

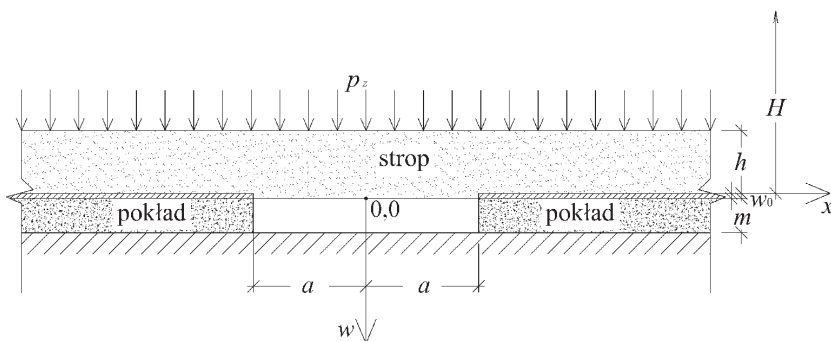
Marian Paluch\*, Antoni Tajduś\*

## WYZNACZENIE UGIĘĆ I SIŁ PRZEKROJOWYCH W STROPIE BĘDĄCYM W KONTAKCIE DWUPARAMETROWYM Z POKŁADEM DLA WYROBISKA KORYTARZOWEGO

W pracy rozważane są analogiczne zagadnienia jak te, które autorzy przedstawili w opracowaniu [9]. W artykule rozważane są te zagadnienia odnośnie do wyrobiska korytarzowego. Problem ten jest zadaniem statycznie niewyznaczalnym. Wykorzystując symetrię układu jako niewiadomą nadliczbową w układzie podstawowym, przyjęto moment zginający  $\bar{M}_0$ . Po jego wyznaczeniu podano wzory na obliczenie ugięć i sił przekrojowych w stropie. Wyznaczono również energię sprężystą dla długości  $a$  stropu. Wymiar  $a$  został dobrany z hipotezy wyteżeniowej Coulomba–Tresca–Guesta

### 1. Wstęp

Rozważamy pasmo płytowe stropu o grubości  $h$  [m] znajdujące się na głębokości  $H$  [m] i obciążone ciśnieniem  $p_z = \gamma H$  [ $N/m^2$ ] (rys. 1)



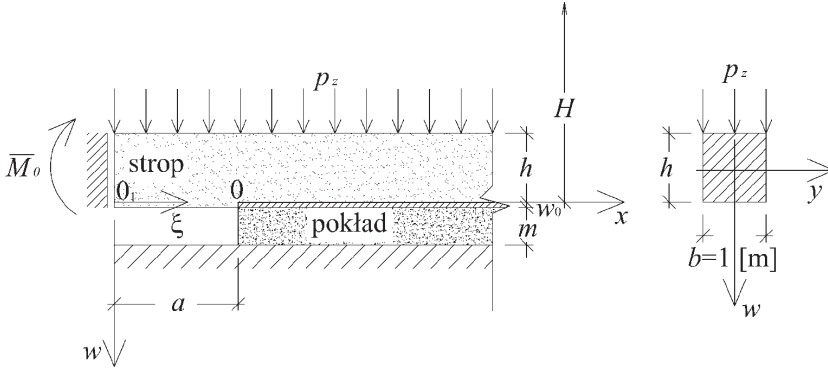
Rys. 1. Wyrobisko korytarzowe

\* Katedra Geomechaniki, Budownictwa i Geotechniki – Wydział Górnictwa i Geoinżynierii AGH

Pomiędzy stropem a pokładem jest kontakt dwuparametrowy typu Wieghardta

$$r(x, y) = cw(x, y) - c_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

Układ podstawowy, przyjęty do obliczeń, przedstawia rysunek 2.



