

Henryk Gurgul\*, Marcin Suder\*

## **Fraktalne własności wielkości obrotów indeksów WIG20, ATX i CAC40: analiza porównawcza**

---

### **1. Wprowadzenie**

Dane z rynków finansowych często wykazują wysoki stopień nieliniowej zmienności i własności fraktalne. Przez zastosowanie metod i technik używanych do analizy nieliniowych układów dynamicznych badacze mogą uzyskać więcej informacji i opisać więcej struktur przy analizie szeregów czasowych generowanych przez układy rzeczywiste. Te metody i techniki obejmują nie tylko atraktory, wykładniki Lapunowa, wymiary fraktalne i inne, ale również miary statystyczne umożliwiające diagnozę szeregów czasowych, w odniesieniu do których nie ma pełnej informacji. Jeśli chodzi o rynki finansowe, to do opisu aktywności na nich można użyć szeregu zmiennych takich jak kursy walutowe, wartości indeksów giełdowych, szeregi cen pojedynczych akcji spółek, ich zmienność, wielkość obrotów i inne.

Większość badań empirycznych dotyczących rynków kapitałowych koncentruje się na badaniu zmian cen akcji w czasie. Cena akcji spółki oddaje oczekiwania inwestorów odnośnie przyszłych perspektyw spółki. Pod wpływem nowych informacji inwestorzy zmieniają swoje oczekiwania i jest to jedno z głównych źródeł zmian cen. Jednakże upublicznienie nowej informacji nie musi indukować zmian cen. Można sobie bowiem wyobrazić, że ta sama informacja może być różnie interpretowana przez inwestorów. Przykładowo w przypadku ogłoszenia przez zarząd spółki wzrostu wypłacanej dywidendy inwestorzy będą traktować tę informację jako pozytywny sygnał, jeśli chodzi o przyszły rozwój spółki i będą chętni

---

\* Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Wydział Zarządzania, Samodzielna Pracownia Zastosowań Matematyki w Ekonomii, email: henryk.gurgul@gmail.com; m\_suder@wp.pl

do zakupu akcji tej spółki, co teoretycznie może prowadzić do wzrostu ich cen. Jednakże z drugiej strony część inwestorów będzie preferować np. z powodów podatkowych (od dywidend płaci się podatki, a od zysków kapitałowych w niektórych krajach podatków się nie płaci, a nawet w sytuacji konieczności zapłaty można wybrać przynajmniej termin sprzedaży akcji, a więc i termin uiszczenia podatków) zyski kapitałowe ponad zyski z dywidendy. Dla tej części inwestorów zapowiedź wzrostu dywidendy może być impulsem do pozbycia się akcji. Dlatego mimo wagi podawanych informacji dla uczestników rynku kapitałowego zgodnie z prawem popytu i podaży ceny akcji mogą pozostać bez zmian. Także w sytuacji gdy inwestorzy oceniają tak samo daną informację, ale mają zróżnicowane oczekiwania początkowe, ceny akcji mogą pozostać niezmiennie. Zapowiedź spadku dywidendy jest na ogół odbierana negatywnie przez inwestorów, ale jeśli ten spadek jest niewielki w stosunku do początkowych oczekiwań rynku, to ta zapowiedź nie będzie odbierana negatywnie przez przynajmniej część uczestników rynku, w efekcie czego ceny mogą pozostać na dotychczasowym poziomie.

Warunkiem koniecznym odnotowania zmian cen jest dodatnia wielkość obrotów.

Wielkość obrotów była w przeszłości uważana w literaturze przedmiotu tylko za charakterystykę opisową. W ostatnich latach wskazuje się jednak na wielkość obrotów jako na ważne źródło informacji odnośnie do przyszłych kursów akcji i ich zmienności. Wynika to stąd, że podczas gdy ceny odzwierciedlają przeciętną zmianę oczekiwań inwestorów w związku z nową informacją, to wielkość obrotów oddaje sumę reakcji inwestorów. Uśrednianie reakcji inwestorów powoduje utratę części informacji, zaś sumowanie pozwala na zachowanie różnic. W tym sensie każda akcja tak jak moneta ma dwie strony, może być w danej chwili charakteryzowana za pomocą ceny oraz wielkości obrotów.

Analiza roli wielkości obrotów zaczyna się od podstawowego pytania: co jest źródłem aktywności handlowej na rynkach akcji, przede wszystkim czy obserwowana aktywność handlowa wynika z racjonalnych czy nieracjonalnych przesłanek. Dodatnia wielkość obrotów implikuje założenie, że uczestnicy rynku muszą być zróżnicowani. Przyjmuje się, że jedynie w krótszej perspektywie czasowej wysoki wolumen może być wynikiem nieracjonalnych decyzji uczestników rynku, bowiem w długiej perspektywie czasowej zarówno ceny, jak i obroty akcjami danego przedsiębiorstwa kształtowane są przez charakterystyczne dla niego fundamentalne, a nie przejściowe, przeczące postulatowi racjonalności, zjawiska. Jako możliwe przyczyny niejednorodności inwestorów podaje się w literaturze (np. Kesy [42]) różnice w:

- majątku lub płynności (ang. *differences in endowments*);
- preferencjach ryzyka (ang. *differences in tastes*);
- osobistym stanie informacji (ang. *asymmetric information*);

- oczekiwaniach *ex-ante*, względnie w interpretacji i przetwarzaniu istotnej dla wyceny publicznie dostępnej informacji (ang. *differences of opinions*).

Choć dotąd brak jednolitej powszechnie przyjętej w świecie finansów teorii wielkości obrotów na rynkach kapitałowych, to jednak istnieją teorie cząstkowe, które na jednych rynkach znajdują potwierdzenie empiryczne, a na innych nie. Teorie te, dotyczące roli wielkości obrotów na giełdowych rynkach akcji oraz wybrane próby ich weryfikacji empirycznej przedstawiono w następnym rozdziale. W rozdziale tym nawiązano też krótko do dotychczasowych badań nad własnościami fraktalnymi danych finansowych, głównie dotyczącymi giełdowych rynków akcji. Szersze omówienie wyników innych autorów można znaleźć w pracy Gurgula i Sudera [30].

W rozdziale 3 opisano dane wykorzystane w pracy. W rozdziale 4 podano definicje najważniejszych i wykorzystywanych w pracy wskaźników fraktalnych. W kolejnym rozdziale 5 przedstawiono wyniki obliczeń wskaźników charakteryzujących fraktalne własności wielkości obrotów. Rozdział 6 zawiera najważniejsze wnioski wynikające z obliczeń.

