \phi$ soils. Canadian Geotechnical Journal, t. 40, nr 1, 2003, s. 54–65
- [6] *Griffiths D.V., Fenton G.A.*: Seepage beneath water retaining structures founded on spatially random soil. Géotechnique, t. 43, nr 4, 1993, s. 577–587

- [7] *Griffiths D.V., Fenton G.A.*: Bearing capacity of spatially random soil: The undrained clay Prandtl problem revisited. *Géotechnique*, t. 54, nr 4, 2001, s. 351–359
- [8] *Pula W.*: Zastosowania teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa fundamentów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2004
- [9] *Terzaghi K.*: *Theoretical Soil Mechanics*. New York, John Wiley & Sons 1943