

Włodzimierz Brząkała*, Julien Blanc**

DYSKUSJA I KALIBRACJA HIPOTEZY MEYERHOFA

1. Wprowadzenie

Określanie nośności łąw fundamentowych bezpośredniego posadowienia jest zagadnieniem stosunkowo dobrze rozpoznanym. W klasycznym rozwiązaniu granicznego stanu naprężenia dla równomiernie pionowo obciążonej półpłaszczyzny stosuje się rozwiązanie Prandtla, jeśli ośrodek jest nieważki. Wpływ ciężaru własnego uwzględnia się natomiast w sposób przybliżony, nieco zróżnicowany w różnych źródłach. Większa różnorodność rozwiązań — czy wręcz rozbieżność opinii — dotyczy uwzględniania kształtu fundamentu w przypadku stóp fundamentowych (zagadnienie przestrzenne), nachylenia podstawy fundamentu, nachylenia naziomu, padowienia na skarpie, szorstkości w płaszczyźnie kontaktu, uwzględniania poziomej składowej obciążenia, czy uwarstwienia podłoża.

Wyjątkiem w tej grupie zagadnień jest uwzględnianie mimośrodowego obciążenia fundamentu, które G.G. Meyerhof [3] sprowadził do redukcji szerokości $\bar{B} = B - 2e < B$. Ta prosta hipoteza nigdy nie była poważnie kwestionowana, ale dopiero stosunkowo niedawno znalazła teoretyczne potwierdzenie [4]. Pewne wątpliwości jednak pozostają i można je przeanalizować za pomocą symulacji numerycznej (PLAXIS® 2D).

Przykładowo:

- wzrost mimośrodu obciążenia $e > 0$ powoduje nierównomierność rozkładu oporu gruntu, zbliżoną do trapezu lub nawet trójkąta, podczas gdy hipoteza Meyerhofa przyjmuje konsekwentnie rozkład równomierny (prostokątny, z rozwartą szczeliną o zasięgu $2e$);
- rzeczywista szorstkość powierzchni kontaktu fundamentu z podłożem podwyższa nośność, ale niestowarzyszone prawo plastycznego płynięcia może ją w praktyce znacznie obniżyć;
- rozwiązania teoretyczne [4] dotyczą wyłącznie ośrodka nieważkiego i obciążenia wiotkiego; obecność sztywnego fundamentu zmienia naprężenia kontaktowe;

* Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wroclawska, Wrocław

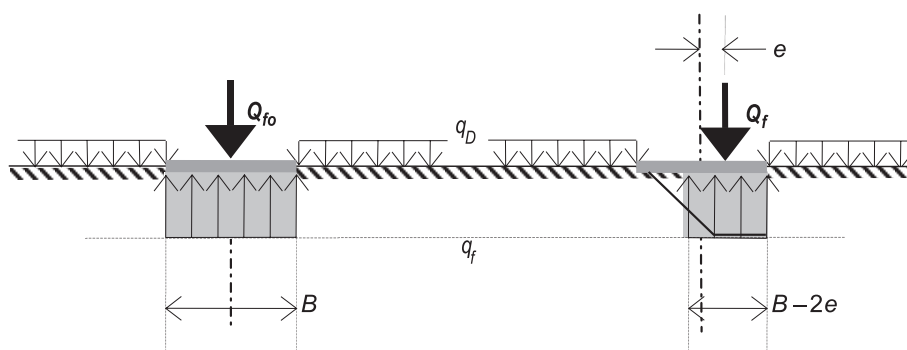
** Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, Ecole Centrale de Nantes, Nantes

- generalnie, w rozwiązaniach teoretycznych stosuje się górne oszacowanie nośności (kinematyczne), ale tylko w najprostszycy sytuacjach wiadomo, że jest ono dokładne;
- sprowadzenie obciążeń momentowych do redukcji obliczeniowej szerokości fundamentu wymagałoby może zastosowania dodatkowego cząstkowego współczynnika bezpieczeństwa, czego z reguły nie robi się w odniesieniu do wymiarów fundamentu.

