

POLA ELEKTROMAGNETYCZNE ŹRÓDEŁ DIPOLOWYCH

Electromagnetic fields of dipole sources

Juliusz MIECZNIK

*AGH Akademia Górniczo-Hutnicza,
Wydział Geologii, Geofizyki i Ochrony Środowiska; al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków;
e-mail: j_miecznik@poczta.onet.pl*

Treść: Na podstawie wzorów Maxwella wyprowadzono funkcje, które spełniają równania pola elektrycznego i magnetycznego. W przypadku pól harmonicznie zmiennych w czasie są to tzw. równania falowe. Do różnorodnych zadań geofizycznych opartych na analizie zmiennych w czasie pól elektromagnetycznych wykorzystuje się funkcje potencjalne: potencjał wektorowy i skalarny, które spełniają również równanie falowe. Potencjały wektorowy i skalarny są związane z polem elektrycznym i magnetycznym odpowiednimi równaniami. Aby określić pole elektromagnetyczne w ośrodkach niejednorodnych, należy uwzględnić warunki graniczne, które muszą spełniać wektory pola elektrycznego i magnetycznego, oraz potencjał wektorowy. Podano związki analityczne dla składowych pola elektromagnetycznego w przypadku dipola elektrycznego i magnetycznego w jednorodnej przestrzeni i półprzestrzeni. Określono parametry realnych układów pomiarowych spełniających warunki dipola elektrycznego i magnetycznego. Scharakteryzowano tzw. strefę bliską i daleką pomiarów elektromagnetycznych i podano związki analityczne dla składowych pola w tych strefach. Scharakteryzowano również pole elektromagnetyczne dla źródeł wykorzystywanych w praktyce, a mianowicie dla nieskończonego długiego kabla i nieuziemionej pętli.

Słowa kluczowe: dipol elektryczny, dipol magnetyczny, potencjał skalarny, potencjał wektorowy, strefa bliska, strefa daleka, impedancja

Abstract: Equations satisfied by vectors of electric and magnetic field were derived based on Maxwell's equations. In the case of time-dependent harmonic fields these are so called wave equations. Potential functions, i.e. vector potential and scalar potential, that also satisfy the wave equation were used. Vector and scalar potentials are related with electric and magnetic field by means of a number of equations. To determine the electromagnetic field in a non-homogeneous medium one should define the boundary conditions for vectors of electric and magnetic field and vector potential. The paper presents analytical formulae for EM field components for electric dipole and magnetic dipole in a homogeneous space and half-space. Parameters of real measurement arrays that fulfill conditions of electric dipole and magnetic dipole are given. So called near zone and far zone for EM survey are defined. EM field of infinitely long cable and ungrounded loop is characterized.

Key words: electric dipole, magnetic dipole, scalar potential, vector potential, near zone, far zone, impedance

FUNKCJE POTENCJALNE

Podstawą teorii dowolnie zmiennych w czasie pól elektromagnetycznych są równania Maxwella, które można zapisać w następującej postaci:

$$\nabla \times H = j + \dot{D} \quad (1a)$$

$$\nabla \times E = -\dot{B} \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot D = \delta \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1d)$$

oraz tzw. równania materiałowe:

$$j_i = \sigma_{ik} \cdot E_k \quad (2a)$$

$$D_i = \varepsilon_{ik} \cdot E_k \quad (2b)$$

$$B_i = \mu_{ik} \cdot H_k \quad (2c)$$

gdzie: E i H oznaczają, odpowiednio, wektory pola elektrycznego i magnetycznego, D i B – wektory indukcji elektrycznej i magnetycznej, j , σ , ε , μ , δ oznaczają, odpowiednio, gęstość prądu, przewodnictwo elektryczne ośrodka, jego przenikalność dielektryczną i magnetyczną oraz gęstość objętościową ładunków elektrycznych, ∇ oznacza operator różniczkowy nabra, a symbol kropki – pochodną po czasie.

W praktyce badań geofizycznych wykorzystujemy bardzo często pola harmonicznymie zależne od czasu, opisane czynnikiem $e^{-i\omega t}$, gdzie ω – częstotliwość zmian pola, t – czas. Obliczając dywergencję pierwszego równania Maxwella (1a), łatwo dowieść, że dla czasu większego od 10^{-7} s, jaki upłynął od momentu wzbudzenia pola w ośrodku przewodzącym, gęstość objętościowa ładunków elektrycznych $\delta \rightarrow 0$. W związku z powyższym dla pól harmonicznymie zmiennych w czasie równania Maxwella przyjmują następującą postać:

$$\nabla \times H = \sigma_k E = -\omega \varepsilon_k E \quad (3a)$$

$$\nabla \times E = i\omega \mu H \quad (3b)$$

$$\nabla \cdot D = 0 \quad (3c)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3d)$$

gdzie $\sigma_k = \sigma - i\omega\varepsilon$ jest zespoloną przewodnością elektryczną ośrodka, a $\varepsilon_k = \varepsilon - \frac{\sigma}{i\omega}$ jest zespoloną przenikalnością dielektryczną.

Układ równań (3) pozwala sformułować równania różniczkowe, które spełnia wektor E i H . Jeżeli obliczymy obustronnie rotację pierwszego (3a) i drugiego (3b) równania, wykorzystamy pozostałe równania układu (3) oraz uwzględnimy zależność rachunku wektorowego $\nabla \times \nabla \times \Phi = \nabla \nabla \cdot \Phi - \Delta \Phi$, gdzie Φ jest dowolnym wektorem, otrzymamy wówczas:

$$\Delta H + k^2 H = 0, \quad \Delta E + k^2 E = 0 \quad (4)$$

gdzie

$$k^2 = i\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu \quad (5a)$$

lub

$$k^2 = \omega^2\varepsilon_k\mu = i\omega\mu\sigma_k \quad (5b)$$

jest tzw. liczbą falową ośrodka. Jest to wielkość zespolona, którą możemy przedstawić w postaci

$$k = a + b \cdot i \quad (6)$$

Zakładając, że a i b są wielkościami dodatnimi, z równań (5) i (6) otrzymujemy:

$$a = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\mu}\right)^2} + 1 \quad (7)$$

$$b = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \quad (8)$$

W celu rozwiązania zadania geofizycznego metodą zmiennych pól elektromagnetycznych należy rozwiązać odpowiednie równania falowe (4) przy warunkach nałożonych na źródło pola i warunkach na poszczególnych granicach nieciągłości ośrodka.

Do różnorodnych zadań opartych na analizie zmiennych w czasie pól elektromagnetycznych wykorzystuje się również funkcje potencjalne. Wychodzimy z równania (3d) – które przy założeniu, że przenikalność magnetyczna nie jest funkcją położenia, tzn. $\mu = \text{const}$, możemy napisać w postaci $\nabla \cdot H = 0$ – świadczącego o wirowym charakterze pola magnetycznego, źródłem którego może być np. dipol elektryczny. Wektor natężenia tego pola H możemy wówczas wyrazić poprzez rotację tzw. **potencjału wektorowego** A , czyli

$$H = \nabla \times A \quad (9)$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do drugiego równania Maxwella (3b), otrzymamy $\nabla \times (E - i\omega\mu A) = 0$. Jeżeli rotacja pewnego wektora równa się zero, to można go przedstawić jako gradient pewnej skalarnej funkcji. Wprowadzimy pomocniczą funkcję nazywaną **potencjałem skalarnym typu elektrycznego** U . Jeżeli oznaczymy

$$\nabla U = -(E - i\omega\mu A) \quad (10)$$

a następnie wyznaczmy z tego równania E i podstawimy do pierwszego równania (3a), to po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\nabla(\nabla \cdot A + \sigma_k U) - \Delta A = i\omega\mu\sigma_k A \quad (11)$$

Ostatnie równanie jest niejednoznaczne, ponieważ $\nabla(U + \text{const}) = \nabla U$ i $\nabla \times (A + \nabla f) = 0$, gdzie f – funkcja dowolnej zmiennej.