## 2. Przegląd literatury przedmiotu

Jedną z pierwszych prac dotyczących roli wielkości obrotów w generowaniu cen jest praca Clarka [15]. Rozwinął on dobrze znaną w literaturze finansowej teorię mieszanki rozkładów (ang. *Mixture of Distribution Hypothesis* (MDH)). Zdaniem Clarka stopy zwrotu i wielkość obrotów są wzajemnie powiązane wspólną zależnością od zmiennej charakteryzującej równoczesny napływ informacji na rynek kapitałowy. Im więcej tych informacji napływa, tym większe są ruchy cen. Jego zdaniem stochastyczny napływ informacji może być dobrze przybliżony przez wielkość obrotów. O ile MDH byłaby słuszna, to powinien istnieć silny równoczesny związek pomiędzy wielkością obrotów a zmiennością stóp zwrotu (ale nie samymi stopami zwrotu). Teoria Clarka została uogólniona między innymi przez Eppsa i Eppsa [21], Tauchena i Pittsa [57], Harrisa [31], Lamoureux'a i Lastrapes'a [43] oraz Andersen'a [2], Junga i Liesenfelda [39], Luu i Martensa [46].

Szczególnie w tej ostatniej pracy została istotnie uogólniona hipoteza o współzależności procesu zmian cen oraz wielkości obrotów od procesu napływu informacji na rynek. Autor nawiązał do modeli racjonalnych oczekiwań. W szczególności chodzi tu o model mikrostruktury rynku przedstawiony w pracy Glostena i Milgroma [28]. To uogólnienie MDH uwzględnia asymetrię dostępu do informacji oraz potrzebę płynności jako jedne z głównych czynników inicjujących handel w odpowiedzi na napływające informacje. W tym modelu została także

uwzględniona obserwowana w szeregach stóp zwrotu zmienna w czasie warunkowa wariancja.

Innym popularnym w literaturze modelem teoretycznym mającym objaśniać napływ informacji na rynek jest model sekwencyjnego napływu informacji (ang. *sequential information flow model*) opisany przez Copelanda [17]. Taki sposób napływu informacji na dany rynek powoduje tworzenie się na tym rynku chwilowych stanów równowagi między popytem i podażą (Jennings i in. [38]). Stanom tym towarzyszy trwale utrzymujący się wysoki poziom obrotów. Model zaproponowany przez Copelanda jest źródłem raczej niespodziewanych konstatacji, a w szczególności wynika z niego, że przy braku krótkiej sprzedaży największy oczekiwany wolumen występuje wtedy, gdy wszyscy inwestorzy są zgodni w ocenie nowej informacji, tzn. wszyscy są optymistami bądź wszyscy są pesymistami. Natomiast najmniejszy wolumen jest oczekiwany wtedy, gdy występuje wśród inwestorów istotna niezgodność w ocenie nowej informacji. Podobne konsekwencje ma ten model w odniesieniu do oczekiwanej zmiany ceny akcji. Wynika z niego obserwowana na rynkach dodatnia korelacja pomiędzy wartością bezwzględną lub kwadratem zmiany ceny a wielkością obrotów. Najważniejszym wnioskiem z tego modelu jest istnienie dodatniego związku zarówno równoczesnego, jak i przyczynowego pomiędzy wielkością obrotów a zmiennością stóp zwrotu.

Autorzy późniejszych badań (por. Blume i in. [8] oraz Suominen [56]) twierdzą, że dane dotyczące wielkości obrotów dostarczają specyficznych informacji inwestorom, których to informacji nie można wyprowadzić z samych kursów. Prywatna informacja dobrze poinformowanych inwestorów znajduje bowiem odzwierciedlenie właśnie w ich aktywności handlowej. W obu artykułach podkreśla się, że aktywność handlowa opisuje zachowanie rynku i wpływa na decyzje inwestorów, zaś zależność pomiędzy wielkością obrotów a zmiennością stóp zwrotu jest nie tylko równoczesna, ale i przyczynowa.

Stan teorii dotyczącej wielkości obrotów do połowy lat osiemdziesiątych opisał Karpoff [40] oraz Ajinkya i Jain [1].

W ślad za powyższymi teoriami pojawiło się szereg badań empirycznych dotyczących związku cena–wielkość obrotów (np. Hiemstra i Jones [32], Brailsford [9], Bessembinder i Seguin [7], Gallant i in. [24], Brock i LeBaron [11], Bernardo i Judd [6], Avouyi-Dovi i Jondeau [3], Lee i Rui [45], Gervais i in. [26], Säfvenblad [54]). Wyniki tych badań potwierdzają istnienie zależności pomiędzy wielkością obrotów a zmiennością stóp zwrotu oraz wskazują na zależności przyczynowe przebiegające od wielkości obrotów do stóp zwrotu.

Jedyny wyjątek stanowi tu praca Darrata i in. [18], w przypadku której baza danych obejmowała dane wysokiej częstotliwości zaczerpnięte z giełdy nowojorskiej, czyli dla spółek wchodzących w skład indeksu Dow Jonesa (DJIA). Wymienieni autorzy znaleźli istotne statystycznie związki pomiędzy obydwoma zmiennymi,

zależności równoczesnych pomiędzy zmiennością stóp zwrotu a wielkością obrotów jednak nie stwierdzili.

W toku badań np. Lamoureux i Lastrapes [43], Gallo i Pacini [25], Omrana i McKenzie [50], McKenzie i Faffa [49], Campbell i in. [13] za pomocą modelu zwanego GARCH *cum volume* autorzy sprawdzali związki pomiędzy wielkością obrotów a autokorelacją stóp zwrotu. Udało się im ustalić, że wielkość obrotów jest odpowiedzialna za zmienną w czasie autokorelację stóp zwrotu.