2. Weryfikacja hipotezy Meyerhofa

Wzorując się na pełnym wykorzystaniu nośności ściskanego przekroju stalowego lub betonowego i wprowadzając siłę graniczną Q_{f0} [kN/m] można postulować istnienie stałej jednostkowej nośności gruntu q_f [kPa], a wtedy $Q_{f0} = B \cdot q_f$. Dla mimośrodru $e > 0$ wystąpi pod fundamentem nierównomierny odpór podłoża. W klasie odporów o kształcie trapezowym (prawa część rys. 1) lub trójkątnym, obu ograniczonych przez q_f , największą nośność Q_f osiąga się dla rozkładu prostokątnego.

Z warunku symetrii (równanie momentów): $Q_f = (B - 2e) \cdot q_f = \bar{B} \cdot q_f$.



Rys. 1. Hipotetyczny odpór graniczny gruntu pod ławą fundamentową

Zakres „dużych” mimośrodów, tj. $e > B/4$ lub $e > B/3$, nie ma praktycznego znaczenia i jest zwykle wykluczany przez przepisy normowe, ponieważ generalnie fundamenty bezpośrednio nie nadają się do przenoszenia tego rodzaju obciążeń. Można zatem przyjąć, że $e < B/3$. Wartości mimośrodu zbliżone do $B/6$, a zwłaszcza większe, wskazują na możliwość oderwania części fundamentu od podłoża, a przynajmniej tak byłoby, gdyby rozkład odporu gruntu pod fundamentem miał być liniowy (trójkątny). Rozwiązanie Prandtla dla gruntu nieważkiego daje:

$$q_f = c \cdot N_c + q_D \cdot N_D \quad (1)$$

gdzie:

$$N_D = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \cdot \exp\{\pi \cdot \operatorname{tg} \phi\},$$

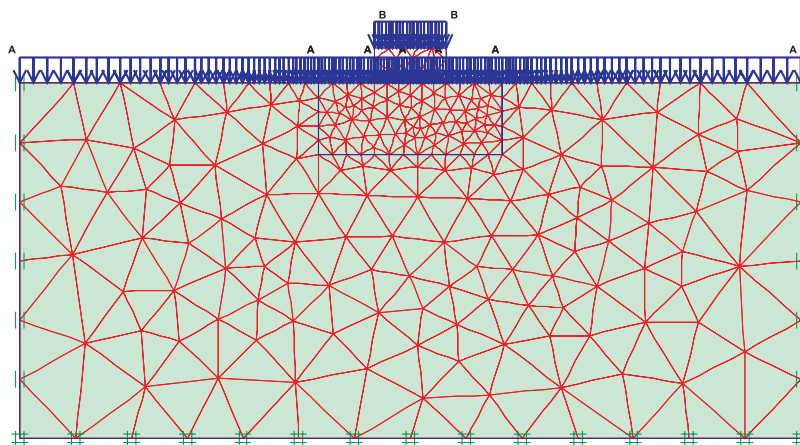
$$N_c = \operatorname{ctg} \phi \cdot (N_D - 1).$$

skąd wynika wyrażenie $Q_f = \bar{B} \cdot q_f$. Nośność jednostkowa q_f rzeczywiście tutaj istnieje, zależąc wyłącznie od parametrów wytrzymałościowych podłoża. W przypadku przybliżonego uwzględniania ciężaru objętościowego gruntu γ_B pod fundamentem otrzymuje się wzór normowy:

$$Q_{fNB} = \bar{B} \cdot (c \cdot N_c + q_D \cdot N_D + \gamma_B \cdot \bar{B} \cdot N_B) \quad (2)$$

Normy do projektowania przyjmują wyrażenia: $N_B = 0,75 \cdot (N_D - 1) \cdot \tan \phi$ według PN-81/B-03020 oraz odpowiednio $N_B = (N_D - 1) \cdot \tan \phi$ według EC7. Różnice nie są duże, zwłaszcza dla małych kątów tarcia wewnętrznego ϕ (grunty spoiste). Widać jednak, że wzory normowe (2) nie spełniają warunku istnienia jednostkowej nośności q_f , zależnej tylko od parametrów ośrodka oraz od obciążenia q_D , a zatem słuszność hipotezy Meyerhofa nie jest tutaj oczywista.