Aby usunąć niejednoznaczność określenia funkcji potencjalnych U i A , należy na nie nałożyć dodatkowy warunek, zwany warunkiem kalibracji. Dogodną formę warunku kalibracji jest równanie (Chmielovskoj 1971)

$$\nabla \cdot A + \sigma_k U = 0 \quad (12)$$

Obliczając obustronnie dywergencję równania (10) oraz uwzględniając (5a), (3c) i (1a), otrzymamy

$$\nabla \cdot A = -\frac{k^2}{i\omega\mu} U \quad (13)$$

oraz:

$$\Delta A + k^2 A = 0 \quad (14)$$

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad (15)$$

Tak więc wektory pola elektrycznego E , magnetycznego H oraz funkcje potencjalne typu elektrycznego, wektorowa A i skalarowa U , spełniają równanie falowe. Uwzględniając równania (10) i (13), wektor pola elektrycznego możemy wyrazić podobnie jak wektor pola magnetycznego poprzez potencjał wektorowy A

$$E = i\omega\mu(A + k^{-2}\nabla\nabla \cdot A) \quad (16)$$

Wychodząc z równania $\nabla \cdot E = 0$, wskazującego na wirowy charakter pola elektrycznego, można wprowadzić nowe funkcje potencjalne: **potencjał wektorowy** A^* i **potencjał skalarny** U^* **typu magnetycznego**, ponieważ za ich pomocą opisujemy pole, którego źródłem jest dipol magnetyczny.

Z równania $\nabla \cdot E = 0$ wynika bezpośrednio, że

$$E = \nabla \times A^* \quad (17)$$

Wstawiając to wyrażenie do równania (3a), otrzymamy $\nabla \times (H - \sigma_k A^*) = 0$ i dlatego wyrażenia pod znakiem rotacji możemy przedstawić jako gradient funkcji skalarnej U^* , tzn.

$$\nabla U^* = H - \sigma_k A^* \quad (18)$$

Jeżeli określimy z tego wyrażenia H i podstawimy je do równania (3b), otrzymamy

$$\nabla \times \nabla \times A^* = i\omega\mu\sigma_k A$$

lub

$$\nabla(\nabla \cdot A - i\omega\mu U^*) = \Delta A^* + k^2 A^* \quad (19)$$

W celu uniknięcia wieloznaczności rozwiązania, podobnie jak w przypadku funkcji typu elektrycznego, przyjmujemy

$$\nabla \times A^* = i\omega\mu U^* \quad (20)$$

a w związku z powyższym

$$\Delta A^* + k^2 A^* = 0 \quad (21)$$

Obliczając obustronnie dywergencję równania (18) oraz uwzględniając (3d) i (19), otrzymamy

$$\Delta U^* + k^2 U^* = 0 \quad (22)$$

Uwzględniając (18), (19) i (5a), pole magnetyczne możemy wyrazić poprzez potencjał wektorowy A^*

$$H = -i\omega\varepsilon_k (A^* + k^{-2}\nabla\nabla \cdot A^*) \quad (23)$$

Porównując pierwsze i drugie równanie Maxwella (3a) i (3b), wyrażenia (9) i (17) oraz (16) i (23), można stwierdzić ich tożsamość pod warunkiem dokonania zamiany:

$$H \Leftrightarrow E, \quad A \Leftrightarrow A^*, \quad U \Leftrightarrow -\varepsilon_k \quad (24)$$

W ten sposób rozwiązanie zadania geofizycznego dla ośrodków izotropowych przy wykorzystaniu harmonicznie zmiennych pól elektromagnetycznych sprowadza się do rozwiązania równania falowego potencjału wektorowego typu elektrycznego A lub magnetycznego A^* (w zależności od charakteru źródła pola), a następnie do obliczenia wektorów pola elektrycznego E i magnetycznego H . Wektory pola elektromagnetycznego, a więc i potencjału wektorowego, muszą spełniać odpowiednie warunki na granicach nieciągłości ośrodka niejednorodnego.

WARUNKI GRANICZNE POTENCJAŁU WEKTOROWEGO

Aby określić pole elektromagnetyczne w ośrodkach niejednorodnych ze skokową zmianą parametrów elektrycznych i magnetycznych ośrodka, należy uwzględnić warunki graniczne, które muszą spełniać wektory pola elektrycznego E i magnetycznego H . Warunki te to ciągłość składowych stycznych (w stosunku do granicy rozdziału) pola elektrycznego i magnetycznego, tzn.

$$H_{t1} = H_{t2} \quad E_{t1} = E_{t2} \quad (25)$$

oraz ciągłość składowej normalnej wektora indukcji magnetycznej

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} \quad (26)$$

W nieskończoności od źródła przyjmujemy warunek wypromieniowania pola, tzn. maleńie jego natężenia najczęściej według funkcji eksponencjalnej. Skoro przy rozwiązywaniu zadań elektrodynamiki, zgodnie ze wzorami (9), (16), (17) i (23), posługujemy się potencjałem wektorowym, zachodzi konieczność określenia warunków granicznych tej funkcji.

Niech osie x i y kartezjańskiego układu współrzędnych leżą w płaszczyźnie stycznej do granicy rozdziału, a oś z jest do niej prostopadła. Wówczas warunki graniczne (25) i (26) przyjmują postać:

$$H_{x1} = H_{x2}, \quad H_{y1} = H_{y2}, \quad \mu_1 H_{z1} = \mu_2 H_{z2}, \quad E_{x1} = E_{x2}, \quad E_{y1} = E_{y2} \quad (27)$$

Jeżeli do równań (9) i (16) zastosujemy zasady rachunku wektorowego oraz wykorzystamy równanie (27), to po pewnych przekształceniach otrzymamy dla warunków granicznych potencjału wektorowego typu elektrycznego A następujące równania:

$$\begin{aligned} A_{y1,z} = A_{y2,z}, \quad A_{x1,z} = A_{x2,z}, \quad \mu_1 A_{x1} = \mu_2 A_{x2}, \quad \mu_1 A_{y1} = \mu_2 A_{y2}, \\ A_{z1} = A_{z2}, \quad \frac{1}{\epsilon_{k1}} \nabla \cdot A_1 = \frac{1}{\epsilon_{k2}} \nabla \cdot A_2 \end{aligned} \quad (28)$$

W podobny sposób otrzymamy wyrażenia dla warunków granicznych potencjału wektorowego typu magnetycznego A^* , jeżeli wykorzystamy równania (24) i w układzie równań (28) dokonamy zamiany A na A^* oraz μ na $-\varepsilon_k$.

POLE DIPOLA ELEKTRYCZNEGO I MAGNETYCZNEGO W JEDNORODNEJ PRZESTRZENI

Źródłami zmiennych pól elektromagnetycznych są dipole: elektryczny i magnetyczny. Dipolem elektrycznym (lub wibratorem Hertza) jest krótki odcinek przewodu elektrycznego, uziemiony na końcach i zasilany harmonicznie zmiennym prądem. Dipolem magnetycznym może być nieuziemiona pętla zasilana również prądem harmonicznie zmiennym. Uziemione przewody elektryczne lub nieuziemione pętle można wówczas uznać za dipole elektryczne lub magnetyczne, jeżeli ich rozmiary: długość lub średnica, są znacznie mniejsze w porównaniu z odległością między źródłem pola elektromagnetycznego a punktem rejestracji tego pola.

W początku kartezjańskiego układu współrzędnych x, y, z znajduje się elementarny odcinek przewodu elektrycznego dz , zorientowanego wzdłuż osi z . W przewodzie płynie prąd stały o natężeniu I (częstotliwość $\omega \rightarrow 0$). Zgodnie z prawem Biota–Savarta pole magnetyczne takiego dipola leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi z i w sferycznym układzie współrzędnych (r, Q, φ) (Fig. 1) określone jest wzorem

$$H_\varphi = \frac{Idz}{4\pi} \cdot \frac{\sin Q}{r^2} \quad (29)$$

Ze wzoru tego wynika, że pole magnetyczne ma tylko składową styczną do linii sił pola H_φ , leżącą w płaszczyźnie prostopadłej do osi z , a pozostałe składowe: H_z oraz H_Q i H_r , w układzie sferycznym są równe zero.