Rys. 2. Schemat statyczny

## 2. Część obliczeniowa

Dla części stropu z przedziału  $0 \leq \xi \leq a$  możemy napisać:

$$\begin{cases} EJw''(\xi) = -M(\xi) = \frac{p_z \xi^2 b}{2} - \bar{M}_0 \\ EJw'''(\xi) = -Q(\xi) = p_z \xi b \\ EJw'(\xi) = \bar{A}_1 + \frac{p_z \xi^3}{6} b - \bar{M}_0 \xi \\ EJw(\xi) = \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \xi + \frac{p_z \xi^4 b}{24} - \frac{\bar{M}_0 \xi^2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Ponieważ  $w'(\xi=0) = 0$ , to stała  $\bar{A}_1$  jest równa zero. Stała  $\bar{A}_2$  i nieznaną moment  $\bar{M}_0$  będą wyznaczone z warunków zszycia w punkcie  $\xi = a \Leftrightarrow x = 0$ .

I tak:

$$\begin{cases} M(\xi=a) = -\frac{p_z a^2 b}{2} + \bar{M}_0 \\ Q(\xi=a) = -p_z a b \\ w'(\xi=a) = \left( \frac{p_z a^3 b}{6} - \bar{M}_0 a \right) \frac{1}{EJ} \\ w(\xi=a) = \left( \bar{A}_2 + \frac{p_z a^4 b}{24} - \frac{\bar{M}_0 a^2}{2} \right) \frac{1}{EJ} \end{cases} \quad (3)$$

Dla części stropowej  $0 \leq x < \infty$  otrzymaliśmy równanie różniczkowe czwartego rzędu niejednorodne (por. [9]) na wyznaczenie ugięć stropu

$$\left(1 + \frac{c_1 kb}{GF}\right) w^{IV}(x) - \left(\frac{bc_1}{EJ} + \frac{ckb}{GF}\right) w''(x) + \frac{bc}{EJ} w(x) = \frac{b}{EJ} p_z \quad (4)$$

W równaniu (4) oznaczono:

$GF$  — sztywność belki na ścinanie [ $\text{Nm}^2$ ],

$EJ$  — sztywność belki na zginanie [ $\text{Nm}^2$ ],

$c$  — współczynnik oporu właściwego podkładu [ $\text{N/m}^3$ ],

$c_1$  — siła naciągu membrany [ $\text{N/m}$ ],

$b$  — szerokość belki [ $\text{m}$ ],

$k$  — stała zależna od kształtu przekroju poprzecznego belki dla przekroju poprzecznego

$k = 1, 2$ .

Równanie charakterystyczne, odpowiadające równaniu jednorodnemu, ma pierwiastki:

a)  $\Delta > 0 \Leftrightarrow \psi > 1$

$$r_{1,2} = \pm \beta \sqrt{\psi - \sqrt{\psi^2 - 1}} \quad (5)$$

$$r_{3,4} = \pm \beta \sqrt{\psi + \sqrt{\psi^2 - 1}}$$

b)  $\Delta = 0 \Leftrightarrow \psi = 1$

$$r_{1,3} = \beta \quad (6)$$

$$r_{2,4} = -\beta$$

c)  $\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \psi < 1$

$$r_{1,2} = \pm \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{1+\psi} - i\sqrt{1-\psi} \right)$$

$$r_{3,4} = \pm \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{1+\psi} + i\sqrt{1-\psi} \right)$$

gdzie:

(7)

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{bcGF}{EJ(GF + bc_1k)}}$$

$$\psi = \frac{b(c_1GF + ckEJ)}{\sqrt[4]{bcGF EJ(GF + bc_1k)}}$$

Całka szczególna równania (4) jest następująca

$$w_s(x) = \frac{p_z}{c} \quad (8)$$

Zatem

$$w(x) = \frac{P_z}{c} + A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x} + A_3 e^{r_3 x} + A_4 e^{r_4 x} \quad (9)$$

Stałe  $A_1$  i  $A_3$  są równe zero, co wynika z warunku  $x \rightarrow \infty$ ,  $x(\infty) = \frac{P_z}{c}$ .

