

*Jerzy Bauer**, *Janusz Kozubal***, *Wojciech Puła***, *Marek Wyjadłowski***

ANALIZA PRZEMIESZCZEŃ POPPRZECZNIE OBCIĄŻONEGO PALA W TRÓJWYMIAROWYM OŚRODKU LINIOWO-SPRĘŻYSTYM O CECHACH LOSOWYCH***

1. Wprowadzenie

Pale wielkośrednicowe oraz ściany znajdują szerokie zastosowanie w posadowieniu budowli inżynierskich. Ze względu na głębokość w gruntach nośnych przekazują na podłoże duże obciążenia pionowe i poziome. Obliczenia dopuszczalnych obciążeń poziomych jest skomplikowanym zagadnieniem, co spowodowane jest niedokładnością modelu podłoża gruntowego, niepewnością w przyjęciu parametrów geotechnicznych oraz szacunkowym przyjęciem wartości obciążeń poziomych. Precyzyjne rozwiązanie zadania wymaga zastosowania modelowania przestrzennego.

Obciążenia poziome mają charakter statyczny i dynamiczny. Powstają one między innymi na skutek hamowania pojazdów, parcia gruntów na przyczółki, rozszerzalności termicznej przęsła, parcia wiatru, obciążenia krą lodową, uderzenia taboru pływającego. Określenia nośności bocznej pali można poszukiwać rozpatrując stany graniczne nośności i stany graniczne użytkowania. W przypadku stanu granicznych nośności decydujący jest zazwyczaj warunek nośności gruntu na docisk boczny pala. Z punktu widzenia projektowania najistotniejszy jest zazwyczaj warunek ograniczenia przemieszczeń poziomych głowicy pala (np. ze względu na wymagania dylatacji i łożysk mostowych). Kolejny warunek wymagający sprawdzenia to ograniczenie wartości ekstremalnych momentów zginających pal. Zasadniczą trudność w analizie zadania stanowi określenie odkształcalności gruntu współdziałającego z palami. Obecnie stosowane w praktyce metody obliczeniowe oceny nośności pali

* Wydział Geoinżynierii Górnictwa i Geologii, Politechnika Wrocławska, Wrocław

** Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska, Wrocław

*** Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008–2010 jako projekt badawczy

obciążonych siłami poziomymi pochodzą z lat 60. i 70. ubiegłego wieku [2]. Nie uległy one zmianom, pomimo ich niedostatków, uproszczeń i pomimo rozwoju metod numerycznych. Nie określono, jak duże zapasy bezpieczeństwa w nich występują. Tematyka ta jednak jest nadal przedmiotem studiów różnych badaczy i pojawiają się kolejne interesujące prace na ten temat (np. [13–15]).

Obecnie obliczenia pali obciążonych siłami poziomymi prowadzone są metodami numerycznymi. Ze względu dużej wrażliwości zadania na zmienność parametrów podłoża oraz zmienność obciążeń, dużego znaczenia nabierają podejścia probabilistyczne. Probabilistyczną ocenę niezawodności w przypadku granicznej nośności bocznej pali sztywnych obciążonych poprzecznie przedstawiono w pracach Puły [10] oraz Puły i Różańskiego [11]. Prace te bazowały na modelu granicznej nośności bocznej zaproponowanym przez Brinch Hansena. Podano w nich algorytmy obliczeń probabilistycznych korzystające z przekształceń symbolicznych programu MATEMATICA oraz metody powierzchni odpowiedzi.

Dla poprzecznie obciążonych pali odkształcalnych kompleksową analizę probabilistyczną ugięć przedstawił Tandjirja ze współautorami [13]. W tej pracy ugięcia pali obliczane są na podstawie szeroko stosowanej w Stanach Zjednoczonych metody „*p-y curves*”. Narzędziem służącym obliczeniom probabilistycznym jest w tym przypadku metoda powierzchni odpowiedzi. Istotnym mankamentem tej pracy jest jednak fakt ograniczenia się do analizy przestrzeni dwuwymiarowej.