Badania empiryczne dostarczają dowodów na to, że wzrost wielkości obrotów powoduje na ogół spadek autokorelacji stóp zwrotu. Connolly i Stivers [16] badając autokorelację tygodniowych stóp zwrotu i wielkości ponadprzeciętnych obrotów, wykazali istnienie zależności równoczesnej pomiędzy badanymi wielkościami. Chordia i Swaminathan [14] wykazali empirycznie, że stopy zwrotu odpowiadające wysokiemu poziomowi obrotów poprzedzają stopy zwrotu odpowiadające niskim obrotom. Ta obserwacja może być traktowana jako fakt przemawiający na rzecz prawdziwości hipotezy o szybkości dopasowania (ang. *speed of adjustment hypothesis*). Zgodnie z tą hipotezą akcje o wysokim poziomie obrotów szybciej reagują na nowe informacje niż akcje o niskim poziomie obrotów. W wielu finansowych szeregach czasowych (w tym szeregach wielkości obrotów) daje się zaobserwować persistencja autokorelacji. Mówi się wówczas o tzw. długiej pamięci. Do pierwszych opracowań w zakresie długiej pamięci w szeregach czasowych należą artykuły Hursta [35], Mandelbrota i Van Ness [48] oraz Mandelbrota [47], którzy sformalizowali wyniki Hursta, a także prace Geweke i Porter-Hudaka [27], Hoskinga [33] oraz Granger i Joyeux'a [29]. Ci ostatni autorzy wprowadzili do literatury przedmiotu modele ARIMA o ułamkowym stopniu integracji. Modele te szczegółowo badali później m.in. Sowell [55], Beran [5], Baillie [4] oraz Robinson [53]. Możliwość obecności długiej pamięci w finansowych szeregach czasowych była i jest tematem intensywnych badań zarówno teoretycznych, jak i empirycznych ze strony ekonometryków i finansistów. Przedmiotem szeregu dotychczasowych prac było głównie zagadnienie długiej pamięci w szeregach stóp zwrotu. Przyczyną tak dużego zainteresowania badaczy tą tematyką jest fakt, że istnienie długiej pamięci w szeregach stóp zwrotu jest zaprzeczeniem hipotezy rynków efektywnych w wersji sformułowanej przez Fama [22]. Dlatego stało się konieczne uogólnienie teorii efektywności informacyjnej giełdowych rynków akcji w wersji podanej przez Fama. Zrobił to Peters [51], formułując swoją teorię rynków fraktalnych, w której znalazło istotne miejsce także pojęcie długiej pamięci.

Z rozważań teoretycznych oraz towarzyszących im badań empirycznych dotyczących roli wielkości obrotów w procesie kształtowania się cen na rynkach akcji wynikają bardzo zróżnicowane konkluzje. Nie jest to zaskakujący wniosek, bo różne modele odwzorowują różne przyczyny aktywności handlowej wynikające ze zróżnicowania uczestników rynku pod bardzo wieloma względami. W związ-

ku z tym najdalej idące wnioski teoretyczne wynikają z jednej strony z modeli uwzględniających niejednorodność oczekiwań inwestorów, a z drugiej strony z modeli racjonalnych oczekiwań dotyczących oczekiwanego stanu równowagi i z dynamicznie uczącymi się aktorami rynku.

Podczas gdy modele pierwszej z wymienionych klas dotyczą przede wszystkim reakcji cen i wielkości obrotów na podawane do publicznej wiadomości informacje, to druga klasa modeli koncentruje się na zagadnieniu, w jaki sposób uczestnicy rynku w warunkach asymetrii rozkładu informacji mogą przez obserwacje poszczególnych zmiennych rynkowych, a przede wszystkim cen akcji i wielkości obrotów uzyskać wiedzę o stanie informacji, którą posiadają lepiej poinformowani inwestorzy. Ta druga klasa modeli dotyczy więc w szczególności modeli, z których daje się wyprowadzić oryginalną, istotną dla wyceny akcji wartość informacyjną, uzupełniającą informacje zawarte w cenach. Jednakże także dla tej klasy modeli powstaje bardzo kontrowersyjny problem dotyczący dokładnej wartości informacyjnej wielkości obrotów. Rozciąga się on od zagadnienia dowodów na istnienie prywatnych informacji do stopnia precyzji informacji, które znajdują odzwierciedlenie w wielkości obrotów.

Mniej zróżnicowanych wyników, jeśli chodzi o rolę wielkości obrotów, dostarczają te modele wolumenu obrotów, które odwzorowują możliwość niejednorodnych oczekiwań uczestników odnośnie do informacji podawanych do publicznej informacji. Głównym wnioskiem z tego typu modeli jest, iż wysokiej wielkości obrotów niekoniecznie musi towarzyszyć równie duża zmiana cen wywołana daną informacją, ponieważ w wielkości obrotów znajduje odzwierciedlenie niejednorodność uczestników rynku uwidaczniająca się w różnej interpretacji przez nich tej samej informacji.

Ze wspomnianych tu modeli nawiązujących do modelu mieszanki rozkładów (MDH) wynika – na gruncie reakcji na podawane informacje – związek pomiędzy zmiennością stóp zwrotu a wielkością obrotów. Jednak w zależności od przyjętych założeń poszczególne modele prowadzą do bardzo zróżnicowanych wniosków.

Z tego krótkiego przeglądu literatury wynika, że nie ma w literaturze przedmiotu modelu wielkości obrotów, który umożliwiłby kompleksowy opis kształtowania się w czasie wielkości obrotów oraz ocenę wartości informacyjnej wielkości obrotów (Karpoff [40]). Autorzy w najnowszych swoich pracach empirycznych próbują ustalić na bazie danych empirycznych, czy istnieje związek wolumenu z procesem generowania cen na rynkach akcji i ustalić pewne cechy wspólne szeregów czasowych cen i odpowiadających im szeregów czasowych wielkości obrotów.

W literaturze przedmiotu już od końca lat osiemdziesiątych trwa dyskusja na temat, czy w ekonomicznych lub finansowych szeregach czasowych jest obecny „niskowymiarowy” chaos (por. np. Jaditz i Sayers [36]). Pierwsze zastosowania

podstawowych metod teorii chaosu oprócz wymienionej już książki Petersa w odniesieniu do rynków kapitałowych i innych działów ekonomii można znaleźć np. w pracach Docknera i in. [18], Elsnera [19], Franka i in. [23], Hsieh [34].

Nowsze prace na temat teorii chaosu oraz własności fraktalne stóp zwrotu głównych indeksów Warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych oraz Giełdy Wiedeńskiej (WIG20 i ATX) zostały omówione w pracy Gurgula i Sudera [30]. Z omówienia tego wynika, że dotąd prawdopodobnie nie badano możliwości wystąpienia chaosu w szeregach wielkości obrotów.

W tej pracy przedmiotem analizy będzie porównanie własności fraktalnych, wielkości obrotów tych giełd i dodatkowo wielkości obrotów notowanych we francuskim indeksie wolumenu CAC40. Przy wyborze do obliczeń danych z Giełdy Warszawskiej oraz z Giełdy Wiedeńskiej kierowano się tym, że GPW w Warszawie i Wiedniu mają podobną historię (indeks ATX jest notowany od 2.01.1991 roku z wartością bazową 1000 punktów, obejmuje obecnie 21 spółek, indeks WIG wystartował 16.04.1994, obejmuje 20 spółek i miał również wartość bazową 1000 punktów). Obie giełdy mają porównywalną kapitalizację oraz są lokalnymi rywalami.

Jednym z powodów uwzględnienia także Giełdy Paryskiej, o dużo większej kapitalizacji niż kapitalizacja dwóch już wymienionych giełd, było dążenie do stwierdzenia, jak na wyniki analizy wpływa wielkość rynku. Poza tym Giełda Paryska nie jest tak silnie skorelowana z badanymi giełdami jak np. giełdy w Wiedniu i we Frankfurcie (ATX i DAX).

