Górnictwo i Geoinżynieria • Rok 33 • Zeszyt 1 • 2009

*Jan Gaszyński**

MIESZANY PROBLEM POCZĄTKOWO-BRZEGOWY W TEORII TERMOKONSOLIDACJI. ZAGADNIENIE POCZĄTKOWE

1. Wstęp

Analiza stanów naprężenia i odkształcenia w gruncie pozostaje ciągle jednym z najczęściej podejmowanych tematów, zarówno w badaniach eksperymentalnych, jak i rozważaniach teoretycznych. Zakres tej tematyki jest bardzo obszerny. Ruch ciepła w gruncie powoduje zmiany jego temperatury, mające wpływ na stan naprężeń. Rezultatem tego są odkształcenia mogące mieć wpływ na obiekty posadowione na gruncie. W pracy analizowane są stany naprężeń i deformacji półprzestrzeni gruntowej (traktowanej jako porowaty ośrodek nasycony cieczą), wywołane obciążeniem zewnętrznym. Obciążenie to jest przekazywane przez sztywny fundament kołowy posadowiony na brzegu półprzestrzeni gruntowej. Do rozwiązania zadania przyjęto model termokonsolidacji [1, 2, 7, 8], bazujący na sprzężeniu pól naprężeń w szkielecie, ciśnienia wody w porach oraz pola temperatury. W szczególności zostały wyznaczone naprężenia w strefie kontaktu oraz osiadania fundamentu w chwili początkowej procesu konsolidacji.

2. Równania termokonsolidacji

Rozważana jest konsolidująca półprzestrzeń gruntu. Proces konsolidacji wywołuje sztywny kołowy fundament o promieniu r_0, wciskany w grunt znaną siłą P. Wpływ na proces deformacji ma także pole temperatury, która w chwili początkowej ma określony rozkład. Przyjmuje się, że w szkielecie gruntowym i cieczy określone jest pole temperatury, mające wpływ na stany naprężeń, a tym samym na proces konsolidacji. Zakłada się, że pola naprężeń w szkielecie, ciśnień w cieczy i temperatury są ze sobą sprzężone, a sposób tego sprzężenia opisuje model termokonsolidacji [7, 8]. Półprzestrzeń materialna opisywana jest wal-

* Instytut Geotechniki, Politechnika Krakowska, Kraków

cowym układem współrzędnych (r, φ, z), właściwym dla zadań osiowo-symetrycznych. Czas jest oznaczany symbolem t.

Stan procesu opisują następujące funkcje:

- w — przemieszczenie w kierunku z, prostopadłym do brzegu (osiadanie);
- u — przemieszczenie w kierunku radialnym $\{r\}$;
- σ_z — naprężenie normalne w kierunku osi z, w szkielecie;
- σ_{rz} — naprężenie styczne w szkielecie;
- σ — ciśnienie cieczy w porach;
- ϑ — zmiana temperatura wywołana procesem konsolidacji ($\vartheta = T - T_0$);
- T — temperatura bezwzględna w chwili t, T_0 — w chwili początkowej t_0.

W osiowo symetrycznym stanie deformacji (niezależność wszystkich funkcji od kąta obrotu φ) równania tego modelu mają postać:

$$
\begin{aligned}
&N\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)u + (M+N)\varepsilon,_r + \frac{H}{R}\sigma,_r - \frac{E}{T_0}b_3\vartheta,_r = 0 \\
&N\Delta w + (M+N)\varepsilon,_z + \frac{H}{R}\sigma,_z - \frac{E}{T_0}b_3\vartheta,_z = 0 \\
&\Delta\sigma = \frac{1}{kR}\dot{\sigma} - \frac{H}{kR}\dot{\varepsilon} + \frac{E}{kRT_0}b_2\dot{\vartheta} \\
&\Delta\vartheta = \left(b_0 + \frac{E}{R}b_2^2\right)\frac{E}{\lambda_T T_0}\dot{\vartheta} + \frac{E}{\lambda_T}b_3\dot{\varepsilon} + \frac{E}{R\lambda_T}b_2\dot{\sigma}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Występują tu operatory różniczkowania:

$$
\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \dot{(\cdot)} = \frac{\partial}{\partial t}
$$