W ramach prezentowanej pracy autorzy podjęli się probabilistycznej analizy ugięć pala w trójwymiarowym ośrodku liniowo sprężystym. Podstawą obliczeń w pracy jest pełne modelowanie numeryczne 3D za pomocą metody elementów skończonych (program ABAQUS). Jako losowe traktuje się tu parametry podłoża oraz obciążenia poprzeczne pala. W obliczeniach probabilistycznych oraz szacowaniu wskaźników niezawodności korzysta się z metody powierzchni odpowiedzi oraz metody SORM. Ze względu na skomplikowany i czasochłonny charakter obliczeń obecny artykuł zawiera jedynie początkowe stadium pracy, która nie jest jeszcze zakończona. Dalszej i gruntowniejszej analizie poświęcone będą kolejne opracowania.

2. Metoda powierzchni odpowiedzi

Metoda powierzchni odpowiedzi, stosowana w wielu dziedzinach nauki, doczekała się wyczerpujących opracowań monograficznych [6, 13]. Ogólnie polega ona na aproksymowaniu nieznannej funkcji, dla której znana jest jedynie pewna liczba wartości, przez odpowiednio przyjętą funkcję. Funkcja aproksymująca może być dobrana na podstawie wyników badań eksperymentalnych, a także wyników obliczeń numerycznych, np. wyników uzyskanych metodą elementów skończonych. W przypadku obliczeń numerycznych chodzi o określenie relacji pomiędzy parametrami modelu x_1, x_2, \dots, x_n , wprowadzonymi jako dane wejściowe, a wartościami otrzymanymi na „wyjściu” $y = k(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Określenie, oczywiście w sposób przybliżony, takiej zależności prowadzi do zastąpienia uciążliwej do zaprogramowania procedury numerycznej przez prostą zależność analityczną, służącą do przewidywania „od-

powiedzi” analizowanego modelu na zadane wymuszenia. Na potrzeby analizy niezawodności konstrukcji inżynierskich metodę tę zaadaptowano w latach osiemdziesiątych [12]. Dla uproszczenia obliczeń niezawodnościowych, stosuje się możliwie nieskomplikowane funkcje, np. wielomiany trzeciego stopnia. Uproszczenie może też polegać na uwzględnieniu tylko kilku najważniejszych dla danego problemu bazowych zmiennych losowych (np. takich, które mają największe współczynniki wrażliwości).

Istnieją różne możliwości aproksymowania nieznanej funkcji, np. interpolacja wielomianowa czy metody regresji. W przypadku analizy zjawisk losowych, podejście regresyjne, wywodzące się ze statystyki matematycznej, wydaje się metodologicznie najbardziej adekwatne. Zastosowanie te związane będą z przemieszczeniem głowicy pała. Nie ogranicza to jednak ogólności proponowanej metody. Zatem zadanie polega na określeniu funkcji opisującej w sposób jawny przemieszczenie głowicy pała w zależności od zmiennych takich jak obciążenia, wielkości geometryczne i stałe materiałowe, które mogą być uważane za zmienne losowe. Funkcja ta, oznaczana dalej jako $U(X)$, będzie użyta do zdefiniowania funkcji stanu granicznego. W praktycznych zastosowaniach rzadko jest znana jawna postać funkcji osiadania. Najczęściej, dysponując programem metody elementów skończonych, można wyznaczyć jej wartości dla przyjętych wielkości stałych materiałowych, obciążeń oraz stałych geometrycznych modelu obliczeniowego MES. Przybliżoną postać funkcji $U(X)$ można modelować za pomocą regresji nieliniowej w następującej postaci:

$$E(U) = h(\mathbf{X}, \mathbf{B}) + err \quad (1)$$

gdzie h jest pewną funkcją elementarną, której postać przyjmuje się jako założenie, $E(U)$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej U , X jest wektorem m argumentów, B jest wektorem k szukanych parametrów modelu regresji, a err jest zmienną losową opisującą błąd estymacji funkcji U . Wyznaczenie wartości wektora parametrów B dokonuje się poprzez proces minimalizacji sumy kwadratów różnic wielkości danych funkcji U_i (wartości funkcji) i przewidywanych \hat{U}_i :