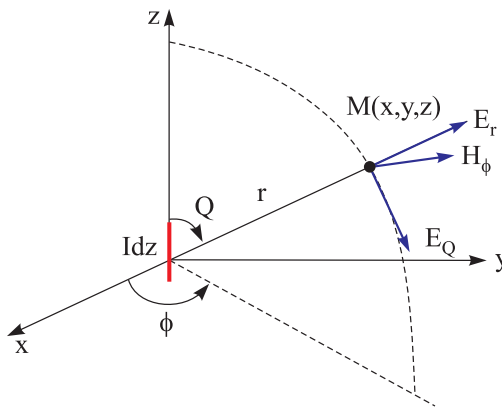


Fig. 1. Pole elektromagnetyczne dipola elektrycznego w jednorodnej przestrzeni

Fig. 1. Electromagnetic field of electric dipole in homogeneous space

Wychodząc z równania $H = \nabla \times A$ oraz zakładając warunki osiowej symetrii składowych A_Q , A_r i A_φ potencjału A , tzn. $\frac{\partial A_Q}{\partial \varphi} = \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = 0$, otrzymujemy układ równań różniczkowych pierwszego stopnia, którego rozwiązanie daje następujące wyrażenia składowych potencjału wektorowego

$$A_r = \frac{Idz}{4\pi} \cdot \frac{\cos Q}{r}, \quad A_Q = \frac{Idz}{4\pi} \cdot \frac{\sin Q}{r}, \quad A_\varphi = 0 \quad (30)$$

Z tych wyrażen otrzymujemy:

$$A_z = \frac{Idz}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}, \quad A_x = 0 = A_y \quad (31)$$

Tak więc potencjał wektorowy dipola prądu stałego ma tylko jedną składową zorientowaną wzdłuż osi z i zależną od odległości od początku układu r .

Potencjał wektorowy dipola elektrycznego

Potencjał wektorowy A_z (wzór (31)) jest granicznym wyrażeniem potencjału wektorowego dipola elektrycznego prądu zmiennego w jednorodnej przestrzeni. Fale generowane przez taki dipol mają symetrię sferyczną, zależne są tylko od odległości od środka dipola r . W układzie sferycznym równanie falowe (14) przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(A \cdot r) + k^2(A \cdot r) = 0 \quad (32)$$

Ogólnym rozwiązaniem powyższego równania jest wyrażenie

$$A = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (33)$$

Korzystając z prezentacji liczby falowej w postaci (6) oraz z warunku wygasania pola elektromagnetycznego w nieskończoności, musimy założyć, że $C_2 = 0$, bowiem

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-ikr}}{r} = \infty.$$

Tak więc dla potencjału wektorowego mamy

$$A = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} \quad (34)$$

Gdy $\omega = 0$, z porównania wzorów (31) i (34) otrzymujemy $C_1 = \frac{Idz}{4\pi}$.

Ostatnie wyrażenie świadczy o tym, że źródłem sferycznej fali elektromagnetycznej, harmonicznie zmiennej w czasie, jest dipol elektryczny. Z tego powodu wyrażenie (34) nazywamy potencjałem wektorowym prądu elektrycznego.

Pole elektromagnetyczne dipola elektrycznego w jednorodnej przestrzeni

Z powyższych rozważań wynika, że w jednorodnej przestrzeni potencjał wektorowy elektrycznego dipola prądu zmiennego w kartezjańskim układzie współrzędnych ma postać:

$$A_x = A_y = 0, \quad A_z = \frac{Idz}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \quad (35)$$

a w sferycznym układzie współrzędnych:

$$A_r = \frac{Idz}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \cos Q, \quad A_Q = \frac{-Idz}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \sin Q, \quad A_\varphi = 0 \quad (36)$$

Wykorzystując wyrażenia rotacji w układzie sferycznym, wzory (36) oraz warunki symetrii osiowej $A_{r,\varphi} = A_{Q,\varphi} = 0$ składowych pola magnetycznego, otrzymamy:

$$H_\varphi = \frac{Idz}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} (1 - ikr) \sin Q, \quad H_r = H_Q = 0 \quad (37)$$

W celu określenia składowych elektrycznych pola elektromagnetycznego posłużmy się równaniem (16), wykorzystując wyrażenia składowych gradientu funkcji skalarnej w układzie sferycznym, otrzymamy:

$$\begin{aligned} E_r &= i\omega\mu \left(A_r + k^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \nabla \cdot A \right) \\ E_\varphi &= i\omega\mu \left(A_\varphi + k^{-2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial Q} \nabla \cdot A \right) \\ E_Q &= i\omega\mu \left(A_Q + k^{-2} \frac{1}{r \sin Q} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla \cdot A \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Dla dywergencji wektora A w sferycznym układzie współrzędnych, uwzględniając (36), otrzymamy

$$\nabla \cdot A = \frac{-Idz}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikr}}{r^2} \cos Q (1 - ikr) \quad (39)$$

Biorąc pod uwagę (37), (38) oraz (39), dla składowych pola elektromagnetycznego otrzymujemy:

$$E_r = \frac{-Idz}{4\pi} \cdot 2i\omega\mu \cos Q \frac{e^{ikr}}{k^2 r^3} (1 - ikr) \quad (40)$$

$$E_Q = \frac{-Idz}{4\pi} i\omega\mu \sin Q \frac{e^{ikr}}{k^2 r^3} (1 + k^2 r^3 - ikr) \quad (41)$$

$$H_\varphi = \frac{Idz}{4\pi} \cdot \sin Q \frac{e^{ikr}}{r^2} (1 - ikr) \quad (42)$$

Jeżeli przyjmiemy, że prąd $I = -\frac{d}{dt}(q_0 e^{-i\omega t})$, gdzie q_0 jest amplitudą ładunku, przepływa przez dipol elektryczny, wówczas równania (40)–(42) możemy przepisać w postaci:

$$E_r = 2q_0 \frac{dz}{4\pi} \omega^2 \mu \frac{e^{ibr}}{k^2 r^3} \cos Q (1 - ikr) \cdot e^{i(ar - \omega t)} \quad (43)$$

$$E_Q = q_0 \frac{dz}{4\pi} \omega^2 \mu \frac{e^{-br}}{k^2 r^3} \sin Q (1 + k^2 r^3 - ikr) \cdot e^{i(ar - \omega t)} \quad (44)$$

$$H_\varphi = q_0 \frac{dz}{4\pi} (i\omega) \cdot \frac{e^{-br}}{r^2} \sin Q (1 - ikr) \cdot e^{i(ar - \omega t)} \quad (45)$$

$$E_\varphi = 0, \quad H_r = H_Q = 0 \quad (46)$$

Z powyższych wzorów wynika, że pole elektryczne dipola elektrycznego leży w płaszczyźnie południkowej, natomiast pole magnetyczne w płaszczyźnie równoleżnikowej.

Ogólna postać pola elektromagnetycznego ma złożony charakter. Rozważmy szczególnie przypadki ważne dla praktyki wykorzystania pola dipola w ocenie własności fizycznych ośrodka: strefę bliską, strefę daleką i ośrodek niejednorodny.

Strefą bliską nazywamy ośrodek w pobliżu dipola, dla którego jest spełniony warunek: $|k \cdot r| \ll 1$. Skoro $k^2 = i\omega\mu\sigma + \omega^2\epsilon\mu$, to powyższy warunek jest spełniony przy małych odległościach od źródła pola r i niskich częstotliwości ω . Uwzględniając związek liczby falowej z długością fali λ ($k = 2\pi(1 - i)/\lambda$; $\lambda = \sqrt{10^7 \rho T}$; T – okres zmian pola), warunek $|k \cdot r| \ll 1$ możemy zapisać w postaci $r/\lambda \ll 1$.