Innym argumentem był fakt, że GPW w Warszawie była organizowana przy istotnym współudziale specjalistów francuskich i z tego powodu są widoczne w organizacji GPW pewne wzory francuskie. Najważniejszym jednak argumentem przemawiającym na rzecz uwzględnienia Giełdy Paryskiej była dostępność (w przeciwieństwie np. do DAX30) danych dla indeksu CAC40 wielkości obrotów.

### 3. Opis danych

W celu zbadania własności fraktalnych wolumenów wybrano do analizy dzienne dane dotyczące indeksów ATX, WIG20 oraz CAC40 z okresu od stycznia 2001 do sierpnia 2008. Badania oparto na logarytmach wartości wymienionych indeksów oraz tychże danych z usuniętym trendem wielomianowym (dla ATX – 5 stopnia, WIG20 – 3 stopnia oraz CAC40 wielomian 4 stopnia). W niektórych analizach (wymiar fraktalny, analiza R/S, wykładnik Hursta) w celu zweryfikowania otrzymanych wyników wykorzystano również dane losowo wymieszane.

Wstępną charakterystykę danych będącą równocześnie pierwszym etapem analizy porównawczej badanych szeregów reprezentujących trzy giełdy rozpoczą-

to od wyznaczenia podstawowych statystyk dla wielkości obrotów. Dodatkowo w pierwszej części analizy przeprowadzono podstawowe testy normalności.

Z tabeli 1 wynika, że własności statystyczne wielkości obrotów wyrażone indeksem CAC40 różnią się istotnie od własności wolumenów ATX oraz WIG20. Średnia wielkość obrotów CAC40 jest istotnie większa od obrotów wyrażonych pozostałymi indeksami przy znacznie mniejszym ich zróżnicowaniu. Logarytmy wolumenu CAC40 charakteryzują się silną asymetrią lewostronną oraz silnym skupieniem, w przeciwieństwie do logarytmu wolumenów ATX oraz WIG20, które wykazują charakter platokurtyczny ze słabą asymetrią lewostronną.

**Tabela 1**

Podstawowe statystyki

Indeks	liczebność	średnia	odchylenie std.	minimum	maksimum	skośność std.	kurtoza std.
ATX	1900	14,67	0,884	12,37	16,63	-1,59	-9,22
WIG20	1923	12,83	0,823	10,41	14,95	-1,06	-8,50
CAC40	1959	18,46	0,386	16,09	20,16	-9,40	23,10

Źródło: obliczenia własne

Wyniki testów normalności wskazują na słabe dopasowanie rozkładu normalnego do logarytmów wolumenu wszystkich badanych indeksów wolumenu (por. tab. 2).

**Tabela 2**

Wyniki testów normalności

Indeks \ Testy	ATX		WIG20		CAC40	
	statystyka	p-value	statystyka	p-value	statystyka	p-value
Chi-Square	323,8	0	301,2	0	141,1	8,29E-06
Shapiro-Wilk W	0,955	0	0,962	0	0,976	0
Skewness Z-score	1,13	0,257	0,757	0,448	6,291	3,16E-10
Kurtosis Z-score	-29,9	0	-22,05	0	10,44	0
Jarque-Bera	88,1	0	73,9	1,11e-016	615,6	0

Źródło: obliczenia własne



## 4. Metodologia

Ponieważ jednym z celów artykułu jest porównanie wyników analizy fraktalnej dla stóp zwrotu zamieszczonych w pracy Gurgula i Sudera [30] oraz wielkości obrotów indeksów WIG20 i ATX, w niniejszej pracy wykorzystano te same metody do identyfikacji w badanych szeregach czasowych występowania struktur nieliniowych oraz chaosu deterministycznego, tj. analizę R/S, wykładnik Hursta, test BDS, wymiar korelacyjny oraz największy wykładnik Lapunowa. Poniżej w skrócie omówimy wspomniane metody. Szerszy opis tychże metod można znaleźć m.in. w [30].

### Analiza R/S, wykładnik Hursta

Analiza przeskalowanego zasięgu jest prostym narzędziem do badania występowania długiej pamięci oraz identyfikacji i określania długości cykli nieokresowych za pomocą tzw. wykresu Hursta. Wykładnik Hursta określa nachylenie krzywej (wykresu Hursta) otrzymanej przez wykreślenie w skali podwójnie logarytmicznej  $(R/S)_n$  względem  $n$ . Wartość wykładnika Hursta 0,5 świadczy o tym, że mamy do czynienia z błędzeniem losowym. Jeśli  $0,5 < H < 1$  można przypuszczać, że mamy do czynienia z tzw. szeregiem persistentnym, wzmacniającym trend. Mówimy również wtedy o procesie z tzw. długą pamięcią. W przypadku gdy  $0 < H < 0,5$ , wówczas szereg nazywamy antypersistentny, szereg powracający do średniej.

Jak już wspomniano analizę R/S można również zastosować do wykrywania cykli nieokresowych oraz określenia ich długości. Zmiana nachylenia wykresu Hursta i ustalenie jego nachylenia na poziomie zbliżonym do 0,5 oznacza, że badany proces traci pamięć i staje się losowy. Punkt, w którym krzywa się odgina uznajemy za wartość określającą długość pamięci procesu i jednocześnie za średnią długość cyklu nieokresowego.

### Wymiar korelacyjny, test BDS

Wymiar korelacyjny jest ważną informacją o systemie, umożliwia on ustalenie minimalnej liczby zmiennych dynamicznych potrzebnych do opisanie układu. Wyznaczenie wymiaru korelacyjnego na podstawie szeregu czasowego wymaga skonstruowania wielowymiarowego szeregu czasowego. Rekonstrukcję przestrzeni stanu oraz jej wymiaru przeprowadza się poprzez „zanurzenie” szeregu czasowego w przestrzeni wielowymiarowej z wykorzystaniem metody opóźnienia czasowego (por. [12]). Charakterystyczny czas opóźnienia czasowego uzyskuje się na podstawie pierwszego minimum lokalnego funkcji Auto Mutual Information (automatycznej informacji wzajemnej). Dla danego opóźnienia czasowego określa się wymiar przestrzeni stanu przy użyciu tzw. metody najbliższych fałszywych

sąsiadów. Do wyznaczenia wymiaru korelacyjnego, który stanowi przybliżenie wymiaru fraktalnego, można zastosować metodę opracowaną przez Grassbergera i Procaccia (por. [5]), obliczając odpowiednie całki korelacyjne.

Pojęcie całki korelacyjnej zostało również wykorzystane do wyznaczenia statystyki w teście BDS. Test BDS jest jednym z podstawowych testów liniowości i jego zastosowanie może być pierwszym krokiem do wykrywania struktur nieliniowych w badanych szeregach, a w konsekwencji sygnałem pojawienia się chaosu.