W kontrolnych obliczeniach MES wystarczającą dokładność zapewniła siatka przedstawiona na rysunku 2, ograniczona do obszaru $11B \times 5B$, ze sztywnym fundamentem o szerokości $B = 1$ m.



Rys. 2. Siatka MES dla obciążenia bez mimośrod

Siatka jest niesymetryczna, co częściowo rzutuje na wyniki w tabeli 1, gdzie widoczne są wpływy takiej dyskretyzacji MES — pierwsze cztery pary wykresów powinny być odpowiednio symetryczne i antysymetryczne.

TABELA 1

Ewolucja naprężeń kontaktowych pod sztywnym i szorstkim fundamentem

Obciążenie Q mimośród e	Naprężenia kontaktowe pionowe q [kPa]	Naprężenia kontaktowe styczne τ [kPa]
$Q = 100$ kN/m $e = 0$ $q_{\max} = 301$ kPa $\tau_{\max} = 33$ kPa		
$Q = 250$ kN/m $e = 0$ $q_{\max} = 384$ kPa $\tau_{\max} = 13$ kPa		
$Q = 500$ kN/m $e = 0$ $q_{\max} = 604$ kPa $\tau_{\max} = 60$ kPa		
<u>zniszczenie</u> $Q_{fo} = 680$ kN/m $e = 0$ $q_{\max} = 777$ kPa $\tau_{\max} = 321$ kPa		
<u>zniszczenie</u> $Q_f = 370$ kN/m $e = 0,20$ m $q_{\max} = 718$ kPa $\tau_{\max} = 297$ kPa		

Utratę stateczności wymuszano poprzez zwiększanie trapezowego obciążenia fundamentu. Wcześniej jednak całą powierzchnię (łącznie z fundamentem) obciążono w sposób wiotki $q_D = 20$ kPa. Następnie określano graniczne obciążenie Q_{fo} dla mimośrodu $e = 0$, w kolejnych obliczeniach przykładano pewną część tego obciążenia, a na końcu zwiększano również mimośród e — aż do numerycznej utraty stateczności. Zaobserwowano pewną zależność wyników od ścieżek obciążenia, szczególnie w sytuacji, gdy obciążenie momentem „znacznie wyprzedzało” obciążenie siłą pionową.

Parametry ośrodka odpowiadają piaskom średnim: $\varphi = 32^\circ$, $c = 1$ kPa, założono niestowarzyszone prawo plastycznego płynięcia z kątem dylatacji $\psi \cong \varphi - 30^\circ = 2^\circ$, $\gamma_B = 18$ kN/m³, $E = 50$ MPa, $\nu = 0,27$. Na kontakcie fundamentu z podłożem przyjęto naprężenia ścinające maksymalnie do 70% wytrzymałości gruntu na ścinanie ($R = 0,7$).

Ostatni zestaw wynikowych wykresów w tabeli 1 nie potwierdza prostokątnego kształtu odporu według Meyerhofa, [3, 4]. Chociaż założenia są nieco inne ($\psi \ll \varphi$, $R \gg 0$), to jednak maksymalne wartości naprężeń kontaktowych są zbliżone (777 kPa, 718 kPa) oraz rzeczywiście następuje niemal liniowa redukcja nośności: $Q_f = 370 \text{ kN/m} \approx 408 \text{ kN/m} = 680 \cdot (1 - 2 \cdot 0,2) = Q_{f0} \cdot \bar{B}/B$.