W związku z powyższym równania (40)–(42) przyjmują postać:

$$E_r = \frac{-Idz}{4\pi} \cdot 2i\omega\mu \frac{\cos Q}{k^2 r^3} \quad (47)$$

$$E_Q = \frac{-Idz}{4\pi} \cdot i\omega\mu \frac{\sin Q}{k^2 r^3} \quad (48)$$

$$H_\phi = \frac{Idz}{4\pi} \cdot \frac{\sin Q}{r^2} \quad (49)$$

Porównując wyrażenia (29) i (49), stwierdzamy, że pole magnetyczne spełnia prawo Biota–Savarta dla dipola prądu stałego. Ponieważ $k^2 = i\omega\mu\sigma_k$ (5b), gdzie $\sigma_k = \sigma - i\omega\epsilon$ (znaczenie poszczególnych symboli jak we wzorach (2) i (3)) jest zespoloną przewodnością ośrodka, to równanie pola elektrycznego możemy zapisać w postaci:

$$E_r = \frac{-Idz}{2\pi} \cdot \frac{\cos Q}{\sigma_k r^3}, \quad E_Q = \frac{-Idz}{4\pi} \cdot \frac{\sin Q}{\sigma_k r^3} \quad (50)$$

Wyrażenia te są zgodne ze składowymi pola elektrycznego dipola prądu stałego.

Strefą daleką (lub falową lub promieniowania) nazywamy obszar położony w oddaleniu od dipola, dla którego jest spełniony warunek $|kr| \gg 1$. W tym przypadku wzory (40)–(42) przyjmują postać:

$$E_r = \frac{Idz}{2\pi} \omega\mu \cos Q \frac{e^{ikr}}{r^2} \quad (51)$$

$$E_Q = \frac{-Idz}{4\pi} i\omega\mu \sin Q \frac{e^{ikr}}{r} \quad (52)$$

$$H_y = \frac{-Idz}{4\pi} i \sin Q \frac{e^{ikr}}{r} \cdot k \quad (53)$$

Z opisu pola odrzucamy składową E_r , ponieważ przy dostatecznie dużych odległościach od dipola $E_r \ll E_Q$.

Pole elektromagnetyczne dipola w strefie dalekiej ma następujące właściwości:

- amplitudy składowych pola E_Q i H_ϕ maleją odwrotnie proporcjonalnie do odległości od źródła pola;
- amplitudy pola zależą od własności elektromagnetycznych ośrodka, częstotliwości zmian pola i natężenia prądu w źródle;

- fazy zmian pola $\varphi_{EQ} = ar - \pi/2$ i $\varphi_{H\varphi} = ar - \pi/2 + \text{artg} \frac{b}{a}$ rosną liniowo ze wzrostem odległości od źródła, a przesunięcie fazowe $\Delta\varphi_{EQ-H\varphi} = \text{artg} \frac{b}{a}$, gdzie a i b są częścią rzeczywistą i urojoną liczby falowej;
- wektory pola E_Q i H_φ są wzajemnie prostopadłe, co oznacza, że pole elektromagnetyczne jest falą poprzeczną, a natężenie pola jest maksymalne w płaszczyźnie równikowej ($Q = \pi/2$) i znika wzdłuż osi dipola;
- impedancja wejściowa $Z = \frac{E_Q}{H_\varphi} = \frac{\omega\mu}{k}$ jest identyczna z impedancją wejściową fali płaskiej.

W nieprzewodzącym ośrodku $\sigma = 0$, a więc $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ lub $k = \frac{\omega}{c}$, gdzie c jest prędkością światła w próżni. Pole elektromagnetyczne ma składowe E_Q i H_φ , ponieważ przy dostatecznie dużych odległościach od dipola $E_r \ll E_Q$. Amplituda pola zależy od mocy źródła i jego częstotliwości oraz jest odwrotnie proporcjonalna do odległości od źródła r . Porównując wyrażenia na składowe E_Q i H_φ (wzory (52) i (53)), zauważamy, że fazy tych wyrażeń są identyczne, a więc przesunięcie fazowe między tymi składowymi $\Delta\varphi_{EQ-H\varphi}$ się zeruje. Impedancja w nieprzewodzącym ośrodku jest wielkością stałą i wynosi $120\pi \cdot \Omega \cdot \text{m}$.

Pole elektromagnetyczne dipola magnetycznego w jednorodnej przestrzeni

Pole elektromagnetyczne dipola elektrycznego określamy za pomocą potencjału wektorowego typu elektrycznego A o symetrii sferycznej, przy czym $H = \nabla \times A$. Potencjał wektorowy możemy przedstawić w postaci

$$A = A_z = \frac{i\omega q_0 dz}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i\omega p_E}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r},$$

gdzie: $p_E = q_0 dz$ – moment dipola elektrycznego, q_0 – ładunek.

Źródłem pola elektromagnetycznego może być również dipol magnetyczny. Jego ekwiwalentem może być ramka lub zwój, przez który przepuszczamy zmienny prąd elektryczny I . Magnetyczny moment dipola zorientowany jest wzdłuż osi ramki prostopadłej do jej płaszczyzny o powierzchni S i wynosi $p_H = I \cdot S$.

Do opisu pola elektromagnetycznego wprowadzimy, podobnie jak w przypadku dipola elektrycznego, potencjał wektorowy typu magnetycznego A^* również o symetrii sferycznej, przy czym $A_x^* = A_y^* = 0$. Wychodząc z równania (3c), możemy napisać

$$E = \nabla \times A^* \tag{54}$$

Analogicznie jak w przypadku potencjału A możemy napisać

$$A_z^* = \frac{i\omega p_H}{4\pi} \frac{e^{+ikr}}{r} \quad (55)$$

Wykorzystując analogię między składowymi pola elektromagnetycznego opisanymi przez potencjał wektorowy typu elektrycznego A i magnetycznego A^* (por. wzory (24)) dla składowych pola otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$E_y = \frac{i\omega\mu(p_H)}{4\pi} \frac{e^{-br}}{r^2} \sin Q(1 - ikr) \cdot e^{i(ar - \omega t)} \quad (56)$$

$$E_r = E_Q = 0 \quad (57)$$

$$H_r = 2 \frac{p_H}{4\pi} \omega^2 \varepsilon_k \mu \frac{e^{-br}}{k^2 r^3} \cos Q(1 - ikr) \cdot e^{i(ar - \omega t)} \quad (58)$$

$$H_Q = \frac{p_H}{4\pi} \omega^2 \varepsilon_k \mu \frac{e^{-br}}{k^2 r^3} \sin Q(1 + k^2 r^3 - ikr) \cdot e^{i(ar - \omega t)} \quad (59)$$

$$H_\phi = 0 \quad (60)$$

Wartość składowych pola elektromagnetycznego różna od zera świadczy o tym, że pole elektryczne leży w płaszczyźnie równoleżnikowej, a pole magnetyczne – w płaszczyźnie południkowej (Fig. 2).

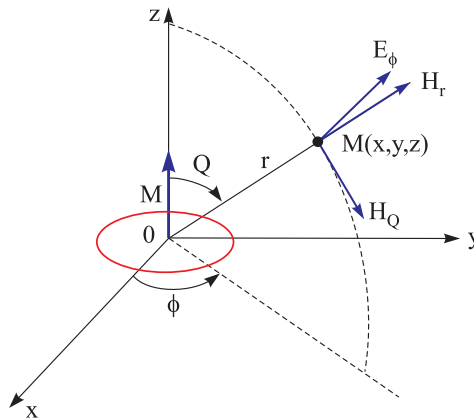


Fig. 2. Pole elektromagnetyczne dipola magnetycznego w jednorodnej przestrzeni

Fig. 2. Electromagnetic field of magnetic dipole in homogeneous space

Zachowanie się pola w strefie bliskiej, dalekiej i w ośrodku nieprzewodzącym jest takie samo jak w przypadku dipola elektrycznego z uwzględnieniem zamiany składowych elektrycznych na magnetyczne, a magnetycznych na elektryczne.