Stałe  $A_2$  i  $A_4$  są wyznaczone z warunków:

$$\begin{cases} EJw''(x=0) = -M(x=0) = -M(\xi=a) = -\left(\frac{p_z a^2 b}{2} - \bar{M}_0\right) \\ EJw'''(x=0) = -Q(x=0) = -Q(\xi=a) = -(-p_z ab) \end{cases} \quad (10)$$

I tak dla:

a)  $\psi > 1$

$$w(x) = \frac{P_z}{c} + A_2 e^{r_2 x} + A_4 e^{r_4 x}$$

$$w'(x) = A_2 r_2 e^{r_2 x} + A_4 r_4 e^{r_4 x}$$

$$w''(x) = A_2 r_2^2 e^{r_2 x} + A_4 r_4^2 e^{r_4 x}$$

$$w'''(x) = A_2 r_2^3 e^{r_2 x} + A_4 r_4^3 e^{r_4 x}$$

$$\begin{cases} w''(0) = A_2 r_2^2 + A_4 r_4^2 = \frac{p_z a^2 b - 2\bar{M}_0}{2EJ} \\ w'''(0) = A_2 r_2^3 + A_4 r_4^3 = \frac{p_z ab}{EJ} \\ A_2 = \frac{1}{2r_2^2 (r_4 - r_2) EJ} [p_z a (abr_4 - 2b) - 2\bar{M}_0 r_4] \\ A_4 = \frac{1}{2r_4^2 (r_4 - r_2) EJ} [p_z a (2b - abr_2 + 2\bar{M}_0 r_2) \end{cases} \quad (11)$$

Ponieważ  $w'(x=0) = w'(\xi=a)$ , to stąd wyznaczono nieznan moment  $\bar{M}_0$

$$\bar{M}_0 = \frac{p_z a^2 b}{6} \left[ 1 + \frac{2}{1 + \frac{3 - r_2 r_4 a^2}{(r_2 + r_4) a - 3}} \right] \quad (12)$$

Podstawiając (12) do (11), otrzymujemy wzory na ugięcie  $w(x)$ , kąt obrotu  $\varphi(x) = w'(x)$ , odpór podłoża  $r(x) = cw(x) - c_1 w''(x)$ , moment zginający  $M(x) = -EJw''(x)$ , siłę tnącą  $Q(x) = -EJw'''(x)$

b)  $\psi = 1$

$$w(x) = \frac{P_z}{c} + (A_2 + A_4 x)e^{-\beta x}$$

$$w'(x) = [A_4 - \beta(A_2 + A_4 x)]e^{-\beta x}$$

$$w''(x) = \beta[-2A_4 + \beta(A_2 + A_4 x)]e^{-\beta x}$$

$$w'''(x) = \beta^2[3A_4 - \beta(A_2 + A_4 x)]e^{-\beta x}$$

$$\begin{cases} w''(0) = \beta^2 A_2 - 2\beta A_4 = \frac{p_z a^2 b - 2\bar{M}_0}{2EJ} \\ w'''(0) = -\beta^3 A_2 + 3\beta^2 A_4 = \frac{p_z ab}{EJ} \\ A_2 = \frac{p_z ab(3a\beta + 4) - 6\bar{M}_0\beta}{2\beta^2 EJ} \\ A_4 = \frac{p_z ab(a\beta + 2) - 2\bar{M}_0\beta}{2\beta^2 EJ} \end{cases} \quad (13)$$

$$w'(x=0) = w'(\xi=a) \Rightarrow \bar{M}_0 = \frac{p_z a^2 b}{6} \left[ 1 + \frac{2}{\frac{(a\beta + 2)\beta a}{a\beta + 3}} \right] \quad (14)$$

Również i w tym przypadku wstawiając (14) do (13), otrzymujemy wyznaczone interesujące nas wielkości.