Dla przyjętych danych, wpływ współczynnika R na nośność fundamentu okazał się mały i mieścił się w granicach kilku procent (największa wartość nośności dla $R = 1$). Natomiast kąt dyatacji ψ ma znacznie większy wpływ: dla $\psi = 2^\circ$ nośność maleje o ok. 20% w porównaniu ze stowarzyszonym prawem płynięcia, w którym $\psi = \varphi = 32^\circ$.

Wpływ mimośrodowość obciążenia na nośność przeanalizowano stosując wartości charakterystyczne parametrów ośrodka oraz pomijając tzw. współczynnik korekcyjny m , czyli bezpośrednio na podstawie wzoru (2).

W wersji bezwymiarowej:

$$Q_f^* = (1 - 2 \cdot e^*) \cdot [c^* \cdot N_c + q_D^* \cdot N_D + (1 - 2 \cdot e^*) \cdot N_B], \quad (3)$$

gdzie:

$$Q_f^* = Q_{fNB} / (\gamma_B \cdot B^2),$$

$$e^* = e/B,$$

$$c^* = c / (\gamma_B \cdot B),$$

$$q_D^* = q_D / (\gamma_B \cdot B).$$

Górna seria wykresów na rysunku 3 odpowiada piaskowi o parametrach jak poprzednio, natomiast dolna seria wykresów odpowiada glinie o parametrach:

$$\varphi = 12,5^\circ,$$

$$c = 30 \text{ kPa},$$

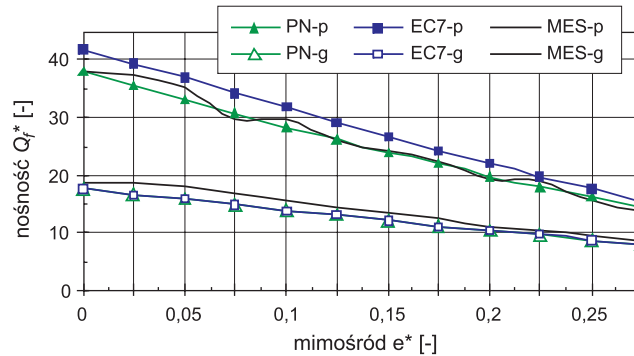
$$\psi = 0^\circ,$$

$$\gamma_B = 20 \text{ kN/m}^3,$$

$$E = 20 \text{ MPa},$$

$$\nu = 0,35,$$

$$R = 0,7.$$



Rys. 3. Nośności normowe oraz wyniki kontrolnych obliczeń MES (wykresy górne „-p” dla piasku, wykresy dolne „-g” dla gliny)

W odniesieniu do wyników MES, zgodność wzorów PN-81/B-03020 oraz eurokodu EC7 jest bardzo dobra, co potwierdza dopuszczalność stosowania hipotezy Meyerhofa o redukcji nośności ławy fundamentowej poprzez wprowadzenie jej efektywnej szerokości $\bar{B} = B - 2e < B$. Widoczna „pulsacja” wyników MES dla piasku wynika z występującej zależności od ścieżki obciążenia fundamentu (w minimalnym stopniu ma ona związek z dokładnością algorytmów numerycznych).

Niniejsza praca nie dotyczy łącznego działania na fundament obciążenia mimośrodowego i nachylonego, które z kilku powodów wymagałoby obszerniejszej analizy. Chociaż zarówno mimośród obciążenia, jak i nachylenie wypadkowej, powodują znaczną redukcję nośności, to jednak nie musi tak być, gdy działają one łącznie. Od strony praktycznej, bardzo istotne są wówczas również siły odporu gruntu powyżej poziomu posadowienia, a zatem np. też ścisłkana posadzka, wysokość i szorstkość fundamentu itp.

3. Przykładowa kalibracja cząstkowych współczynników bezpieczeństwa

Niżej przedstawione obliczenia wykazują, że uzmiennienie \bar{B} , poprzez wprowadzenie dodatkowej zmiennej losowej e , mieści się w granicach bezpieczeństwa wyznaczonych przez cząstkowe współczynniki bezpieczeństwa $\gamma = 1,30$ dla obciążeń zmiennych oraz $\gamma = 1,25$ dla parametrów wytrzymałości gruntów (tzw. Case C w eurokodzie EC7, por. [5]).