Związki geometryczne:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\
&\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \qquad \varepsilon_{r\varphi} = 0, \qquad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Związki fizyczne zapiszemy w postaci:

$$\sigma_z = 2N\varepsilon_z + M\varepsilon + \frac{Q}{R}\sigma - \frac{E}{T_0}b_3\vartheta$$

$$\sigma_{rz} = 2N\varepsilon_{rz} \tag{3$_{1,2}$}$$

$$\sigma_\varphi = 2N\varepsilon_\varphi + M\varepsilon + \frac{Q}{R}\sigma - \frac{E}{T_0}b_3\vartheta$$

$$\sigma_{r\varphi} = 0 \tag{3$_{3,4}$}$$

W równaniach (1), (2) występują parametry materiałowe ośrodka:

- A, N, Q, R — stałe Biota;
- k — współczynnik przepuszczalności;
- λ_T — współczynnik przewodnictwa cieplnego;
- $\alpha_T^s, \alpha_T^c, \alpha_T^{sc}$ — współczynniki liniowej rozszerzalności cieplnej szkieletu, cieczy oraz wpływu rozszerzalności cieplnej szkieletu na wydatek cieczy i odwrotnie;
- ρ, c_v — gęstość właściwa i ciepło właściwe ośrodka.

Tutaj i dalej przyjęto oznaczenia:

$$H = Q + R, \qquad M = A - \frac{Q^2}{R}, \qquad E = 2N + M,$$

$$K = A + \frac{2}{3}N, \qquad B = \frac{E \cdot R^2}{E \cdot R + H^2},$$

$$b_0 = \rho \cdot c_v \frac{T_0}{E} \qquad b_1 = \left(3K\alpha_T^s + Q\alpha_T^{sc}\right)\frac{T_0}{E} \qquad b_2 = \left(Q\alpha_T^{sc} + R\alpha_T^c\right)\frac{T_0}{E}$$

$$b_3 = b_1 - \frac{Q}{R}b_2, \qquad b_4 = \frac{E}{R}b_2 - \frac{H}{R}b_3, \qquad b_5 = b_0 + \frac{E}{R}b_2^2 + b_3^2, \tag{4}$$

$$A_\sigma = \frac{H^2}{R}, \qquad A_\vartheta = \frac{E}{R^2}\left(Hb_2 + Rb_3\right)^2\frac{1}{b_0}, \qquad D = A_\sigma + A_\vartheta,$$

$$B_q = \left[M + \frac{H^2}{R} + \frac{E}{R}\left(\frac{H}{R}\frac{b_2}{b_0} + \frac{b_3}{b_0}\right)\left(Hb_2 + Rb_3\right)\right]\frac{E + D}{N}$$

Rozwiązane zostanie zadanie konsolidacji półprzestrzeni porowatej wywołanej wciskaniem kołowego sztywnego stempla obciążonego siłą P.

Przyjmując poprzednio przyjęte założenia o obciążeniu półprzestrzeni oraz, że na jej górnym brzegu jest znane ciśnienie σ_0 oraz temperatura ϑ_0, zapiszemy warunki brzegowe w postaci:

$$
\begin{aligned}
& w = w_0, && r < r_0 \\
& \sigma_z + \sigma = 0, && r > r_0 \\
& \sigma_{rz} = 0, && r > 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
& 2\pi \int_0^{r_0} \left(\sigma_z + \sigma\right) r \mathrm{d}r = -P(t) \\
& \sigma = \sigma_0, \qquad r > 0 \\
& \vartheta = \vartheta_0, \qquad r > 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Warunki początkowe

Uwzględniając właściwości układu równań (1), zapiszemy warunki początkowe w postaci (4), (5), (7):

$$
\begin{aligned}
& N\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)u^0 + \left(M + N\right)\varepsilon^0{,}_r + \frac{H}{R}\sigma^0{,}_r - \frac{E}{T_0}b_3\vartheta^0{,}_r = 0 \\
& N\Delta w^0 + \left(M + N\right)\varepsilon^0{,}_z + \frac{H}{R}\sigma^0{,}_z - \frac{E}{T_0}b_3\vartheta^0{,}_z = 0
\end{aligned}
\tag{7$_{1,2}$}
$$

$$
\begin{aligned}
& \sigma^0 - H\varepsilon^0 + \frac{E}{T_0}b_2\vartheta^0 = 0 \\
& \left(b_0 + \frac{E}{R}b_2^2\right)\frac{1}{T_0}\vartheta^0 + b_3\varepsilon^0 + \frac{1}{R}b_2\sigma^0 = 0
\end{aligned}
\tag{7$_{3,4}$}
$$

Warunki początkowe mają postać równań różniczkowych cząstkowych dla poszukiwanych funkcji przemieszczeń.