POLE NORMALNE REALNYCH ŹRÓDEŁ

Realne źródła zmiennych pól elektromagnetycznych to m.in.:

- poziomy elektryczny dipol o długości l , znacznie mniejszej od odległości r między źródłem pola elektromagnetycznego a punktem rejestracji tego pola ($l \ll r$);
- magnetyczny dipol o różnej orientacji, którego poprzeczne rozmiary są znacznie mniejsze od odległości r ;
- kable o długości znacznie przewyższającej odległość r ;
- poziome, nieuziemione pętle zasilane prądem zmiennym, których pole elektromagnetyczne badamy wewnątrz pętli lub na zewnątrz niej.

Za pole normalne będziemy przede wszystkim uważać pole elektromagnetyczne na powierzchni jednorodnej i izotropowej półprzestrzeni. Znając składowe pola normalnego: amplitudy, fazy, elementy elipsy polaryzacji itp., i porównując je z danymi pomiarowymi, można wydzielić części anomalne rejestrowanego pola, w których zawarta jest informacja o rozkładzie przewodnictwa elektrycznego badanego ośrodka.

Pole poziomego dipola elektrycznego w jednorodnej izotropowej półprzestrzeni

Na wysokości h nad granicą rozdziału dwóch półprzestrzeni o parametrach $\epsilon_0, \mu_0, \rho_0, k_0$ i $\epsilon_1, \mu_1, \rho_1, k_1$ w początku układu współrzędnych (x, y, z) (+z skierowane w dół) wzdłuż osi x umieszczony jest dipol elektryczny o długości l . Wzdłuż dipola płynie zmienny prąd o częstotliwości ω . Określmy pole elektromagnetyczne w dowolnym punkcie górnej i dolnej półprzestrzeni (Fig. 3).

Zadanie rozwiążemy przy uwzględnieniu potencjału wektorowego typu elektrycznego A . Ze względu na fakt, że wzdłuż osi y symetria ośrodka jest zachowana, potencjał A ma tylko dwie składowe A_x i A_z . Potencjał wektorowy spełnia równanie falowe (por. równanie (14)), które w cylindrycznym układzie współrzędnych (r, φ, z) – symetria ośrodka wskazuje na celowość wyboru takiego układu współrzędnych) przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - k^2 A = 0 \quad (61)$$

Równanie to możemy rozwiązać metodą rozdzielania zmiennych, przyjmując $A(r, \varphi, z) = u(r) \cdot v(\varphi) \cdot w(z)$. Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{w''}{w} - (k^2 + m^2) = 0 \quad (62)$$

$$\frac{v''}{v} + n^2 = 0 \tag{63}$$

$$u'' + \frac{u'}{r} + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \cdot u = 0 \tag{64}$$

gdzie: m, n – dowolne stałe, a indeks ' oznacza pochodną.

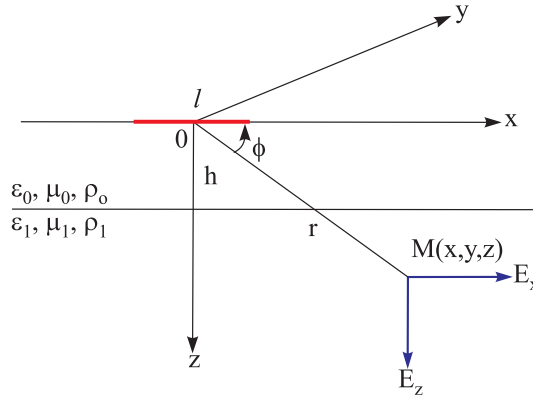


Fig. 3. Dipol elektryczny w jednorodnej izotropowej półprzestrzeni

Fig. 3. Electric dipole in homogeneous isotropic half-space

Szczególnym rozwiązaniem równań (62) i (63) są odpowiednie wyrażenia:

$$w = e^{\pm\sqrt{m^2+k^2} \cdot z}, \quad v = \cos n\varphi, \quad v = \sin n\varphi \tag{64}$$

Równanie (64) jest równaniem Bessela, którego rozwiązaniem szczególnym są funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu n argumentu (mr) – $J_n(mr)$ i $Y_n(mr)$. Rozwiązanie ogólne równania (61) musi uwzględniać warunki nałożone na pole elektromagnetyczne. Ze względu na symetrię pola względem płaszczyzny $0, x, z$ odrzucamy z rozwiązania ogólne funkcję $\sin n\varphi$. W nieskończoności pole elektromagnetyczne zanika, w związku z czym dla dodatnich wartości z odrzucamy wyrażenie $e^{z\sqrt{m^2+k^2}}$, a dla ujemnych wartości z odrzucamy wyrażenie $e^{-z\sqrt{m^2+k^2}}$. W związku z właściwościami funkcji Bessela z rozwiązania ogólnego odrzucamy funkcję $Y_n(mr)$, gdyż dla $r \rightarrow 0 Y_n(mr) \rightarrow \infty$, a potencjał wektorowy A wzdłuż osi z przyjmuje wartości skończone. W związku z powyższymi warunkami rozwiązanie ogólne potencjału A w przypadku dolnej i górnej półprzestrzeni przyjmuje postać

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \cdot \int_0^{\infty} C J_n(mr) e^{\pm z\sqrt{m^2-k^2}} dm \tag{65}$$

gdzie C jest stałą całkowania (Chmielovskoj 1971).

W kartezjańskim układzie współrzędnych potencjał wektorowy A ma dwie współrzędne A_x i A_z . Biorąc pod uwagę rozwiązania Zaborovskiego (1963), Wieszeva (1965) oraz Chmielovskiego (1971) dla składowych potencjału wektorowego możemy napisać:

– w górnej półprzestrzeni:

$$A_{x0} = \frac{Il}{4\pi R} \frac{e^{ik_0 R}}{R} + \int_0^{\infty} C_1 e^{R_{m0} z} \cdot J_0(mr) dm \quad (66)$$

$$A_{z0} = \cos \varphi \int_0^{\infty} C_2 e^{R_{m0} z} \cdot J_1(mr) dm$$

– w dolnej półprzestrzeni:

$$A_{x1} = \int_0^{\infty} C_3 e^{-R_{m1} z} \cdot J_0(mr) dm \quad (67)$$

$$A_{z1} = \cos \varphi \int_0^{\infty} C_4 e^{-R_{m1} z} \cdot J_1(mr) dm$$

gdzie: $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $R_{m0} = \sqrt{m^2 - k_0^2}$, $R_{m1} = \sqrt{m^2 - k_1^2}$.

W pierwszym wyrażeniu równania układu (66) wyodrębniono człon uwarunkowany polem elektromagnetycznym w pobliżu dipola (potencjał wektorowy w jednorodnej przestrzeni – por. wzór (35)). Stałe C_1 – C_4 wyznaczamy z warunków granicznych potencjału wektorowego (por. wzory (28)). Wykorzystując związki pomiędzy potencjałem wektorowym A a polem elektrycznym E i magnetycznym H (por. wzory (9) i (16)), składowe pola elektromagnetycznego opiszemy następującymi wyrażeniami (Zaborovskij 1963, Wieszew 1965):

$$E_x = \frac{Il\rho_1}{2\pi r^3} [3\cos^2 \varphi - 2 + (1 - ikr) \cdot e^{ik_1 r}] \quad (68)$$

$$E_y = \frac{3Il\rho_1}{2\pi r^3} \sin \varphi \cos \varphi \quad (69)$$

$$H_x = \frac{Il}{2\pi r^2} \sin \varphi \cos \varphi [8I_1 K_1 + ik_1 r (I_0 K_1 - I_1 K_0)] \quad (70)$$

$$H_y = \frac{Il}{2\pi r^2} [(1 - 4\sin^2 \varphi) I_1 K_1 - ik_1 r \sin^2 \varphi (I_0 K_1 - I_1 K_0)] \quad (71)$$

$$H_z = \frac{+Il}{2\pi r^4} \sin \varphi \frac{2}{K_1^2} [(3 + 3ik_1 r + k_1^2 r^2) \cdot e^{ik_1 r} - 3] \quad (72)$$

gdzie: I – natężenie prądu w dipolu o długości l , a I_0, K_0, I_1, K_1 – zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu 0 i 1 od zespolonego argumentu $\frac{kr}{2}$.