c)  $0 < \psi < 1$

$$\lambda = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \psi}$$

$$\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \psi}$$

$$w(x) = \frac{P_z}{c} + (A_2 \cos \gamma x + A_4 \sin \gamma x)e^{-\lambda x}$$

$$w'(x) = [(\gamma A_4 - \lambda A_2) \cos \gamma x - (\lambda A_4 + \gamma A_2) \sin \gamma x]e^{-\lambda x}$$

$$w''(x) = \{[(\lambda^2 - \gamma^2)A_2 - 2\lambda\gamma A_4] \cos \gamma x + [(\lambda^2 - \gamma^2)A_4 + 2\lambda\gamma A_2] \sin \gamma x\}e^{-\lambda x}$$

$$w'''(x) = -\{[\lambda(\lambda^2 - 3\gamma^2)A_2 - \gamma(3\lambda^2 - \gamma^2)A_4] \cos \gamma x + [\lambda(\lambda^2 - 3\gamma^2)A_4 + \gamma(3\lambda^2 - \gamma^2)A_2] \sin \gamma x\}e^{-\lambda x} \quad (15a)$$

$$\begin{cases} w''(0) = (\lambda^2 - \gamma^2)A_2 - 2\lambda\gamma A_4 = \frac{p_z a^2 b - 2\bar{M}_0}{2EJ} \\ w'''(0) = -\lambda(\lambda^2 - 3\gamma^2)A_2 + \gamma(3\lambda^2 - \gamma^2)A_4 = \frac{p_z ab}{EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = \frac{1}{2(\lambda^2 + \gamma^2)^2 EJ} \{p_z ab[(3\lambda^2 - \gamma^2)a + 4\lambda] - 2(3\lambda^2 - \gamma^2)\bar{M}_0\} \\ A_4 = \frac{1}{2\gamma(\lambda^2 + \gamma^2)^2 EJ} \{p_z ab[(2(\lambda^2 - \gamma^2) + \lambda(\lambda^2 - 3\gamma^2))a] - 2\lambda(\lambda^2 - 3\gamma^2)\bar{M}_0\} \end{cases} \quad (15b)$$

$$w'(x=0) = w''(\xi=a) \Rightarrow \bar{M}_0 = \frac{p_z a^2 b}{6} \left[ 1 + \frac{2}{\frac{(\lambda^2 + \gamma^2)a^2 + 2\lambda a}{2\lambda a + 3}} \right] \quad (16)$$

Wstawiając (16) do (15), otrzymujemy końcowe wzory na wyznaczenie ugięć  $w(x)$ , kąta obrotu  $\varphi(x) = w'(x)$ , odporu podłoża  $r(x) = cw(x) - c_1 w''(x)$ , momentu zginającego  $M(x) = -EJw''(x)$  i siły tnącej  $Q(x) = -EJw'''(x)$

### 3. Energia sprężysta połowy stropu nad wybranym węglem $0 \leq \xi \leq a$ (rys. 1)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2EJ} \int_0^a M^2(\xi) d\xi + \frac{1,2(1+\nu)}{6} \int_0^a Q^2(\xi) d\xi = \\ &= \frac{\bar{M}_0^2 a}{2EJ} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{p_z a^2 b}{\bar{M}_0} \right) + \frac{1}{20} \left( \frac{p_z a^2 b}{\bar{M}_0} \right)^2 + \frac{1+\nu}{15} \left( p_z \frac{ahb}{\bar{M}_0} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Energia zmiany objętości

$$\begin{aligned} W_V &= \frac{1-2\nu}{6EJ} \int_0^a M^2(\xi) d\xi = \\ &= \frac{(1-2\nu)\bar{M}_0^2 a}{6EJ} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{p_z a^2 b}{\bar{M}_0} \right) + \frac{1}{20} \left( \frac{p_z a^2 b}{\bar{M}_0} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Energia zmiany postaci

$$\begin{aligned} W_f &= W - W_V = \\ &= \frac{1+\nu}{3EJ} \bar{M}_0^2 a \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{p_z a^2 b}{\bar{M}_0} \right) + \frac{1}{20} \left( \frac{p_z a^2 b}{\bar{M}_0} \right)^2 + \frac{1}{10} \left( \frac{p_z ahb}{\bar{M}_0} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (19)$$