Odpowiednie dla nich warunki brzegowe, wynikające z (5) mają postać:

$$
\begin{aligned}
&w^0 = w_0^0, && r < r_0 \\
&\sigma_z^0 + \sigma^0 = 0, && r > r \\
&\sigma_{rz}^0 = 0, && r > 0 \\
&2\pi \int_0^{r_o} \left(\sigma_z^0 + \sigma^0\right) r dr = -P^0 &&
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Tutaj i dalej oznaczono wartości funkcji w chwili początkowej górnym indeksem 0. Tak sformułowane zagadnienie początkowo brzegowe stanowi podstawę do konstrukcji rozwiązania zadania.

3. Rozwiązanie zadania dla warunku początkowego

Przed przystąpieniem do rozwiązania zadania dla dowolnej chwili czasu ($t > 0$) (gdzie często jest wykorzystywana transformacja Laplace'a [3]), należy rozwiązać zadanie brzegowe dla chwili początkowej ($t = 0$). Zadanie to, jest opisane równaniami (7) z warunkami brzegowymi (8). Jest to mieszany układ równań różniczkowych i algebraicznych. Dokonujemy przekształcenia układu równań poprzez wyeliminowanie z równań $(4)_{1,\,2}$ funkcji: σ^0 i ϑ^0 za pomocą równań $(4)_{3,\,4}$. Mamy więc:

$$\vartheta^0 = -\frac{Hb_2 + Rb_3}{Rb_0} T_0 \varepsilon^0 \tag*{(9)1}$$

$$\sigma^0 = \left[H + \frac{E}{R}\frac{b_2}{b_0}\left(Hb_2 + Rb_3\right) \right] \varepsilon^0 \tag*{$(9)_2$}$$

i po wstawieniu do $(4)_{1,\,2}$:

$$N\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)u^0 + \left(M + N + D\right)\varepsilon,_r^0 = 0 \tag*{$(10)_1$}$$

$$N\Delta w^0 + \left(M + N + D\right)\varepsilon,_z^0 = 0 \tag*{$(10)_2$}$$

O sposobie rozwiązania decydują właściwości równań różniczkowych. Do rozwiązania zadania wykorzystamy transformację Hankela, zdefiniowaną związkami:

$$\left(\overline{w},\overline{\sigma}_z,\overline{\sigma},\overline{\vartheta}\right)=\int_0^\infty\left(w,\sigma_z,\sigma,\vartheta\right)rJ_0\left(\omega r\right)\mathrm{d}r,$$

$$\left(\overline{u},\overline{\sigma}_{rz}\right)=\int_0^\infty\left(u,\sigma_{rz}\right)rJ_1\left(\omega r\right)\mathrm{d}r \tag{11$_1$}$$

$$\left(w,\sigma_z,\sigma,\vartheta\right)=\int_0^\infty\left(\overline{w},\overline{\sigma}_z,\overline{\sigma},\overline{\vartheta}\right)\omega J_0\left(\omega r\right)\mathrm{d}\omega,$$

$$\left(u,\sigma_{rz}\right)=\int_0^\infty\left(\overline{u},\overline{\sigma}_{rz}\right)\omega J_1\left(\omega r\right)\mathrm{d}\omega \tag{11$_2$}$$

gdzie: $J_o(\omega r)$ i $J_1(\omega r)$ są funkcjami Bessela, odpowiednio zerowego i pierwszego rzędu.