Przeanalizujemy powyższe wyrażenia dla dwóch szczególnych przypadków: strefy bliskiej i dalekiej. Uwzględniając rozwinięcia asymptotyczne zmodyfikowanych funkcji Bessela I_0, K_0, I_1, K_1 , urojonego argumentu $\frac{kr}{2}$ (Lebediev 1957, McLachlan 1964) dla składowych pola elektromagnetycznego dipola elektrycznego otrzymamy:

– **Strefa bliska** $|kr| \ll 1$:

$$E_x = \frac{Il\rho_1}{2\pi r^3} (3\cos^2 \varphi - 1) \quad (73)$$

$$E_y = \frac{3Il\rho_1}{2\pi r^3} \sin \varphi \cos \varphi \quad (74)$$

$$H_x = \frac{2Il}{\pi r^2} \sin \varphi \cos \varphi \quad (75)$$

$$H_y = \frac{Il}{2\pi r^2} (1 - \sin^2 \varphi) = \frac{Il}{4\pi r^2} \cos^2 \varphi \quad (76)$$

$$H_z = \frac{Il}{\pi r^2} \sin \varphi \quad (77)$$

Składowe pola elektromagnetycznego wyrażone w układzie kartezjańskim x, y możemy przeliczyć na składowe radialną E_r i azymutalną E_φ według zależności (Fig. 4):

$$E_r = E_x \cos \varphi + E_y \sin \varphi, \quad E_\varphi = E_x \sin \varphi + E_y \cos \varphi.$$

Uwzględniając (73)–(76) w ostatnich wzorach, otrzymamy:

$$E_r = \frac{Il\rho_1}{\pi r^3} \cos \varphi, \quad E_\varphi = \frac{Il\rho_1}{2\pi r^3} \sin \varphi \quad (78)$$

oraz:

$$H_r = \frac{9Il}{4\pi r^2} \cos^2 \varphi \sin \varphi, \quad H_\varphi = \frac{Il}{4\pi r^2} \cos \varphi (1 - 9\sin^2 \varphi) \quad (79)$$

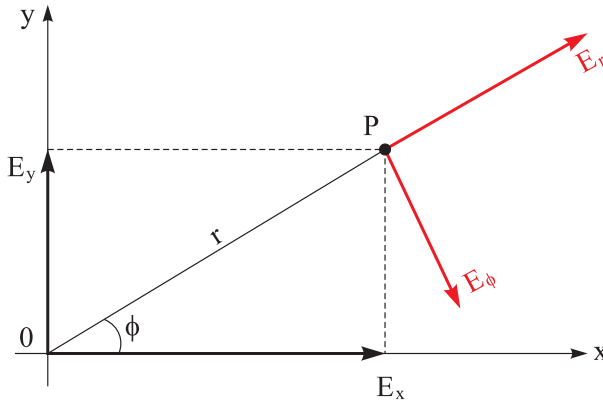


Fig. 4. Składowe kartezjańskie i radialne

Fig. 4. Cartesian and radial components

Obliczmy jeszcze wartości impedancji jednorodnej półprzestrzeni według wzorów:

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y}, \quad Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x}, \quad Z_{xz} = \frac{E_x}{H_z}, \quad Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} \quad (80)$$

Wykorzystując wyrażenia (73)–(77), otrzymujemy:

$$Z_{xy} = \frac{2\rho_1}{r} \frac{3\cos^2 \varphi - 1}{\cos^2 \varphi}, \quad Z_{yx} = \frac{3\rho_1}{4r} \quad (81)$$

$$Z_{xz} = \frac{\rho_1}{2r} \frac{3\cos^2 \varphi - 1}{\sin \varphi}, \quad Z_{yz} = \frac{3\rho_1}{2} \frac{\cos \varphi}{2r} \quad (82)$$

– **Strefa daleka** $|kr| \gg 1$:

$$E_x = \frac{I\rho_1}{2\pi r^3} (3\cos^2 \varphi - 2) \quad (83)$$

$$E_y = \frac{3I\rho_1}{2\pi r^3} \sin \varphi \cos \varphi \quad (84)$$

$$H_x = \frac{3Ii}{2\pi r^3 k} \sin \varphi \cos \varphi \quad (85)$$

$$H_y = \frac{-Ii}{2\pi r^3 k} (1 - 6\sin^2 \varphi) \quad (86)$$

$$H_z = \frac{-3Ii}{\pi r^4 k^2} \sin \varphi \quad (87)$$

Składowe radialne przyjmują postać:

$$E_r = \frac{I\rho_1}{\pi r^3} \cos \varphi, \quad E_\varphi = \frac{I\rho}{\pi r^3} \sin \varphi \quad (88)$$

oraz:

$$H_r = \frac{Ii}{2\pi r^3 K} (2 + 3\sin^2 \varphi) \sin \varphi \quad (89)$$

$$H_\varphi = \frac{Ii}{2\pi r^3 k} (1 - 3\cos^2 \varphi) \cos \varphi \quad (90)$$

Podobnie jak dla strefy bliskiej obliczmy wartości impedancji według wzorów (80). Uwzględniając wzory (83)–(87), możemy napisać:

$$Z_{xy} = \rho_1 i k_1 \frac{3\cos^2 \varphi - 1}{1 - 6\sin^2 \varphi}, \quad |Z_{xy}| = \sqrt{\omega\mu\rho} \frac{3\cos^2 \varphi - 2}{1 - 6\sin^2 \varphi} \quad (91)$$

$$Z_{yx} = -\rho i k_1, \quad |Z_{yx}| = \sqrt{\omega\mu\rho} \quad (92)$$

oraz:

$$Z_{xz} = \frac{-1}{6} \rho_1 k_1^2 r \frac{3\cos^2 \varphi - 2}{\sin \varphi} = -\frac{1}{6} i\omega\mu \cdot r \frac{3\cos^2 \varphi - 2}{\sin \varphi} \quad (93)$$

$$Z_{yz} = \frac{-1}{2} \rho_1 k_1^2 r \cos \varphi = -\frac{1}{2} i\omega\mu \cdot r \cdot \cos \varphi \quad (94)$$

Analizując wyrażenia opisujące pole elektromagnetyczne w strefie bliskiej $|kr| \ll 1$ (73)–(82) oraz dalekiej $|kr| \gg 1$ (83)–(94), dochodzimy do następujących wniosków:

- Strefa bliska (niewielkie odległości od źródła pola, niskie częstotliwości zmian pola):
 - Wielkość składowej elektrycznej jest proporcjonalna do oporności właściwej półprzestrzeni i maleje z sześcianiem odległości od źródła. Praktycznie nie zależy od częstotliwości.
 - Pole magnetyczne nie zależy od własności elektrycznych ośrodka (oporności) i od częstotliwości pola. Amplituda pola maleje z kwadratem odległości od źródła pola.
 - W związku z powyższymi wnioskami wszelkie postaci impedancji (por. wzory (80)) są proporcjonalne do oporności właściwej półprzestrzeni i odwrotnie proporcjonalne do odległości od źródła.
 - Wszystkie składowe pola elektromagnetycznego E_x, E_y, H_x, H_y, H_z zależą od azymutu odległości: źródło – punkt rejestracji pola.
- Strefa daleka (duże odległości od źródła pola):
 - Składowe pola elektrycznego zachowują się podobnie jak w przypadku strefy bliskiej.
 - Wszystkie składowe pola magnetycznego, w odróżnieniu od strefy bliskiej, zależą od własności elektrycznych ośrodka. Składowe poziome maleją z sześcianiem odległości od źródła pola, natomiast składowa pionowa maleje jak r^{-4} .
 - Składowe poziome impedancji dla kąta $\varphi = 0$ zachowują się jak impedancja płaskiej fali elektromagnetycznej, tzn: $|Z_{xy}| = |Z_{yx}| = \sqrt{\omega\mu\rho}$. Składowe Z_{xz} i Z_{yz} dla kąta azymutalnego φ odpowiednio $\pi/2$ i 0 są proporcjonalne do wyrażenia $r\sqrt{\omega\mu}$, czyli nie zależą od własności elektrycznych ośrodka.
 - Wszystkie składowe pola elektromagnetycznego, podobnie jak w przypadku strefy bliskiej, zależą od kąta azymutalnego φ .