$$\Psi = \sum_i^n (U_i - \hat{U}_i)^2 \quad (2)$$

dla zestawu n danych: $(U_i, X_{i1}), i = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, m$. Zmienna losowa err błędu estymacji posiada zerową wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe równe:

$$\sigma_{err} = \sqrt{\frac{\Psi_{\min}}{n - k}} \quad (3)$$

Najbardziej rozpowszechnione metody znajdowania minimum funkcji Ψ to metoda linearyzacji oraz metoda najszybszego spadku (Marquardt 1963). W skomplikowanych sytuacjach warto użyć programu NLIN 2 opartego na kompromisie Marquardta (Marquardt 1966), pozwalającego wybrać pośredni, optymalny kierunek przyrostu wektora parametrów znaczących.

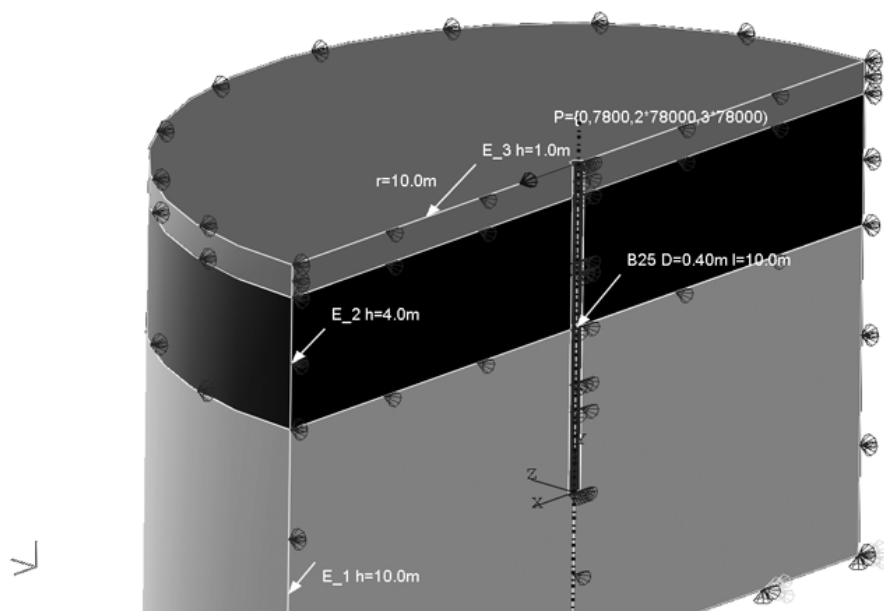
nie przyspieszający zbieżność procesu iteracyjnego. W rozpatrywanym przypadku przemieszczenie głowicy pala stanowi odpowiedź układu, a parametry ośrodka gruntowego stanowią dane wejściowe.

3. Model numeryczny

Dla rozwiązania zagadnienia zamodelowano pal w ośrodku gruntowym, uwarstwionym, liniowo sprężystym, kołowo symetrycznym. W osi symetrii układu znajduje się pojedynczy pal o średnicy $D = 0,40$ m, zagłębiony na odcinku 10,0 m w podłożu. Obciążeniem głowicy pala jest siła pozioma, a więc zadanie przestaje być osiowo symetryczne i modelowanie geometryczne zostanie wykonane w przestrzeni 3D. Jednak przy budowie modelu obliczeniowego można wykorzystać płaszczyznę symetrii, jaką posiada tak sformułowany problem brzegowy teorii sprężystości z nieliniowością na płaszczyznach kontaktu pal–ośrodek gruntowy. Średnica modelu obliczeniowego wynosi 20,0 m, a jego całkowita miąższość wynosi 15,0 m.