Po wykonaniu transformacji Hankela na (10) i przekształceniach mamy:

$$N\left(d^2-\omega^2\right)\overline{u}^0-\left(M+N+D\right)\omega\overline{\varepsilon}^0=0 \tag{12$_1$}$$

$$N\left(d^2-\omega^2\right)\overline{w}^0+\left(M+N+D\right)\overline{\varepsilon},_z^0=0 \tag{12$_2$}$$

Z równań (12), po wykonaniu na nich operacji dywergencji mamy:

$$\left(M+N+D\right)\Delta\overline{\varepsilon}^0=0 \tag{13}$$

Rozwiązanie równania (10) dla półprzestrzeni przyjmuje postać:

$$\overline{\varepsilon}^0=c_0^0\exp\left(-\omega z\right) \tag{14}$$

Stąd dla transformat funkcji przemieszczeń mamy równania:

$$N\left(d^2-\omega^2\right)\overline{u}^0=\left(M+N+D\right)c_0^0\omega\exp\left(-\omega z\right) \tag{15$_1$}$$

$$N\left(d^2-\omega^2\right)\overline{w}^0=\left(M+N+D\right)c_0^0\omega\exp\left(-\omega z\right) \tag{15$_2$}$$

i ich ogólne rozwiązanie:

$$\overline{u}^0 = -c_0^0 \frac{M+N+D}{2N} z \cdot \exp(-\omega z) + c_1^0 \exp(-\omega z) \tag{16$_1$}$$

$$\overline{u}^0 = -c_0^0 \frac{M+N+D}{2N} z \cdot \exp(-\omega z) + c_2^0 \exp(-\omega z) \tag{16$_2$}$$

W trakcie dokonywania przekształceń został podniesiony rząd równań różniczkowych, stąd współczynniki w ich rozwiązaniach muszą spełniać warunek zgodności, wynikający ze związku:

$$\overline{\varepsilon}^0 = \omega u^0 + \overline{w},_z^0 \tag{17}$$

Po uwzględnieniu w (17) wyrażeń: (14) i (16) mamy:

$$\omega\left(c_1^0 - c_2^0\right) = c_0^0 \frac{M+3N+D}{2N} \tag{18}$$

Interesujące nas dalej transformaty naprężeń przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_z^0 + \overline{\sigma}^0 = {} & c_0^0 (M+N+D)(1-\omega z)\cdot \exp(-\omega z) - c_2^0 \cdot 2N \cdot \omega \cdot \exp(-\omega z) + \\ & + c_0^0 \left[M + \frac{H^2}{R} + \frac{E}{R}\left(\frac{H}{R}\frac{b_2}{b_0} + \frac{b_3}{b_0}\right)(Hb_2 + Rb_3)\right] \frac{M+2N+D}{N} \cdot \exp(-\omega z)\end{aligned} \tag{19$_1$}$$

$$\overline{\sigma}_{rz}^0 = c_0^0 (M+N+D)\left(\omega z - \frac{1}{2}\right)\cdot \exp(-\omega z) - N\left(c_1^0 - c_2^0\right)\cdot \omega \cdot \exp(-\omega z) \tag{19$_2$}$$

Występujące w wyrażeniach współczynniki zostaną wyznaczone z warunków brzegowych. Z warunku $(8)_3$ oraz równania (18) mamy:

$$c_1^0 = \frac{1}{2\omega} c_0^0 \tag{20$_1$}$$

$$c_2^0 = -\frac{M+N+D}{N} \frac{1}{2\omega} c_0^0 \tag{20$_2$}$$

Mieszany warunek brzegowy $(8)_{1,2}$ po uwzględnieniu $(20)_{1,2}$ przyjmuje postać:

$$\int_0^\infty c_0^0 J_0(\omega r)\mathrm{d}\omega = -\frac{2N}{E+D} w_0^0 \tag{21$_1$}$$

$$\int_0^\infty c_0^0 \omega J_0(\omega r)\mathrm{d}\omega = 0 \tag{21$_2$}$$

Rozwiązania układu dualnych równań całkowych (21) szukamy w postaci:

$$c_0^0(\omega) = \int_0^{r_o} \varphi^0(\rho)\cdot\cos(\omega\rho)\mathrm{d}\rho \tag{22}$$

Funkcja (22) spełnia tożsamościowo równanie $(21)_2$. Z równania $(21)_1$ otrzymujemy:

$$\int_0^\infty\int_0^{r_o} \varphi^0(\rho)\cdot\cos(\omega\rho)\mathrm{d}\rho\cdot J_0(\omega r)\mathrm{d}\omega = -\frac{2N}{E+D} w_0$$

$$\int_0^{r_o} \varphi^0(\rho)\int_0^\infty \cos(\omega\rho)\cdot J_0(\omega r)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\rho = -\frac{2N}{E+D} w_0$$

i po wyliczeniu całki:

$$\int_0^r \frac{\varphi^0(\rho)}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho = -\frac{2N}{E+D} w_0^0 \tag{23}$$