## Największy wykładnik Lapunowa

Największy wykładnik Lapunowa jest miarą badającą wrażliwość układu na warunki początkowe. Jest miarą szybkości „rozbiegania się” bliskich sobie trajektorii układu.

Wyznaczenie największego wykładnika Lapunowa możliwe jest w przypadku, gdy znane są charakterystyki atraktora takie jak wymiar korelacyjny, średni czas orbitalny oraz opóźnienie czasowe.

Dodatnia wartość największego wykładnika Lapunowa oznacza, że mamy do czynienia z układem chaotycznym. Wyższa wartość dodatniego wykładnika Lapunowa oznacza więcej chaosu w badanym procesie, a w konsekwencji mniejszą możliwość predykcji. Ujemna wartość wykładnika oznacza, że mamy do czynienia z układem dyssypatywnym, czyli systemem powracającym do stanu równowagi.

## 5. Wyniki badań

Prezentację wyników badań zaczniemy od analizy R/S i estymacji współczynnika Hursta.

### 5.1. Wyniki analizy R/S oraz estymacji wykładnika Hursta

#### Logarytm wolumenu

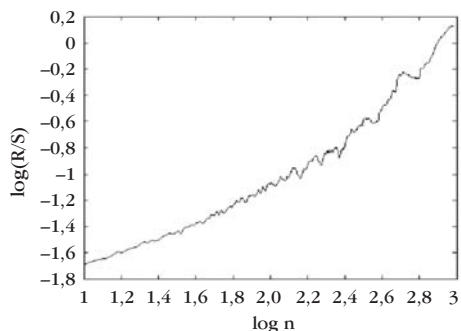
Wyniki analizy R/S dla logarytmu wolumenu są dość nietypowe (rys. 1–3). Wprawdzie wartości wykładnika Hursta uzyskane dla logarytmów z wolumenu badanych indeksów są bardzo wysokie (por. tab. 3), co świadczy o występowaniu w tych szeregach efektu długiej pamięci, jednak dla wszystkich indeksów nietypowe jest zachowanie wykresu wartości  $\log(R/S)_n$  w zależności od  $\log n$ . Krzywa w żadnym punkcie nie zmienia swego nachylenia na wartość zbliżoną do 0,5, co więcej krzywe zwiększają swe nachylenie – odginają się w górę. Przykładowo wartość wykładnika Hursta dla ATX otrzymana z regresji dla  $n \in [10, 251]$  jest

mniejsza niż ta sama wartość dla  $n \in [251, 10000]$ . Zatem dla badanych szeregów czasowych analiza R/S nie wskazuje na występowanie cykli nieokresowych. Takie zachowanie może być spowodowane bardzo silną autokorelacją występującą w szeregach wielkości obrotów.

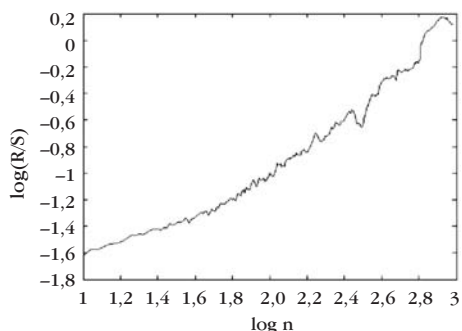
**Tabela 3**  
Wartości wykładnika Hursta dla logarytmu wolumenów

Indeks	Wykładnik Hursta	$n^*$	Długość cyklu w dniach
ATX	0,8637	–	–
WIG20	0,9403	–	–
CAC40	0,7887	–	–

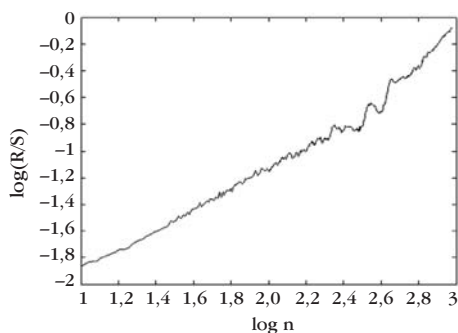
Źródło: obliczenia własne



**Rys. 1.** Wyniki analizy R/S dla logarytmu wolumenu ATX



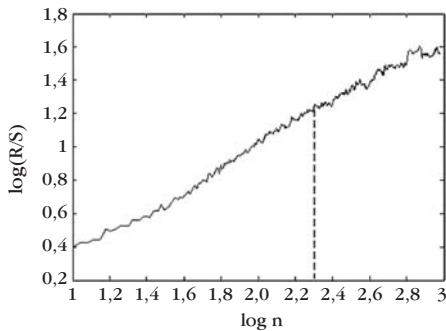
**Rys. 2.** Wyniki analizy R/S dla logarytmu wolumenu WIG20



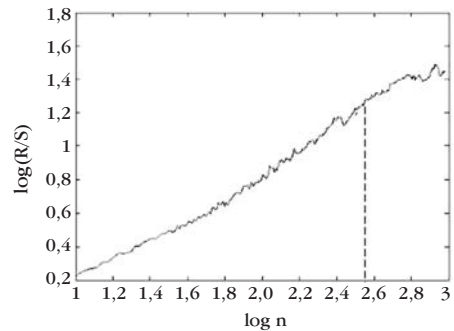
**Rys. 3.** Wyniki analizy R/S dla logarytmu wolumenu CAC40

### Logarytm wolumenu bez trendu

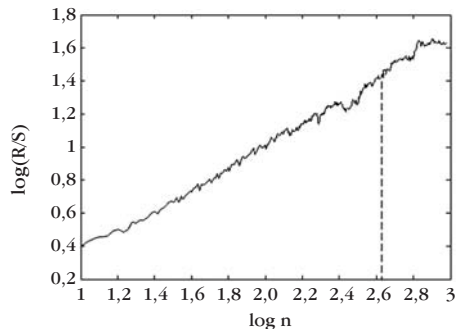
Zauważmy, że po wyeliminowaniu trendu w badanych szeregach wartości wykładnika Hursta nieco się zmniejszyły (zwłaszcza dla ATX i WIG20) (por. tab. 4), jednak w dalszym ciągu są to wartości wskazujące na występowanie długiej pamięci w procesie. Ponadto wyeliminowanie trendu z szeregów spowodowało, iż krzywe na rysunkach 4–6 odginają się „w dół”. Takie zachowanie pozwala na stwierdzenie występowania cykli oraz określenie ich długości. Analiza R/S ujawniła występowanie długiej pamięci we wszystkich badanych szeregach czasowych z usuniętym trendem. Ponadto możliwe było określenie długości cykli nieokresowych występujących w procesach, których realizacją są badane szeregi. I tak dla ATX wynosi on 371 dni handlowych, czyli około 1,5 roku kalendarzowego, dla WIG20 okres ten jest podobny i wynosi 360 dni biznesowych. Niewiele dłuższy okres uzyskaliśmy dla indeksu CAC40, wynosi on bowiem 417 dni biznesowych.