## 4. Obliczenie długości $a$

W pracy [9] autorzy wykazali, że do obliczenia długości granicznej stropu nad wybranym pokładem powinno się korzystać z hipotezy wyężeniowej największych naprężeń stycznych

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R_k \quad (20)$$

Z wzoru (20) wyznaczono

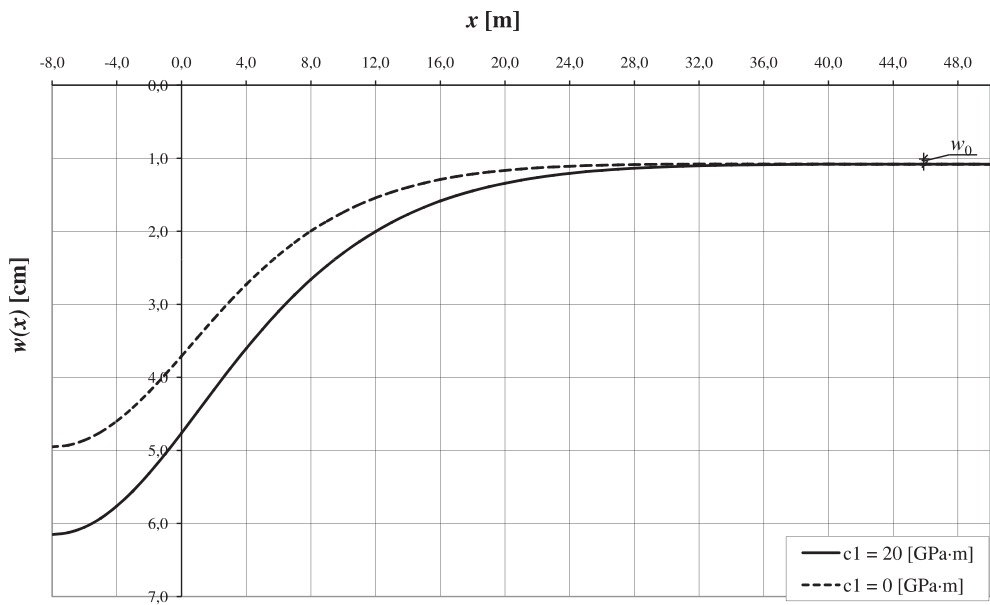
$$a_{gr} \leq \sqrt{\frac{27}{32}} \left( \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{16 R_k}{27 p_z}\right)^2} - 1} \right) \cdot h \quad (21)$$

## 5. Przykład obliczeniowy

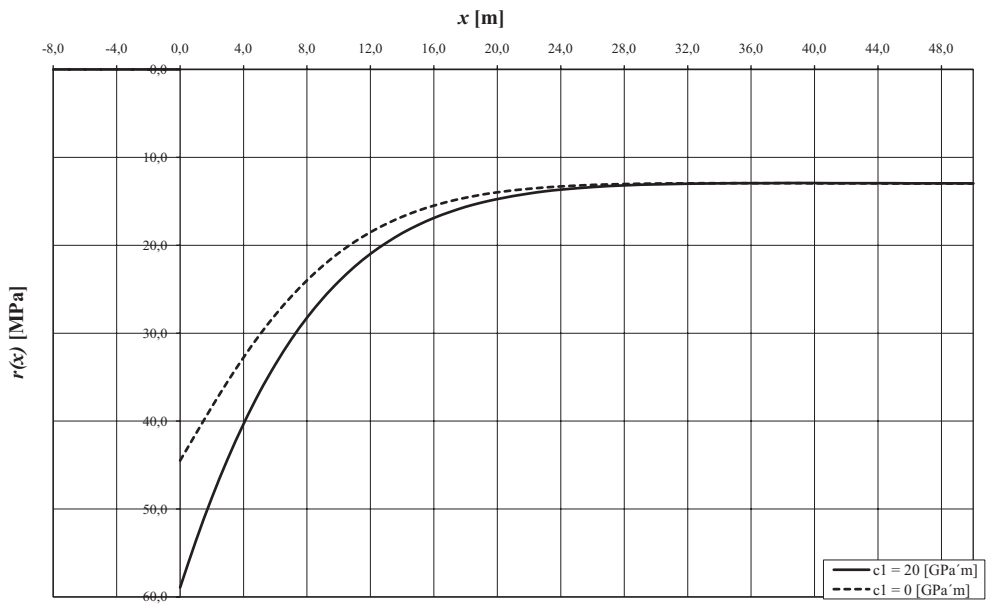
- miąższość węgla  $m = 2,5$  m;
- moduł  $E' = 3$  GPa;
- współczynnik oporu  $c = \frac{E'}{m} = 1,2$  GPa/m;
- strop z łupku piaszczystego  
 $h = 12$  m,  $\nu = 0,3$ ,  
 $E = \frac{E'}{1 - \nu^2} = 7$  GPa,  
 $G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 2,7$  GPa,  
na głębokości  $H = 500$  m,  
ciśnienie  $p_z = 13$  MPa;
- wymiar  $a$  wyznaczamy z hipotezy C-T-G  $a_{gr} = 8,039$  m, przyjęto  $a = 8$  m;
- siła naciągu  $c_1 = 20$  GPa·m;
- wytrzymałość obliczeniowa  $R_g R_K = 16$  MPa;
- szerokość belki stropowej  $b = 1$  m.