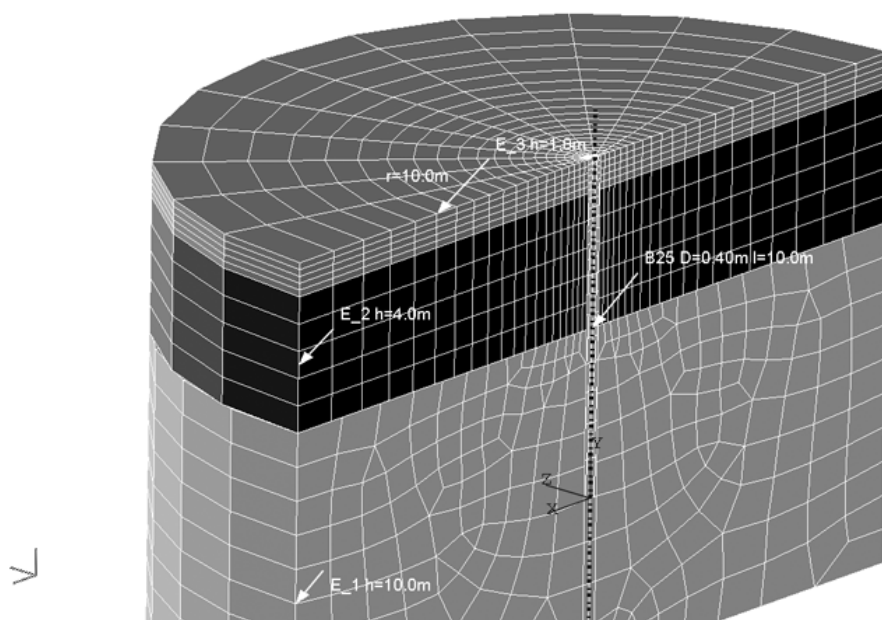
Przyjęto następujący układ warstw (por. rys. 1):

- warstwa 1, grubość 10,0 m, pal zagłębiony jest w nią na głębokości 5,0 m (na spodzie);
- warstwa 2, grubość 4,0 m (przelotowa);
- warstwa 3, grubość 1,0 m (przy powierzchni terenu).



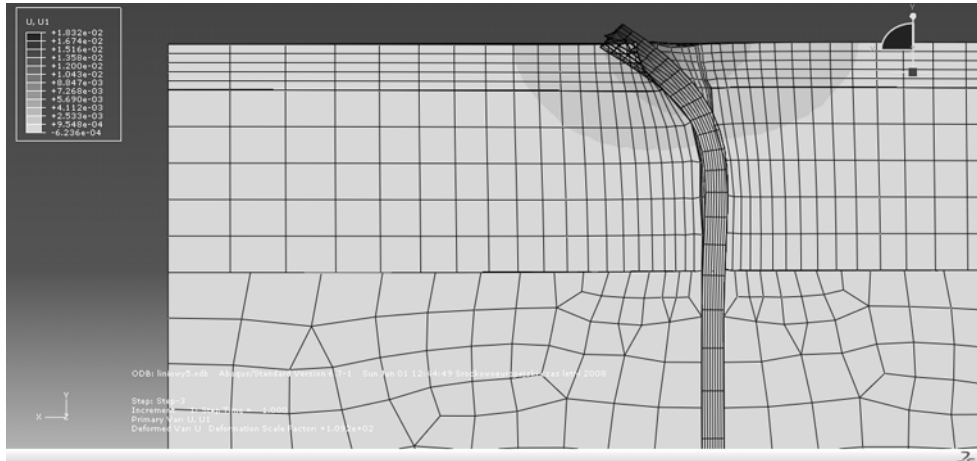
Rys. 1. Schemat uwarstwienia podłoża modelu