Dla $q_D = 20$ kPa, $\gamma_B = 18$ kN/m³, $c = 0$ kPa oraz $B = 2$ m, $e = 0$ m przyjmuje się wartość oczekiwaną kąta tarcia wewnętrznego $\mu_\varphi = 32^\circ$ oraz odchylenie standardowe $\sigma_\varphi = 3,2^\circ$ [1, 2], czyli współczynnik zmienności wynosi $v_\varphi = \sigma_\varphi/\mu_\varphi = 10\%$. Wartość charakterystyczna φ_k , oszacowana metodą Schneidera [4, 5], wynosi $\varphi_k = \mu_\varphi \cdot (1 - 0,5 \cdot v_\varphi) = 30,4^\circ$, a wartość obliczeniowa $\varphi_d = \arctan(\tan(\varphi_k)/\gamma_{\tan\varphi}) = 25,1^\circ$ dla zaleconego w EC7 cząstkowego współczynnika bezpieczeństwa $\gamma_{\tan\varphi} = 1,25$. Nośność graniczną z równania (2) w wersji EC7 otrzymuje się równą $Q_{fNB} = 760$ kN/m. Dla obciążenia Q można w pierwszym przybliżeniu przy-

jąc współczynnik zmienności $v_Q = 30\%$; ta wartość jest zawyżona, ponieważ ściśle rzecz biorąc $v_Q = 0,30$ stosuje się do obciążeń zmiennych, a nie łącznie do stałych i zmiennych, [1, 2]. Wartość cząstkowego współczynnika bezpieczeństwa $\gamma_Q = 1,30$ przyjęto za wytycznymi [5]. Dla tych danych wartość oczekiwaną maksymalnego obciążenia fundamentu szacuje się metodą Schneidera następująco:

$$\mu_Q = Q_d / \gamma_Q / (1 + 0,5 \cdot v_Q) = Q_{NB} / \gamma_Q / (1 + 0,5 \cdot v_Q) \cong 500 \text{ kN/m.}$$

W ogólniejszym przypadku, kalibrację cząstkowych współczynników bezpieczeństwa dla trzech zmiennych losowych ϕ , Q oraz e przeprowadza się metodą Hasofera-Linda [1]. Założono dużą wartość współczynnika zmienności losowego mimośrodu $v_e = 50\%$, $\sigma_e = 0,50 \cdot \mu_e$.

Szerokość ławy B jest losowa (tolerancja wykonawcza), z niewielkim odchyleniem standardowym $\sigma_B = 0,02$ m, a zatem $\mu_{\bar{B}} = \mu_B - 2\mu_e$, $\sigma_{\bar{B}} = \sqrt{(0,02^2 + 4\sigma_e^2)}$. Dopuszcza się możliwość dowolnego skorelowania zmiennych Q , e , czyli również zmiennych Q oraz \bar{B} , tj. $-1 < r_{Q\bar{B}} < +1$.

Trzy rozpatrywane zmienne losowe ϕ , Q oraz e można wyrazić za pomocą trzech nieskorelowanych standaryzowanych zmiennych losowych Z_1, Z_3, Z_4 :

$$\begin{aligned} \phi &= \sigma_\phi \cdot Z_1 + \mu_\phi, \\ Q &= \sigma_Q \cdot Z_3 + \mu_Q, \\ \bar{B} &= \sigma_{\bar{B}} \cdot r_{Q\bar{B}} \cdot Z_3 + \sigma_{\bar{B}} \cdot \sqrt{1 - r_{Q\bar{B}}^2} \cdot Z_4 + \mu_{\bar{B}}. \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie: $E\{Z_i\} = 0$, $\sigma_{Z_i} = 1$, zmienna losowa Z_2 , związana z losową spójnością c , nie występuje w tym przykładzie.