Pole pionowego dipola magnetycznego w jednorodnej izotropowej półprzestrzeni

Na wysokości h od płaskiej granicy rozdziału dwóch izotropowych i jednorodnych półprzestrzeni o parametrach $\rho_0, \varepsilon_0, \mu_0, k_0$ i $\rho_1, \varepsilon_1, \mu_1, k_1$ w początku układu współrzędnych x, y, z znajduje się dipol magnetyczny o momencie $M = I \cdot S$ (I – natężenie prądu, S – powierzchnia cewki) zorientowanym wzdłuż osi z prostopadłej do powierzchni rozdziału półprzestrzeni (Fig. 5). Do określenia pola elektromagnetycznego takiego dipola wykorzystujemy potencjał wektorowy typu magnetycznego A^* (por. wzór (7)).

W pobliżu dipola potencjał wektorowy zachowuje się jak w jednorodnej przestrzeni i ma tylko składową pionową A_z^* . Ze względu na symetrię osiową potencjał A_z^* nie zależy od kąta azymutalnego φ i równanie Helmholtza dla A_z^* w cylindrycznym układzie współrzędnych przyjmuje postać

$$\frac{\partial A_z^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z^*}{\partial z^2} + k^2 A_z^* = 0 \quad (95)$$

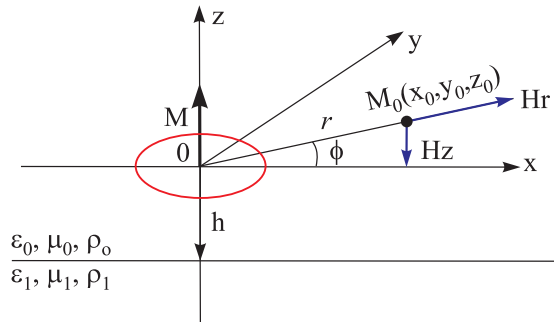


Fig. 5. Dipol magnetyczny w jednorodnej izotropowej półprzestrzeni

Fig. 5. Magnetic dipole in homogeneous isotropic half-space

Przyjmując rozwiązanie Gasanienki (1958), Zaborovskiego (1963) i Krajeva (1965) oraz wykorzystując związki między potencjałem A^* i składowymi pola elektromagnetycznego (por. równania (17) i (23)) dipola magnetycznego położonego na powierzchni granicznej możemy napisać:

$$\frac{E_\phi}{E_\phi^0} = -2(kr)^{-2} [3 - (3 - 3ikr - k^2 r^2) \cdot e^{ikr}] \quad (96)$$

$$\frac{E_r}{E_r^0} = 0 \quad (97)$$

$$\frac{H_z}{H_x^0} = 2(kr)^{-2} [9 - (9 + 9kr - 4k^2 r^2 - ik^3 r^3) \cdot e^{ikr}] \quad (98)$$

$$\frac{H_r}{H_r^0} = i(kr)^2 [I_1 K_1 - I_2 K_2] \quad (99)$$

gdzie: I_1, I_2, K_1, K_2 – zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju od urojonego argumentu $\frac{kr}{2}$.

$$E_\phi^0 = \frac{Mi\omega\mu}{4\pi r^2}, \quad H_z^0 = \frac{M}{4\pi r^3}, \quad H_r^0 = \frac{M}{4\pi r^3} \quad (100)$$

są wielkościami pola pierwotnego w powietrzu, a $M = I \cdot S$ jest momentem dipola.

Stosunek amplitudy składowej pola elektrycznego i magnetycznego w półprzestrzeni do pola pierwotnego nazywamy liczbami elektrycznymi e_ϕ i magnetycznymi h_z i h_g .

Możemy więc napisać:

$$E_\varphi = E_\varphi^0 \cdot e_\varphi, \quad H_z = H_z^0 \cdot h_z, \quad H_r = H_r^0 \cdot h_r \quad (101)$$

Przeanalizujmy liczby elektryczne i magnetyczne w strefie bliskiej i dalekiej. Wprowadzimy oznaczenia $p = |k_1| \cdot r$.

Dla strefy bliskiej, $p \ll 1$, otrzymujemy następujące przybliżone rozwiązania (Svetov 1966)

$$e_\varphi \approx 1 - \frac{\sqrt{2}}{15} p^3 + i \left(\frac{p^2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{15} p^3 \right) \quad (102)$$

Analiza składowych E_φ i H_z pola pionowego dipola magnetycznego w półprzestrzeni wskazuje, że zachowują się one jak w przypadku jednorodnej przestrzeni (por. wzory (56) i (58) ze wzorami (100) i (102)). W półprzestrzeni pojawia się składowa pola magnetycznego H_r .

W strefie dalekiej, $p \gg 1$, uwzględniając asymptotyczne wyrażenia zmodyfikowanych funkcji Bessela i rozwinięcia wyrażenia e^{ikr} w szereg dla składowych pola, możemy napisać:

$$e_\varphi \approx \frac{-6i}{p^2}, \quad h_z \approx i \frac{18}{p^2}, \quad h_r = \frac{6}{\sqrt{2}} \frac{1+i}{p} \quad (103)$$

Uwzględniając (103) w (100) i (101), otrzymujemy:

$$E_\varphi = \frac{6M\rho_1}{4\pi r^4}, \quad H_z = \frac{18iM\rho_1}{4\pi r^5 \omega \mu}, \quad H_r = \frac{6M}{\sqrt{2}} \frac{1+i}{4\pi r^4 \sqrt{\frac{\omega \mu}{\rho_1}}} \quad (104)$$

Stosunek pól H_z / H_r jest proporcjonalny do $1/r$, tak więc w strefie dalekiej $H_z \ll H_r$, czyli pole magnetyczne jest liniowo spolaryzowane. Pozostałe składowe pola E_φ i H_r , wzajemnie prostopadłe, tworzą płaską falę elektromagnetyczną poprzecznie spolaryzowaną. Moduł impedancji na powierzchni półprzestrzeni jest równy

$$|Z| = \left| \frac{E_\varphi}{H_r} \right| = \sqrt{\omega \mu \rho} \quad (105)$$

Stąd wnioskujemy, że pole elektromagnetyczne dipola magnetycznego w strefie dalekiej zachowuje się jak w przypadku fali płaskiej.

POLE NIESKOŃCZENIE DŁUGIEGO KABLA I NIEUZIEMIONEJ PĘTLI

Przypadek 1

Nieskończenie długi kabel położony jest na powierzchni jednorodnej izotropowej półprzestrzeni. Takie źródło pola traktujemy jako system poziomych dipoli elektrycznych usytuowanych wzdłuż osi x kartezjańskiego układu x, y, z . Pole opisane jest przez potencjał wektorowy składowych A_x i A_z (por. wzory (66)). W wyniku superpozycji pól potencjał wektorowy kabla możemy przedstawić w postaci całki po długości kabla z wyrażen opisujących potencjał dipola elektrycznego.