Jak już wspomniano, w zadaniu wykorzystano symetrię układu, stąd model obliczeniowy obejmuje tylko połowę kołowego wycinka przestrzeni, co zapewniają odpowiednio dobrane warunki brzegowe dla przemieszczeń. Wszystkie warstwy gruntowe zdefiniowano jako idealnie liniowo sprężyste, o zmiennym module Younga E w zakresie: $E = 42,0\div 78,0$ MPa, ciężarze własnym $\gamma = 18,0$ kN/m³ oraz współczynniku Poissona $\nu = 0,25$. Parametry pala przyjęto jak dla betonu klasy B25: ciężar własny $\gamma = 24,0$ kN/m³, moduł Younga $E_b = 30,0$ GPa oraz współczynnika Poissona $\nu = 0,25$. Dla powierzchni kontaktu pala z gruntem przyjęto współczynnik tarcia $\mu = 0,3$, powierzchnia kontaktowa pala z gruntem nie przenosi rozciągania. Model siatki MES pokazano na rysunku 2. Wszystkie elementy skończone, których użyto do opisu ośrodka i pala należą do rodziny C3 (przestrzenne do opisu ośrodka sprężystego) o ośmiu węzłach w szczególności zaś C3D8, tutaj w formie zdegenerowanych sześciątów.



Rys. 2. Model obliczeniowy MES podłoża i pala

W celu weryfikacji i dobrej stabilizacji rozwiązania obciążono pal kolejno siłą poziomą F o trzech wartościach: 156, 312 i 468 kN. Do obliczeń użyto programu ABAQUS wersji 6.7 firmy Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., dzięki grantowi we Wrocławskim Centrum Sieciowo Superkomputerowym przy Politechnice Wrocławskiej. Obliczenia zautomatyzowano przy użyciu skryptów w języku Phytion, co pozwoliło sprawnie wykonać żmudne procedury obliczeniowe, zestawić rezultaty oraz wytestować model. Wyniki uzyskiwanych przemieszczeń głowicy pala wykorzystano do wyznaczenia powierzchni odpowiedzi. Przykładowe deformacje trzonu pala pokazano na rysunku 3.



Rys. 3. Deformacje trzonu pała w przekroju powierzchnią symetrii

4. Podejście probabilistyczne

W podejściu probabilistycznym przyjęto, że zmiennymi losowymi są parametry podłoża a także działająca w głowicy pała siła pozioma. Z punktu widzenia konstrukcji posadowionych na palach za stan awaryjny można uznać taki, w którym przemieszczenie głowicy przekroczy określoną wartość u_0 . Zadanie będzie polegało na znalezieniu następującego prawdopodobieństwa:

$$p_F = P\{U(\mathbf{X}) > u_0\}, \quad (4)$$

gdzie $U(X)$ jest przemieszczeniem głowicy pała zależnym od wektora parametrów X , zawierającego zarówno losowe jak i nielosowe komponenty. Jako równoważną miarę stosuje się wskaźnik niezawodności β , związany z prawdopodobieństwem (4) zależnością:

$$p_F = \Phi_0(-\beta), \quad (5)$$

w której Φ_0 jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Do obliczenia miar (4) i (5) zastosowano metody FORM i SORM szeroko rozpowszechnione w ramach teorii niezawodności konstrukcji [5]. Najistotniejszym elementem tych metod jest znalezienie tzw. punktu obliczeniowego y^* . Punkt obliczeniowy jest to punkt leżący na powierzchni stanu granicznego:

$$\{x: U(x) = u_0\}, \quad (6)$$

którego odległość do początku układu współrzędnych w układzie standardowych zmiennych normalnych jest najmniejsza [5, 10]. Wokół tego punktu skoncentrowana jest naj-

większa „masa prawdopodobieństwa” determinująca prawdopodobieństwo (4). Punkt ten posłużył jako punkt wokół, którego wyznacza się powierzchnie odpowiedzi. W ramach niniejszej pracy przyjęto następującą procedurę zaproponowaną przez Bauera i Pułę [1]:

- Mając dane wartości oczekiwane zmiennych losowych wyznacza się ich przybliżony zakres zmienności. Jego zasięg można przyjąć jako plus/minus wartość odchylenia standardowego od wartości oczekiwanej dla każdej zmiennej.
- Wybierając wartości stałych materiałowych z zakresu ich zmienności uzyskuje się (poprzez obliczenia metodą elementów skończonych) kilkanaście wartości przemieszczeń głowicy pała.
- Przyjmując powierzchnię odpowiedzi w postaci następującego wielomianu trzeciego stopnia

$$U(E_1, E_2, E_3) = \frac{F}{312} (B_1 + B_2 E_1 + B_3 E_2 + B_4 E_3 + B_5 E_1^2 + B_6 E_2^2 + B_7 E_3^2 + B_8 E_1 E_2 + B_9 E_1 E_3 + B_{10} E_2 E_3) \quad (7)$$

i traktując ją wyrażenie jako model regresji wyznacza się początkowe wartości b_i parametrów B_i za pomocą regresji nieliniowej (por. podrozdz. 2). Wyniki, przy przyjętej dokładności obliczeń, wykazały, że nieliniowość modelu jest pomijalna.

- Tak otrzymaną powierzchnię $U(E_1, E_2, E_3)$ podstawia się do wzoru (7), uzyskując powierzchnię stanu granicznego.
- Następnie stosując metodę FORM znajduje się punkt obliczeniowy y^* położony na tej powierzchni.
- Powyższe kroki postępowania powtarza się w otoczeniu punktu obliczeniowego, zmniejszając zakres zmiennych losowych na przykład do plus/minus połowy odchylenia standardowego od wartości współrzędnych wyznaczających punkt obliczeniowy. Wymaga to wyznaczenia nowego zestawu współczynników B_i .
- Wyznaczone w ten sposób współrzędne punktu obliczeniowego najczęściej są już wystarczająco dokładne, co sprawdza się przez obliczenia MES. Gdyby jednak zachodziła konieczność zwiększenia dokładności obliczeń, to można całą procedurę postępowania powtórzyć, zmniejszając jeszcze bardziej zakres zmiennych losowych, np. do plus/minus jednej czwartej odchylenia standardowego od wartości współrzędnych poprzednio wyznaczonego punktu obliczeniowego. Krok ten wymaga wyznaczenia za pomocą postępowania regresyjnego kolejnego zestawu współczynników B_i .

5. Obliczenia i wyniki

Założenia dotyczące probabilistycznych charakterystyk parametrów losowych modelu opisanego w punkcie 3 oraz zestawiono w tabeli 1.

TABELA 1

Charakterystyki probabilistyczne parametrów zadania

Parametr	Wartość średnia	Współczynnik zmienności	Rozkład prawdopodobieństwa
Moduł Younga spodniej warstwy E_1	60 MPa	0,15	lognormalny
Moduł Younga warstwy przelotowej E_2	60 MPa	0,15	lognormalny
Moduł Younga warstwy przy powierzchni terenu E_3	60 MPa	0,15	lognormalny
Siła pozioma w głowicy F	312 kN	0,10	lognormalny
Dopuszczalne przemieszczenie głowicy pala u_0	0,015 m	–	nielosowe

Poszczególne zmienne losowe traktowano jako stochastycznie niezależne. Wartości współczynników Poissona przyjęto jako nielosowe, gdyż ich losowość w wielu zagadnieniach sprężystych jest pomijalna. Powierzchnie odpowiedzi wyznaczano w postaci wielomianu (7) zgodnie z procedurą przedstawioną w punkcie 4. Zadawalającą zbieżność osiągnięto w trzech iteracjach. W tabeli 2 zamieszczono współczynniki wielomianu uzyskane w poszczególnych krokach oraz współrzędne punktu obliczeniowego.