Na rysunkach 3–6 podano rozwiązanie w formie graficznej. Są to wykresy przemieszczeń, oporu gruntu, momentu zginającego i siły tnącej.

Linia ciągła odpowiada podłożu Wiegharda, przerywana zaś – podłożu Winklera

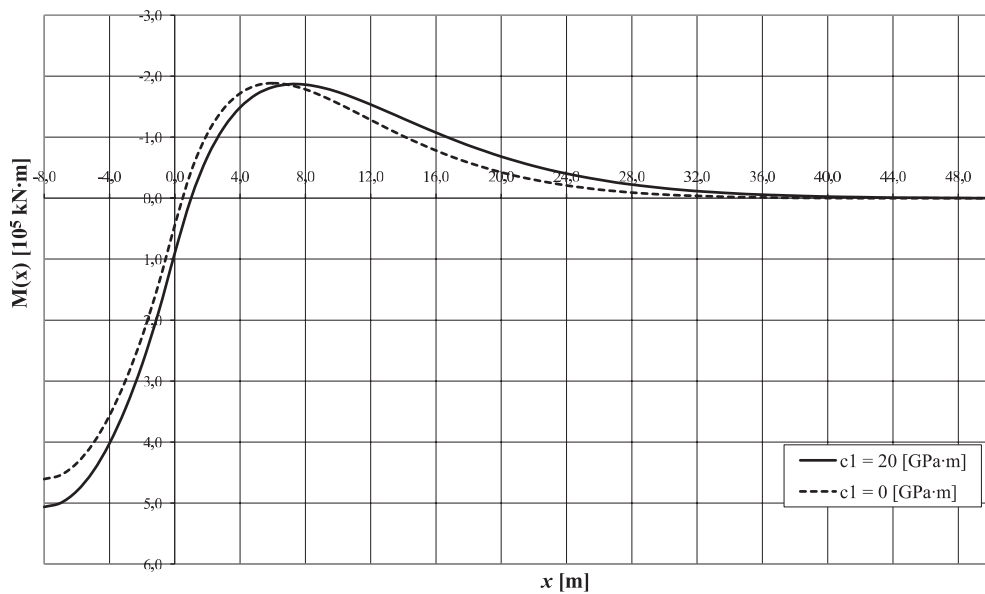


Rys. 3. Ugięcie podłoża

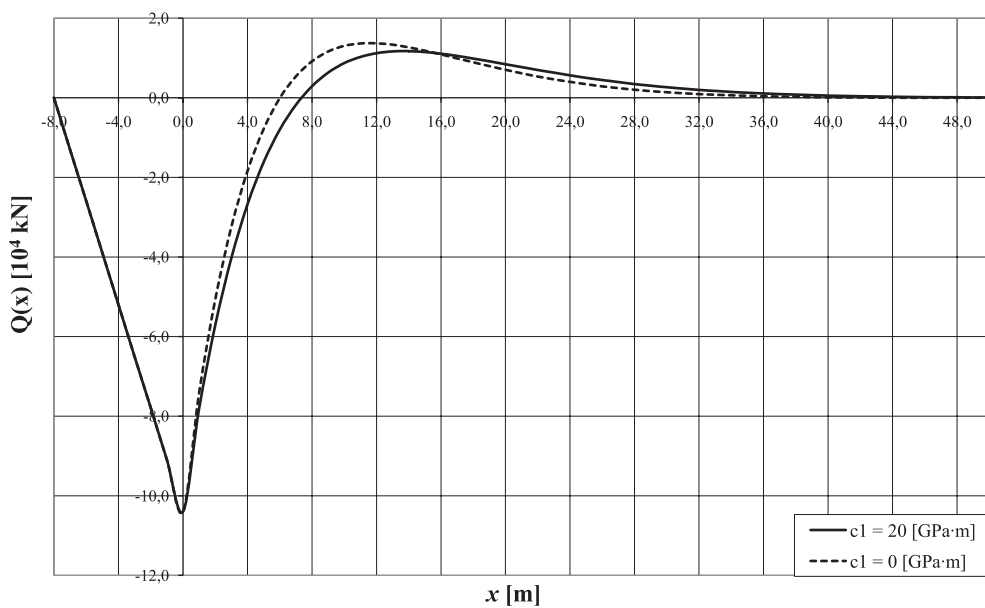


Rys. 4. Odpór podłoża





Rys. 5. Moment zginający



Rys. 6. Siła tnąca

## 6. Podsumowanie

W pracy pokazano, że nieklasyczny problem belki spoczywającej na podłożu dwuparametrowym typu Wieghardta ma ściśle zamknięte rozwiązanie w klasie funkcji elementarnych. Ugięcie stropu dla podłoża dwuparametrowego jest większe niż dla podłoża Winklera. Widać wyraźną różnicę w wykresach sił przekrojowych co przemawia za podłożem dwuparametrowym.

### LITERATURA

- [1] *Cała M., Flisiak J., Tajduś A.*: Mechanizm współpracy kotwi z górotworem o zróżnicowanej budowie. Biblioteka Szkoły Eksploatacji Podziemnej. Seria z lampką górniczą. Nr 8, Kraków 2001
- [2] *Derski W., Izbicki R., Kisiel I., Mróz Z.*: Mechanika skał i gruntów. PWN, Warszawa 1982