Rozwiązaniem równania (23) jest funkcja:

$$\varphi^0(r) = -\frac{2}{\pi}\frac{2N}{E+D} w_0^0 \tag{24}$$

Mając funkcję (24) wyznaczymy z równań: $(19)_1$, $(20)_2$ i (24) naprężenia kontaktowe:

$$\begin{aligned} q^0(r) &= \left(\sigma_z^0+\sigma^0\right)_{z=0} = \int_0^\infty \left(\bar\sigma_z^0+\bar\sigma^0\right)\cdot\omega\cdot J_0(\omega r)\mathrm{d}\omega = \\ &= \int_0^\infty B_q c_0^0\cdot\omega\cdot J_0(\omega r)\mathrm{d}\omega = B_q\int_0^\infty\int_0^{r_o}\varphi^0(\rho)\cdot\cos(\omega\rho)\mathrm{d}\rho\cdot\omega\cdot J_0(\omega r)\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{25$_1$}$$

i stąd:

$$q^0(r) = -\frac{2NB_q}{E+D}\frac{2}{\pi}\frac{w_0^0}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \tag{25$_2$}$$

Pozostaje związać osiadanie fundamentu z obciążeniem P_0. Z warunku brzegowego mamy:

$$2\pi\int_0^{r_0} q^0(r)\cdot r\cdot dr = -P^0$$

i stąd osiadanie fundamentu:

$$w_0^0 = \frac{E+D}{8NB_q}\cdot\frac{P^0}{r_0} \tag{26}$$

Naprężenia kontaktowe wywołane siłą wciskającą P_0 opisane są zależnością:

$$q^0(r) = -\frac{1}{2\pi}\frac{P^0}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \tag{27}$$

4. Uwagi końcowe

Otrzymane wyniki stanowią fragment pełnego rozwiązania brzegowego zadania kontaktowego dla półprzestrzeni konsolidującej. Niemniej pozwalają podjąć dyskusję o jego właściwościach. Tak więc jest widoczne, że początkowe osiadanie brzegu półprzestrzeni dane wzorem (26) opisuje analogiczna zależność, jak dla ośrodka nie wrażliwego na temperaturę, tutaj z uwzględnieniem termicznych właściwości ośrodka. W szczególności początkowe osiadanie brzegu półprzestrzeni (w obszarze kontaktu) jest różne w przypadku ośrodka wrażliwego na temperaturę i niewrażliwego. O wielkości tych różnic decydują właśnie termiczne właściwości ośrodka. Związek ten może być wykorzystany do oszacowania reakcji podłoża na budowlę, przy zmianach temperatury. Naprężenia (27) kontaktowe w chwili początkowej procesu nie zależą tak od właściwości mechanicznych, filtracyjnych oraz termicznych ośrodka gruntowego.

LITERATURA

[1] *Biot M.A.*: General theory of three-dimensional consolidation. J. Appl. Phys., 1941, No. 12, 155
[2] *Coussy O.*: Mechanics of Porous Continua. John Willey & Sons 1995

[3] *Doetsch G.*: Praktyka przekształcenia Laplace'a. Warszawa, PWN 1964

[4] *Gaszyński J.*: Identyfikacja modelu konsolidacji Biota na podstawie realizacji jednoosiowego zadania brzegowego. Archiwum Hydrotechniki PAN, XXXI, t. 1–2, 1984, 125–135

[5] *Gaszyński J.*: Konsolidacja porowatej warstwy nasyconej cieczą z uwzględnieniem wpływu temperatury. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo, nr 1756, 2007

[6] *Kowalski S.J.*: Thermomechanics of Drying Process of Fluid-Saturated Porous Media, Drying Technology. Vol. 12, No. 4, 1994, 453–482

[7] Strzelecki T., Równania termokonsolidacji gruntów i skał., Geotechnika i Budownictwo Specjalne, AGH, XXIX 2006, 285–299

[8] *Strzelecki T., Kostecki S., Żak S.*: Modelowanie przepływów przez ośrodki porowate. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne 2009