TABELA 2

Wyznaczanie powierzchni odpowiedzi

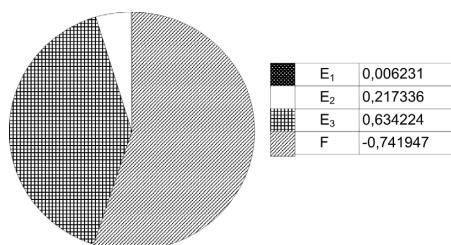
Iteracja	Współczynniki wielomianu		Współrzędne punktu obliczeniowego			
			E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	E_3 [MPa]	F [kN]
1	$B_1 = 2,24E-2$	$B_6 = 1,45E-7$	59,4	54,8	42,0	410,0
	$B_2 = 6,92E-6$	$B_7 = 1,28E-6$				
	$B_3 = -5,51E-5$	$B_8 = -3,99E-8$				
	$B_4 = -2,75E-4$	$B_9 = -3,88E-8$				
	$B_5 = -2,39E-8$	$B_{10} = 3,48E-7$				
2	$B_1 = 2,40E-2$	$B_6 = 2,78E-7$	59,0	50,9	37,7	446,0
	$B_2 = -8,46E-6$	$B_7 = 2,07E-6$				
	$B_3 = -9,95E-5$	$B_8 = 3,96E-12$				
	$B_4 = -3,57E-4$	$B_9 = 2,31E-8$				
	$B_5 = 5,43E-8$	$B_{10} = 8,57E-7$				
3	$B_1 = 2,59E-2$	$B_6 = 3,78E-7$	59,1	50,7	37,4	445,0
	$B_2 = -1,36E-5$	$B_7 = 2,58E-6$				
	$B_3 = -1,23E-4$	$B_8 = 2,78E-8$				
	$B_4 = -4,14E-4$	$B_9 = 5,56E-8$				
	$B_5 = 7,71E-8$	$B_{10} = 1,13E-6$				

Jak widać współrzędna punktu obliczeniowego w iteracji 2 i 3 są już do siebie bardzo zbliżone. W związku z tym na trzeciej iteracji procedurę zakończono. Uzyskana w trzecim kroku powierzchnia odpowiedzi została zastosowana w powierzchni stanu granicznego (6) do obliczenia prawdopodobieństwa (4) i wskaźnika niezawodności (5).

Uzyskano następujący rezultat:

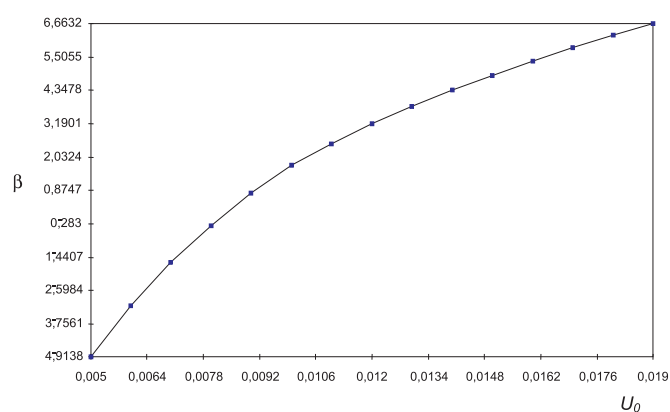
$$p_f = 5,49 \cdot 10^{-7}, \beta = 4,87.$$

W zadaniu tego typu istotna jest analiza wrażliwości wskaźnika niezawodności na wahania poszczególnych zmiennych losowych. W przedstawionym przykładzie można to zilustrować jak na rysunku 4. Widać, że największe znaczenie ma zmienność losowa siły zewnętrznej. Spośród parametrów podłoża najważniejsze są wahania wierzchniej warstwy, pomimo że w zadaniu przyjęto jej miąższość jako zaledwie 1,0 m.



Rys. 4. Współczynniki wrażliwości — diagram kołowy

Powtarzając obliczenia dla różnych wartości dopuszczalnego osiadania u_0 można uzyskać dystrybuantę zmiennej losowej U , albo równoważnie zmienność wskaźnika niezawodności β w zależności od dopuszczalnego osiadania. Przykład wykresu takiej zależności pokazano na rysunku 5.