**Rys. 4.** Wyniki analizy R/S dla logarytmu wolumenu ATX z wyeliminowanym trendem



**Rys. 5.** Wyniki analizy R/S dla logarytmu wolumenu WIG20 z wyeliminowanym trendem



**Rys. 6.** Wyniki analizy R/S dla logarytmu wolumenu CAC40 z wyeliminowanym trendem

**Tabela 4**

Wartości wykładnika Hursta dla danych z usuniętym trendem

Indeks	Wykładnik Hursta	$\log n^*$	Długość cyklu w dniach
ATX	0,799	2,57	371
WIG20	0,891	2,56	360
CAC40	0,770	2,62	417

Źródło: obliczenia własne

W celu zweryfikowania poprawności stosowanych algorytmów przetestowano je na danych losowo przesortowanych. Uzyskane wyniki wskazują, iż po takiej operacji szeregi czasowe stają się realizacją procesów czysto losowych. We wszystkich przypadkach wykładnik Hursta ma wartość bliską 0,5, co potwierdza poprawność przeprowadzonych badań (tab. 5).

**Tabela 5**

Wartości wykładnika Hursta dla danych wymieszanych

Indeks	Wykładnik Hursta
ATX	0,5156
WIG20	0,5123
CAC40	0,4981

Źródło: obliczenia własne

## 5.2. Wyniki testu BDS, estymatory wymiaru korelacyjnego i największego wykładnika Lapunowa

### Test BDS

Analizując wyniki testu BDS zamieszczone w tabelach 6 i 7, stwierdzamy, iż we wszystkich przypadkach (niezależnie od rodzaju indeksu oraz wymiaru zanużnienia) mamy podstawy do odrzucenia hipotezy o tym, że szereg jest realizacją procesu i.i.d. (wartość krytyczna dla testu wynosi 2,58). Takie wyniki wskazują na występowanie zależności nieliniowych w badanym szeregu czasowym, co może być oznaką pojawienia się chaosu.

**Tabela 6**

Wyniki testu BDS dla logarytmu wolumenów w zależności od wymiaru zanurzenia

Indeks	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ATX	18,5	18,1	18,1	17,9	18,3	18,7	19,2	19,8	20,3
WIG20	130,5	147,3	164,9	186,5	214,7	250,7	296,6	355,5	431,8
CAC40	33,9	34,1	34,1	34,5	36,1	37,8	39,4	41,2	43,4

Źródło: obliczenia własne

**Tabela 7**

Wyniki testu BDS dla danych z usuniętym trendem w zależności od wymiaru zanurzenia

Indeks	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ATX	147,69	166,6	185,6	210,1	242,1	283,5	336,9	405,9	495,4
WIG20	18,21	18,7	18,6	18,9	19,2	19,6	19,9	20,3	20,7
CAC40	18,2	16,9	15,5	14,5	14,7	14,8	14,9	14,8	14,8

Źródło: obliczenia własne

### Wymiar korelacyjny

Przy analizie wymiaru korelacyjnego dla logarytmów wolumenu (por. tab. 8) widać dość wyraźną zbieżność wymiaru korelacyjnego przy zwiększaniu wymiaru zanurzenia dla wszystkich indeksów. W przypadku ATX oraz WIG20 zauważamy, że ograniczeniem górnym (całkowitym) jest 6, natomiast dla CAC40 wartość jest mniejsza i wynosi 5. Liczby te określają zatem wymiar korelacyjny badanych szeregów, a jednocześnie są oszacowaniem z dołu wymiaru atraktora i określają liczbę stopni swobody układu.

Wyniki z analogicznej analizy dla danych z usuniętym trendem (por. tab. 9) wskazują na wartość wymiaru korelacyjnego dla ATX oraz WIG20 na poziomie 6, czyli nieco wyższym niż dla danych z trendem. W przypadku indeksu CAC40 wartości wymiaru korelacyjnego dla danych z trendem i bez trendu kształtują się na tym samym poziomie.

W celu zweryfikowania poprawności obliczeń dokonano estymacji wymiaru korelacyjnego dla danych wymieszanych. Wyniki zamieszczone w tabeli 10 wskazują, że dla takich szeregów czasowych brak jakiegokolwiek zbieżności wymiaru korelacyjnego. Takie wyniki mogą świadczyć o poprawności wykonanych analiz.

**Tabela 8**

Wyniki estymacji wymiaru korelacyjnego w zależności od wymiaru zanurzenia (max. 16) dla logarytmu wolumentów

Indeks	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ATX	0,9	1,56	2,2	2,88	2,8	3,31	3,74	4,13	4,61	4,16	4,48	4,86	5,34	4,64	4,86	5,14
WIG20	0,89	1,55	2,17	2,82	3,66	3,82	3,92	4,35	4,75	5,05	5,19	4,86	5,17	5,49	5,89	5,53
CAC40	0,68	1,29	1,85	02,4	2,97	3,54	3,96	4,04	4,10	4,67	4,39	4,09	4,34	4,6	4,43	4,50

Źródło: obliczenia własne

**Tabela 9**

Wyniki estymacji wymiaru korelacyjnego w zależności od wymiaru zanurzenia (max. 16) dla danych z usuniętym trendem

Indeks	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ATX	0,75	1,49	2,25	2,97	3,72	3,88	4,87	5,47	4,87	5,47	4,95	5,23	5,47	5,67	5,85	6,04
WIG20	0,75	1,47	2,18	2,87	3,51	4,14	4,20	4,65	5,00	5,27	5,84	5,25	5,66	5,92	6,29	6,24
CAC40	0,54	1,06	1,58	2,07	2,57	3,07	3,43	3,59	3,32	3,65	3,97	4,27	4,62	4,64	4,49	4,53

Źródło: obliczenia własne

**Tabela 10**

Wyniki estymacji wymiaru korelacyjnego w zależności od wymiaru zanurzenia (max. 16) dla danych wymieszanych

Indeks	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ATX	0,92	1,84	2,74	3,64	4,16	4,67	5,7	6,58	7,03	7,31	8,13	8,76	9,25	9,64	10,32	10,37
WIG20	0,89	1,78	2,71	3,62	4,76	4,92	5,82	6,41	6,91	7,59	8,35	8,99	9,78	10,80	11,32	11,87
CAC40	0,84	1,76	2,63	3,74	4,57	4,82	5,95	6,61	7,11	7,79	8,65	9,29	9,68	10,40	11,03	11,77

Źródło: obliczenia własne

## Wykładnik Lapunowa

Wyniki uzyskane z estymacji największego wykładnika Lapunowa (por. tab. 11) są dość nietypowe dla szeregów pochodzących z rynków finansowych. We wszystkich przypadkach największy wykładnik Lapunowa dla logarytmów wolumenu jest ujemny. Wynik ten sugeruje że mamy do czynienia z układem dyssypatywnym a nie chaotycznym. Jednak dla danych z usuniętym trendem estymatory największych wykładników Lapunowa przyjmują niewielkie, lecz dodatnie wartości, które sugerują występowanie chaosu w badanych procesach. Wartości wykładników Lapunowa pozwolą na określenie czasu, po którym tracimy całkowitą informację o systemie (por. tab 12). Przykładowo dla ATX wartość wykładnika 0,00324 oznacza, że w ciągu każdego dnia tracimy 0,00324 bita informacji o układzie. Zatem całkowita utrata informacji nastąpi po  $1/0,00324=312$  dniach. Można również powiedzieć, że po 319 dniach system traci pamięć (z analizy R/S uzyskano czas 371 dni).