Miarą bezpieczeństwa β jest odległość od zera hiperpowierzchni warunku granicznego $(Q - Q_{NB}) = 0$ według (2), rozpatrywanej jako funkcja trzech zmiennych Z_i . Punkt (z_{1d}, z_{3d}, z_{4d}) z hiperpowierzchni, w którym ta minimalna odległość jest osiągnięta, nazywa się punktem obliczeniowym [1] — jest to najbardziej prawdopodobny zestaw parametrów w stanie granicznym; jest on zazwyczaj poszukiwany numerycznie — jako warunkowe minimum wyrażenia $\sum (z_{id})^2$ (autorzy zastosowali procedurę „minimize” w programie Maple®). Punkt ten zapisuje się za pomocą odległości (promienia) β oraz cosinusów kierunkowych α_i , czyli $(z_{1d}, z_{3d}, z_{4d}) = \beta \cdot (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4)$, gdzie $\sum (\alpha_i)^2 = 1$, $\sum (z_{id})^2 = \beta^2$. Parametry α_i mają ważną interpretację niezawodnościową: określają względny wpływ danej zmiennej na bezpieczeństwo. Na podstawie reprezentacji (4), punkt obliczeniowy wyznacza odpowiednie wartości obliczeniowe losowych parametrów, tj. ϕ_d , Q_d oraz e_d . Może on zatem służyć do wyznaczenia lub kalibracji cząstkowych współczynników obciążenia. Przykładowo, dla γ_Q jest z definicji $Q_d = Q_k \cdot \gamma_Q$, a z drugiej strony $Q_d = \sigma_Q \cdot z_{3d} + \mu_Q$, stąd $\gamma_Q = (1 + v_Q \cdot \beta \cdot \alpha_3) / (1 + 0,5v_Q)$, stosując wzór Schneidera [4, 5].

Dla rozpatrywanych danych, korelacja zmiennych Q oraz \bar{B} okazała się mało istotna, (por. tab. 2) bez dużego błędu i z braku innych danych przyjmowano dalej $r_{Q\bar{B}} = 0$.

TABELA 2

Przykładowa zależność wskaźnika bezpieczeństwa β od współczynnika korelacji $r_{Q\bar{B}}$ dla $\mu_B = 2$ m, $\mu_e = 0,1$ m, $\mu_Q = 500$ kN/m

$r_{Q\bar{B}}$	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
β	1,95	1,98	2,01	2,04	2,08	2,11	2,15	2,19	2,23	2,28	2,33

W miarę wzrostu mimośrodków, w tym przypadku wzrostu wartości oczekiwanej μ_e przy stałej wartości oczekiwanej μ_B , maleje bezpieczeństwo fundamentu oraz szybko wzrasta wpływ mimośrodu na bezpieczeństwo, mierzony wskaźnikami β oraz α_i w tabeli 3. Z tego powodu przykład opracowano dla zmniejszonej wartości oczekiwanej obciążenia z 500 do 300 kN/m.

TABELA 3

Przykładowa zależność wskaźnika bezpieczeństwa β oraz cosinusów kierunkowych od średniego mimośrodu μ_e dla $\mu_B = 2$ m, $\mu_Q = 300$ kN/m

μ_e [m]	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40
β	4,21	3,47	2,75	2,08	1,41
α_1	-0,67	-0,74	-0,76	-0,67	-0,50
α_2	0	0	0	0	0
α_3	0,74	0,61	0,49	0,40	0,33
α_4	-0,07	-0,27	-0,43	-0,62	-0,81

W praktyce projektowej częstsze są sytuacje, gdy wyznaczana jest średnia (nominalna) szerokość fundamentu μ_B , przy znanych pozostałych charakterystykach statystycznych, co przedstawiono w tabeli 4. Zazwyczaj warunkom projektowym odpowiada wtedy $\beta \sim 2,0$ oraz $\alpha_i \cong \text{const}$.