Rys. 5. Zależność $U_0 - \beta$

Rysunek 5 jest jednak tylko wykresem przybliżonym, gdyż do wszystkich wartości dopuszczalnego przemieszczenia przyjęto jednakową powierzchnie odpowiedzi w postaci wielomianu trzeciego stopnia o współczynnikach uzyskanych w trzecim kroku iteracji (por. tab. 2).

6. Podsumowanie

Praca przedstawia początkowe rezultaty probabilistycznego modelowania ugięć pala obciążonego siłą poprzeczną. Pal umieszczony jest w uwarstwionym ośrodku o cechach losowych. Tego typu losowe zadanie trójwymiarowe nie było dotąd spotykane w literaturze. W zadaniu połączono obliczenia metodą elementów skończonych z metodą powierzchni odpowiedzi oraz metodami FORM i SORM wyznaczania wskaźników niezawodności. Iteracyjny proces dochodzenia do końcowej postaci powierzchni odpowiedzi okazał się szybko zbieżny. Przedstawiony przykład wskazuje, że o prawdopodobieństwie przekroczenia dopuszczalnej wartości przemieszczenia w głowicy pala decyduje przede wszystkim zmienność losowa przyłożonego obciążenia, a spośród parametrów podłoża zmienność modułu odkształcenia wierzchniej warstwy.

Autorzy kontynuują obliczenia w celu uzyskania wyników dla różnych wariantów przedstawionego problemu.

LITERATURA

- [1] *Bauer J., Pula W.*: Reliability with respects to settlement limit-states of shallow foundation on linearly-deformable subsoil. *Computers & Geotechnics* 25, 3–4, 2000, 281–308
- [2] *Brinch Hansen J.*: The ultimate resistance of rigid piles against transversal force. The Danish Geotechnical Institute, Bulletin 12, 1961
- [3] *Cherubini C.*: Data and Consideration on the variability of geotechnical properties of soils. Proc. of the ESREL Conf., Lisbona, 1977, 1538–1591
- [4] *Comodromos E. et al.*: Numerical assessment of axial pile group response based on load test. *Computers and Geotechnics* 30, 2003, 505–517
- [5] *Ditlevsen O., Madsen H.O.*: Structural Reliability Methods. John Wiley & Sons, Chichester, 1996
- [6] *Faravelli L.A.*: A response surface approach for reliability analysis. *Journal of the Engineering Division ASCE*, 115 (12), 1989, 2763–2781
- [7] *Liang F.Y., Chen L.Z., Shi X.G.*: Numerical analysis of composite piled raft with cushion subjected to vertical load. *Computers and Geotechnics* 30, 2003, 431–442
- [8] *Poulos H.G., Davis E.H.*: Pile foundation analysis and design. J. Wiley, New York, 1980
- [9] *Pula W.*: Reliability analysis of rigid piles subjected to lateral loads. [In:] *Numerical Models in Geomechanics*, S. Pietruszczak and G.N. Pande eds. Balkema Rotterdam, 1997, 521–526
- [10] *Pula W.*: Zastosowania teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa fundamentów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2004
- [11] *Pula W., Różański A.*: Reliability of rigid piles subjected to lateral loads. A response surface approach. Proc. of the Tenth Int. Symposium on Numerical Methods in Geomechanics, Ed. by G.N. Pande, Rhodes, 2007
- [12] *Rackwitz R.*: Response surfaces in structural reliability. *Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke*, Heft 67, LKI, Technische Universität München, 1982
- [13] *Tandjiria V., Teh C.I., Low B.K.*: Reliability analysis of laterally loaded piles using response surface methods. *STRUCT SAF* 22: 4, 2000, 335–355
- [14] *Tahghighi & Konagai*: Numerical analysis of nonlinear soil–pile group interaction under lateral loads. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 27, 2007
- [15] *Zhabd & Small*: Analysis of capped pile groups subjected to horizontal and vertical test. *Computers and Geotechnics* 26, 2001