Wykorzystując wyrażenia (9) i (16) dla składowych pola elektrycznego i magnetycznego, zgodnie z rozwiązaniami Zaborovskiego (1963), Vieszewa (1965) i Svetova (1966), możemy napisać:

$$E_x = \frac{I\omega\mu}{2\pi} \left(\frac{2}{k_1^2 y} - i\pi \frac{H_1(ik_1 y)}{k_1 y} \right)$$

$$H_y = \frac{I}{2\pi y} \left[\pi J_2(ik_1 y) + i\pi H_2(ik_1 y) + \frac{2}{3} k_1 y \right] \quad (106)$$

$$H_z = \frac{I}{2\pi y} \left[\frac{4}{k_1^2 y^2} + i\pi H_2(ik_1 y) \right]$$

gdzie: I – natężenie prądu w kablu, $H_1(ik_1 y)$ i $H_2(ik_1 y)$ – funkcje Struwego pierwszego i drugiego rodzaju, $J_2(ik_1 y)$ – funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu 2.

Elektryczne i magnetyczne liczby określamy ze wzorów:

$$e_x = \frac{2\pi}{I\omega\mu} \cdot E_x, \quad h_y = \frac{2\pi y}{I} \cdot H_y, \quad h_z = \frac{2\pi y}{I} \cdot H_z \quad (107)$$

W strefie dalekiej, $p = |k_1|y \gg 1$, pozioma składowa pola magnetycznego H_y maleje z kwadratem odległości od kabla. Jednocześnie składowe pola E_x i H_z maleją znacznie szybciej w miarę zwiększania się odległości od kabla. Z obliczeń wynika również, że dla $p > (3 - 5)$ wyniki pomiarów pola magnetycznego na wysokości $z < y$ mało się odróżniają od pomiarów bezpośrednio na powierzchni ziemi.

Gdy kabel ma **skończoną długość** ($2L$), wzory na pole elektromagnetyczne odpowiadające nieskończeniu długości kablowi można stosować tylko przy spełnieniu warunku $y < 2L$ i $x < L$. Ponadto jeżeli odległości między kablem a punktem obserwacji, na których bada się pole elektromagnetyczne, kilkakrotnie przewyższają długość kabla, to do obliczeń wartości pola można zastosować wzory na pole dipola elektrycznego (por. wzory (68)–(72)).

Skończona długość kabla wpływa na wartości pola E_x , H_y , H_z , jak również na jego kształt. Pojawia się składowa pola H_x . Wartości pola zależą od parametru $\delta = |k_1|L$, który przy zaniedbaniu prądów przesunięcia wynosi $\delta = 2.81 \sqrt{\frac{f}{\rho}} \cdot L \cdot 10^{-3}$ [m].

Przypadek 2

Pole elektromagnetyczne nieuziemionej pętli także można obliczyć przez całkowanie pól poziomych dipoli elektrycznych. W środku kołowej pętli o promieniu R , wzdłuż której płynie prąd o natężeniu I , zanika składowa elektryczna, a składowa magnetyczna prostopadła do powierzchni rozdziału ośrodków równa się

$$H_z = \frac{I}{R} \frac{1}{k_1^2 R^2} [3 - (3 + 3ik_1 R - k_1^2 R^2) \cdot e^{ikr}] \quad (108)$$

W centralnej części pętli pionowe pole magnetyczne można uważać za jednorodne, niezależne od odległości od środka pętli r . Gdy $r > 5R$, pole elektromagnetyczne pętli można obliczyć według wzorów na pionowy dipol magnetyczny (por. wzory (96)–(99)).

LITERATURA

- Chmielovskoj B.K., 1971. *Osnownyj kurs elektrorazvedki. Cz. II*. Izd. Moskovskogo Universiteta.
- Gasanienko L.B., 1958. Normalnoe pole vertikalnogo harmoniceskogo niskoczastotnogo magnitnogo dipola. *Voprosy Geofiziki*, 249, 10.
- Krajew A.P., 1965. *Osnovy elektrorazvedki*. Nedra, Moskva.
- Lebediev N.N., 1957. *Funkcje specjalne i ich zastosowanie*. PWN, Warszawa.
- McLachlan N.W., 1964. *Funkcje Bessela dla inżynierów*. PWN, Warszawa.
- Svetov B.S., 1966. *Elektromagnitnyje metody razvedki w rudnoj geofizyke*. Nedra, Moskva.
- Vieszew A.V., 1965. *Elektrprofilirovanie na postojannom i peremennom tokie*. Nedra, Moskva.
- Zaborovskij A.I., 1963. *Elektrorazvedka*. Gostoptiechizdat, Moskva.

Summary

Dipole sources of the electromagnetic (EM) field are used in a range of geoelectric prospecting methods (Figs 1, 2). The EM field is described by the wave equations, of which the solution can be simplified by means of potential functions such as vector potentials of electric and magnetic type that can be derived from the Maxwell's equations. Relatively simple relationships for the vector potentials can be obtained for electric and magnetic fields that are harmonically dependent on time. The differential equations that are satisfied by the vector potential simplify in the so-called far zone $|kr| \gg 1$ and near zone $|kr| \ll 1$,

where k is wave number and r is a distance between the source and registration site. At discontinuity boundaries of electric conductivity the vector potential satisfies congruent boundary conditions that follow directly from the continuity of horizontal components of the electric field and continuity of vertical components of the vector of electric and magnetic field induction.

This paper presents analysis of electric field and magnetic fields generated by a horizontal electric dipole (Fig. 3), vertical magnetic dipole (Fig. 5), infinitely long cable, and ungrounded loop in a homogeneous space and half-space. For a horizontal electric dipole on the surface of homogeneous isotropic half-space in, the electric EM field component in the near zone is proportional to resistivity of the half-space and decreases with the cubed distance to the source. The electric component does not depend on frequency and is similar in character to the electric field of direct current dipole. The magnetic field does not depend on resistivity and frequency of the field. The field amplitude decreases with the squared distance to the source.

Therefore, all components of the impedance are proportional to resistivity of the half-space and inversely proportional to the source distance. The field components in the far zone behave the same as in the near zone. All magnetic field components depend on electric properties of a rock medium. Horizontal components decrease with a cubed source distance while the vertical component decreases as r^{-4} . For $\varphi = 0$ horizontal components of the impedance behave as the impedance of plane EM wave (Fig. 4). Impedance components, Z_{xy} i Z_{yx} , for $\varphi = \pi/2$ and $\varphi = 0$ depend on medium's electric properties. All EM field components depend on azimuthal angle, φ , both for the near zone and far zone.

In the case of vertical magnetic dipole on the surface of homogeneous and isotropic half-space (Fig. 5), components E_φ and H_z in the near zone behave as in the case of homogeneous half-space. A magnetic field component, H_r , appears. The magnetic field in the far zone is linearly polarised. Mutually perpendicular components, E_φ and H_r , form a plane EM wave that is transversely polarized. The impedance module is $|Z| = |E_\varphi / H_r| = (\omega\mu\rho)^{1/2}$, and hence it can be concluded that EM field in the far zone behaves as the plane wave field.

In the case of an infinitely long cable in the far zone, horizontal magnetic field component, H_y , decreases with the squared distance to cable. At the same time, components E_x and H_z decrease much faster with a distance to the cable. If the cable has a finite length ($2L$), the given equations for EM field can be applied only when $y < 2L$ and $x < L$. If a measurement distance is longer the cable length, equations (68)–(72) can be applied. The finite length of the cable has an effect both on magnitude and shape of E_x , H_y , H_z components.

In the center of an ungrounded circular loop with a radius R , through which flows electric current I , the electric component vanishes while the magnetic component can be calculated by means of equation (108). The vertical magnetic field in the central part of the loop can be regarded as homogeneous irrespective a distance, r , do the loop center. When $r > 5R$, the EM field for the loop cant be calculated based on equations (96)–(99) for vertical magnetic dipole.