TABELA 4

Przykładowa zależność wskaźnika bezpieczeństwa β oraz cosinusów kierunkowych od nominalnej szerokości ławy μ_B dla $\mu_e = 0,1$ m, $\mu_Q = 300$ kN/m

μ_B [m]	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
β	1,54	2,04	2,50	2,97	3,47
α_1	-0,82	-0,83	-0,82	-0,79	-0,74
α_2	0	0	0	0	0
α_3	0,49	0,50	0,52	0,56	0,61
α_4	-0,27	-0,24	-0,24	-0,24	-0,27

4. Podsumowanie

- 1) Hipoteza Meyerhofa zakłada redukcję nośności łąwy fundamentowej obciążonej mimośrodowo poprzez wprowadzenie jej efektywnej szerokości $\bar{B} = B - 2e < B$. Dla celów praktycznych (obliczeń projektowych) w pełni potwierdza się dopuszczalność tej hipotezy.
- 2) Kontrolne obliczenia na podstawie wyników z tabel 3 i 4 nie wykazały dużych różnic wobec wartości cząstkowych współczynników bezpieczeństwa wg EC7 (Case C):
 - otrzymane współczynniki bezpieczeństwa γ_ϕ dla kąta tarcia wewnętrznego ϕ gruntu niespoistego mieszczą się w przedziale $1,05 < \gamma_\phi < 1,30$; dla parametru wytrzymałości $\tan \phi$ jest podobnie: $1,06 < \gamma_{\tan \phi} < 1,36$. Eurokod EC7 zaleca w tym miejscu $\gamma_{\tan \phi} = 1,25$;
 - otrzymane współczynniki bezpieczeństwa γ_Q dla obciążenia Q mieszczą się w przedziale $1,08 < \gamma_Q < 1,66$. W obliczeniach przyjęto jednak zawyżony współczynnik zmienności $v_Q = 0,30$ (jak dla 100% obciążeń zmiennych), podczas gdy realistyczne szacowanie jest na poziomie $v_Q = 0,15$ (50% obciążeń zmiennych + 50% obciążeń stałych). Wówczas otrzymuje się $1,03 < \gamma_Q < 1,36$. Eurokod EC7 zaleca w tym miejscu $\gamma_Q = 1,30$;
 - otrzymane współczynniki bezpieczeństwa $\gamma_{\bar{B}}$ dla efektywnej szerokości łąwy mieszczą się w przedziale $1,02 \div 1,17$. Eurokod EC7 nie analizuje zmienności tego parametru.
- 3) Bezpieczeństwo przy projektowaniu według zestawu współczynników z EC7 jest większe, niż mogłoby się wydawać z powyższego porównania. Obliczenia wykazują bowiem, że dużym wartościom $\gamma_{\tan \phi}$ towarzyszą w zestawach małe wartości γ_Q i odwrotnie, co wynika z równości $\sum(\alpha_i)^2 = \text{const}$. A zatem uogólnione wartości maksymalne $\gamma_{\tan \phi} = 1,25$ oraz $\gamma_Q = 1,30$ w EC7 są rodzajem obwiedni. Poza przypadkami „bardzo dużych” mimośródów $e/B \sim 1/4 \div 1/3$, postulowanie wprowadzenia dodatkowego współczynnika $\gamma_{\bar{B}}$ nie byłoby celowe.

LITERATURA

- [1] *Baecher G.B., Christian J.T.*: Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering. New York: J.Wiley & Sons, 2003
- [2] *Cardoso A.S., Fernandes M.M.*: Characteristic values of ground parameters and probability in design according to Eurocode 7. Géotechnique, 51(2001), 6, 519–531
- [3] *Meyerhof G.G.*: The bearing capacity of foundations under eccentric and inclined loads. “3rd ICSMFE”, Zürich 1953, Vol.1, 440–445
- [4] *Michalowski R.L.*: Effective width rule in calculations of bearing capacity of shallow footings. Computers and Geotechnics, 23(1998), 237–253
- [5] *Orr T.L., Farrell E.R.*: Geotechnical Design to Eurocode 7. London: Springer–Verlag, 1999