- [3] *Galczyński S.*: Podstawy budownictwa podziemnego. Oficyna Wyd. Pol. Wrocław, Wrocław 2001
- [4] *Gryczmański M., Jurczyk P.*: Modele podłoża gruntowego. Inżynieria i Budownictwo, Nr 2/95, Warszawa 1995
- [5] *Korman S.*: Wartości współczynników sprężystości w górotworze. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa, Kraków 1955
- [6] *Krzyś W., Życzkowski M.*: Sprężystość i plastyczność. PWN, Warszawa 1962.
- [7] *Ozog T.*: Ugięcie stropu przy uwzględnieniu sił ścinających. Zeszyty Problemowe Górnictwa. PAN, Vol. 3, Nr 1
- [8] *Paluch M.*: Podstawy teorii sprężystości i plastyczności z przykładami. Wyd. P.K., Kraków 2006
- [9] *Paluch M., Tajduś A.*: Analiza wytrzymałościowa stropu będącego w kontakcie dwuparametrowym z podkładem przy eksploatacji na zawał. Górnictwo i Geoinżynieria (Kwartalnik AGH), r. 32, z. 1, Kraków 2008.
- [10] *Piechnik S.*: Mechanika techniczna ciała stałego. Wyd. P.K., Kraków 2007
- [11] *Sałustowicz A.*: Zarys mechaniki górotworu. Wyd. „Śląsk”, Katowice 1968