**Tabela 11**

Wyniki estymacji największego wykładnika Lapunowa dla logarytmu wolumenów

Indeks	Wykładnik Lapunowa
ATX	-0,00042049
WIG20	-0,00019163
CAC40	-0,0010424

Źródło: obliczenia własne

**Tabela 12**

Wyniki estymacji największego wykładnika Lapunowa dla danych z usuniętym trendem

Indeks	Wykładnik Lapunowa	Czas utraty informacji o systemie
ATX	0,0032468	312
WIG20	0,0040473	250
CAC40	0,0023094	430

Źródło: obliczenia własne



## 6. Wnioski

Wyniki przeprowadzonych badań nad występowaniem chaosu deterministycznego w szeregach czasowych wielkości obrotów wybranych indeksów są niejednoznaczne.

Z jednej strony wysokie wartości wykładnika Hursta świadczące o występowaniu długiej pamięci mogą być sygnałem tego, że analizowane szeregi czasowe mają strukturę nieliniową. Za występowaniem chaosu przemawia fakt, iż we wszystkich analizowanych przypadkach mamy do czynienia ze zbieżnością wymiaru korelacyjnego wraz ze zmianą wymiaru zanurzenia. Wprawdzie otrzymane graniczne wartości wymiaru korelacyjnego mogą świadczyć o tym, że nie jest to tzw. chaos „niskowymiarowy”, lecz sugerują one występowanie multifraktali.

Z drugiej strony wartości największego wykładnika Lapunowa dla szeregów z usuniętym trendem są dodatnie, jednak o bardzo niskiej wartości jak na procesy, które miałyby być generowane przez struktury chaotyczne. Ten fakt przemawiałby przeciwko fraktalnym właściwościom badanych szeregów czasowych.

Kwestią, którą należałoby dokładnie zbadać jest również zachowanie się badanych szeregów bez usuniętego trendu. Wyniki analizy R/S oraz otrzymane wartości największego wykładnika Lapunowa dla tych szeregów wymagają szczególnej i dodatkowej analizy.

W końcu porównując otrzymane wyniki do analogicznych wyników dla stóp zwrotu zamieszczonych w pracy Gurgula i Sudera [30], można wskazać wiele podobieństw i zbliżonych wyników w obu analizach. Jedną z istotniejszych różnic jest otrzymanie dla szeregu wielkości obrotów nieco niższych wartości estymatorów wymiaru korelacyjnego oraz nieco wyższych wartości wykładnika Hursta. Różnice te jednak nie są duże, co może przemawiać na rzecz prawdziwości sformułowanej wyżej hipotezy MDH, iż istnieje związek pomiędzy procesami generującymi szeregi stóp zwrotu oraz logarytmami wielkości obrotów.

## Literatura

- [1] Ajinkya B.B., Jain P.C., *The behavior of daily stock market trading volume*, „Journal of Accounting and Economics” 1989, Vol. 11, s. 331–359.
- [2] Andersen T.G., *Return volatility and trading volume: an information flow interpretation of stochastic volatility*, „Journal of Finance” 1996, Vol. 51, s. 169–204.
- [3] Avouyi-Dovi S., Jondeau E., *International transmission and volume effects in G5 stock market returns and volatility*, BIS Conference Papers, 2000, No. 8, s. 159–174.
- [4] Baillie R.T., *Long memory processes and fractional integration in econometrics*, „Journal of Econometrics” 1996, Vol. 73, s. 5–59.

- 
- [5] Beran J.A., *Statistical methods for data with long-range dependence*, „Statistical Science”, 1992, Vol. 7, s. 404–427.
- [6] Bernardo A., Judd K.L., *Volume and price formation in an asset trading model with asymmetric information*, Working Paper, 1996. Online unter: <http://ideas.repec.org/p/cdl/anderf/1136.html>.
- [7] Bessembinder H., Seguin P.J., *Price volatility, trading volume, and market depth: evidence from futures markets*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis” 1993, Vol. 28, s. 21–39.
- [8] Blume L., Easley D., O’Hara M., *Market statistics and technical analysis: The role of volume*, „Journal of Finance” 1994, Vol. 49, s. 153–181.
- [9] Brailsford T.J., *The empirical relationship between trading volume, returns and volatility*, „Accounting and Finance” 1996, Vol. 35, 89–111.
- [10] Brooks C., Hinich M.J., Smith M.J., *Nonlinear evolution in UK stock returns and volume*, w: Rothman R. (red.): *Nonlinear time series analysis of economic and financial data*, Kluwer Academic Publishers, 1999, s. 165–190.
- [11] Brock W.A., LeBaron B.D., *A dynamic structural model for stock return volatility and trading volume*, „The Review of Economics and Statistics” 1996, Vol. 78, s. 94–110.
- [12] Brock W.A., Hsieh D., LeBaron B.D., *A Test of Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability*, Cambridge: MIT Press, 1991.
- [13] Campbell J.Y., Grossmann S.J., Wang J., *Trading volume and serial correlation in stock returns*, „Quarterly Journal of Economics” 1993, Vol. 108, s. 905–939.
- [14] Chordia T., Swaminathan B., *Trading volume and cross-autocorrelations in stock returns*, „Journal of Finance” Vol. 55, s. 913–935.
- [15] Clark P.K., *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices*, „Econometrica” 1973, Vol. 41, s. 135–156.
- [16] Connolly R., Stivers C., *Momentum and reversals in equity-index returns during periods of abnormal turnover and return dispersion*, „Journal of Finance” 2003, Vol. 58, s. 1521–1555.
- [17] Copeland T.E., *A model of asset trading under the assumption of sequential information arrival*, „Journal of Finance” 1976, Vol. 31, s. 1149–1168.
- [18] Darrat A.F., Rahman S., Zhong M., *Intraday trading volume and return volatility of the DJIA stocks: a note*, „Journal of Banking and Finance” 2003, Vol. 27, s. 2035–2043.
- [19] Dockner E.J., Prskawetz A., Feichtinger G., *Nonlinear Dynamics and Predictability in the Austrian Stock Market*, C. Heij et. al. (red.), *System Dynamics in Economic and Financial Models*, John Wiley Press, 1997, s. 45–62.
- [20] Elsner J., *Chaos und Zufall am deutschen Aktienmarkt*, Heidelberg, Physica-Verlag 1996.
- [21] Epps T.W., Epps M.L., *The stochastic dependence of security price changes and transaction volumes: implications for the mixture-of-distribution hypothesis*, „Econometrica” 1976, Vol. 44, 305–321.

- [22] Fama E.F., *Efficient capital markets: A review of theory and empirical work*, „Journal of Finance” 1970, Vol. 25, s. 383–417.
- [23] Frank M., Gencay R., Stengos T., *International chaos?*, „European Economic Review” 1988, Vol. 32, s. 1569–1584.
- [24] Gallant A.R., Rossi P.E., Tauchen G., *Stock prices and volume*, „Review of Financial Studies” 1992, Vol. 5, s. 199–242.
- [25] Gallo G.M., Pacini B., *The effects of trading activity on market volatility*, „European Journal of Finance” 2000, Vol. 6, s. 163–175.
- [26] Gervais S., Kaniel R., Mingelgrin D.H., *The high-volume return premium*, „Journal of Finance” 2001, Vol. 56, s. 877–919.
- [27] Geweke J., Porter-Hudak S., *The estimation and application of long memory time series models*, „Journal of Time Series Analysis” 1983, Vol. 4, s. 221–238.
- [28] Glosten L., Milgrom P., *Bid, ask, and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders*, „Journal of Financial Economics” 1985, Vol. 13, s. 71–100.
- [29] Granger C.W.J., Joyeux R., *An introduction to long-memory time series models and fractional differencing*, „Journal of Time Series Analysis” 1980, Vol. 1, s. 15–29.
- [30] Gurgul H., Suder M., *Nieliniowa dynamika indeksów giełdowych WIG20 i ATX: analiza porównawcza*, „Ekonomia Menadżerska” 2010, nr 7, s. 103–120.
- [31] Harris L., *Transactinon data tests of the mixture of distributions hypothesis*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis” 1987, Vol. 22, s. 127–141.
- [32] Hiemstra C., Jones J.D., *Testing for linear and nonlinear Granger causality in the stock price – volume relation*, „Journal of Finance” 1994, Vol. 49, s. 1639–1664.
- [33] Hosking J.R.M., *Fractional differencing*, „Biometrika” 1981, Vol. 68, s. 165–176.
- [34] Hsieh D.A., *Chaos and nonlinear dynamics: Applications to financial markets*, „Journal of Finance” 1991, Vol. 46, s. 1839–1877.
- [35] Hurst H.E., *The Long Term Storage Capacity of Reservoirs*, „Transactions of the American Society of Civil Engineers” 1951, 116, s. 770–808.
- [36] Jaditz T., Sayers C.L., *Is chaos generic in economic data?* „International Journal of Bifurcations and Chaos” 1993, Vol. 3, s. 745–55.
- [37] Jayaraman N., Frye M.B., Sabherwal S., *Informed trading around merger announcements: an empirical test using transaction volume and open interest in options market*, „Financial Review” 2001, Vol. 37, s. 45–74.
- [38] Jennings R., Starks L., Fellingham J., *An equilibrium of asset trading with sequential information arrival*, „Journal of Finance” 1981, Vol. 36, s. 143–161.
- [39] Jung R.C., Liesenfeld R., *Testing the bivariate mixture hypothesis using German stock market data*, „European Financial Management” 1996, Vol. 2, s. 273–297.

- 
- [40] Karpoff J.M., *The relation between price changes and trading volume: a survey*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis” 1987, Vol. 22, s. 109–126.
- [41] Kempf A., Korn O., *Preisprognosen mit Handelsvolumen*, „Financial Markets and Portfolio Management” 1999, Vol. 13, s. 178–193.
- [42] Keszy C., *Informationsverarbeitung am Rentenmarkt*, Uhlenbruch-Verlag, 2004.
- [43] Lamoureux C.G., Lastrapes W.D., *Heteroskedasticity in stock return data: volume versus GARCH effects*, „Journal of Finance” 1990, Vol. 45, s. 221–229.
- [44] Lamoureux C.G., Lastrapes W.D., *Endogenous trading volume and momentum in stock-return volatility*, „Journal of Business and Economic Statistics” 1994, Vol. 12, s. 253–260.
- [45] Lee B.-S., Rui O.M., *Does trading volume contain information to predict stock returns? Evidence from China’s stock markets*, „Review of Quantitative Finance and Accounting” 2000, Vol. 14, s. 341–360.
- [46] Luu J.C., Martens M., *Testing the mixture-of-distributions hypothesis using „realized” volatility*, „Journal of Futures Markets” 2003, Vol. 23, s. 661–679.
- [47] Mandelbrot B.B., *When can a price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models*, „Review of Economics and Statistics” 1971, Vol. 53, s. 225–236.
- [48] Mandelbrot B.B., van Ness J.W., *Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications*, „SIAM Review” 1968, Vol. 10 (4), s. 422–437.
- [49] McKenzie M.D., Faff R.W., *The determinants of conditional autocorrelation in stock returns*, „Journal of Financial Research” 2003, Vol. 26, s. 259–274.
- [50] Omran M.F., McKenzie E., *Heteroscedasticity in stock returns data revisited: volume versus GARCH effects*, „Applied Financial Economics” 2000, Vol. 10, s. 553–560.
- [51] Peters E.E., *Teoria chaosu a rynki kapitalowe*, WIG Press, Warszawa 1997.
- [52] Ray B.K., Tsay R.S., *Long-range dependence in daily stock volatilities*, „Journal of Business and Economic Statistics” 2000, Vol. 18, s. 254–262.
- [53] Robinson P.M., *Semiparametric analysis of long-memory time series*, „Annals of Statistics” 1994, Vol. 22, s. 515–539.
- [54] Säfvenblad P., *Trading volume and autocorrelation: empirical evidence from the Stockholm stock exchange*, „Journal of Banking and Finance” 2000, Vol. 24, s. 1275–1287.
- [55] Sowell F.B., *Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models*, „Journal of Econometrics” 1992, Vol. 53, s. 165–188.
- [56] Suominen M., *Trading volume and information revelation in stock markets*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis” 2001, Vol. 36, s. 545–565.
- [57] Tauchen G.E., Pitts M., *The price variability – volume relationship on speculative markets*, „Econometrica” 1983, Vol. 51, s. 485–505.