

Henryk Gurgul\*, Marcin Suder\*

## Nieliniowa dynamika indeksów giełdowych WIG20 i ATX: analiza porównawcza

---

### 1. Wprowadzenie

Duże zainteresowanie deterministycznymi systemami chaotycznymi wynika z dwóch, częściowo przeciwstawnych powodów. Po pierwsze nie są one prognozowalne w długiej perspektywie czasowej. Konsekwencje każdego błędu pomiaru warunków początkowych narastają bowiem wykładniczo w czasie. Ta wrażliwość jeśli chodzi o warunki początkowe zwykle uwidacznia się w postaci dodatniego wykładnika Lapunowa (por. [12], [31]). Wykładnik ten nie jest niczym innym jak wykładniczą stopą wzrostu błędów. Równoważna charakterystyka systemów dynamicznych, oparta na teorii informacji, nawiązuje do entropii w sensie Kołmogorowa–Sinaia (por. [25], [38]). Może być ona rozumiana jako miara niepewności prognozy stanu systemu, której horyzont wynosi jeden. Po drugie, jeśli system dynamiczny, uważany za stochastyczny, okaże się chaotycznym, ale deterministycznym, to możliwa jest krótkoterminowa prognoza. Oznacza to, że szereg czasowy, który na pierwszy rzut oka wygląda na losowy, może w istocie okazać się prognozowalnym w krótkim horyzoncie czasowym. Jednakże istnieje wiele kontrowersji nie tylko co do możliwości stosowania nieliniowości i chaosu w ekonometrii, w tym w analizie finansowych szeregów czasowych, ale nawet odnośnie do wyników testów badania istnienia nieliniowości w ekonomicznych szeregach czasowych. Wynika to z tego, że w ekonomii – inaczej niż np. w naukach fizycznych – nie można przeprowadzać kontrolowanych eksperymentów, a poza tym systemy ekonomiczne mają znacznie większe wymiary niż systemy fizyczne.

W następnym rozdziale omówimy krótko literaturę ekonometryczną dotyczącą tej tematyki. W rozdziale 3 przedstawimy źródła i charakterystyki opisowe

---

\* Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Wydział Zarządzania, Pracownia Zastosowań Matematyki w Ekonomii, e-mail:henryk.gurgul@gmail.com; m\_suder@wp.pl

danych. Kolejny rozdział (4) zawiera przegląd i opis stosowanych w pracy metod, które są jednocześnie najpopularniejszymi metodami identyfikacji chaosu deterministycznego. W rozdziale 5 przedstawiono wyniki uzyskanych analiz wraz z ich interpretacją. Wnioski z przeprowadzonych badań zostaną sformułowane w rozdziale 6.

## 2. Przegląd literatury

W literaturze przedmiotu trwa dyskusja, czy w ekonomicznych lub finansowych szeregach czasowych jest obecny „niskowymiarowy” chaos (por. np. [22]). Pierwsze zastosowania podstawowych metod teorii chaosu w odniesieniu do rynków kapitałowych i innych działów ekonomii można znaleźć np. w pracach Docknera, Prskawetza i Feichtingera [8]; Elsnera [13]; Franka, Gencay i Stengosa [14]; Hsieh'a [20] oraz Petersa [32],[33].

Większość specjalistów z końca XX wieku zajmujących się teorią chaosu uważała, że nie ma przekonujących dowodów na obecność chaosu w danych finansowych. Wykrycie struktur chaotycznych w szeregach finansowych jest zwykle utrudnione z powodu obecności dużych składników losowych występujących w tych systemach dynamicznych. Test służący do wykrywania nieliniowych odstępstw od zachowania typowego dla białego szumu został opisany w pracy Scheinkmana i LeBarona [35]. Jednym z możliwych podejść jest testowanie szeregu czasowego za pomocą estymatorów entropii i wymiaru w szeregu wyjściowym oraz w szeregu reszt z modelu liniowego w połączeniu z testem BDS (Brock, Dechert i Scheinkman) (zob. [2], [3], [4]). Inną możliwością jest estymacja największego wykładnika Lapunowa i testowanie jego dodatniości.

Atraktor jest ukrytym, trudnym do zaobserwowania, uporządkowaniem procesu. Znając go, można dokonać przewidywań oraz wpłynąć na przebieg procesu. Poszukiwanie atraktorów jest ważnym kierunkiem badań w wielu dziedzinach nauki.

Wykładniki Lapunowa są wielkościami globalnymi, to znaczy reprezentują średnie wartości całego atraktora. W związku z tym nie mogą one dostarczyć informacji o lokalnych stopach odbiegania trajektorii od warunków początkowych, które mogą być w pewnych obszarach nawet ujemne, co oznacza zmniejszanie się odległości pomiędzy trajektoriami w pewnych obszarach atraktora. W języku prognozowania oznacza to obszary, w których jest możliwe formułowanie wiarygodnych krótkoterminowych prognoz. W innych obszarach te prognozy nie są możliwe z powodu wykładniczej propagacji błędów. Zjawisko zmieniającej się lokalnie stopy rozbieżności opisano w literaturze przedmiotu tzw. **efektywnymi wykładnikami Lapunowa** (por. [19]), **lokalnymi wykładnikami Lapunowa** (por. [10] i [41]) oraz **prognozowalnym wzorcem** (por. [9]).

Interpretacja lokalnego i globalnego wykładnika Lapunowa napotyka na trudności w przypadku układów stochastycznych zarówno na poziomie rozważań teoretycznych, jak i zastosowań praktycznych. Powodem komplikacji jest możliwość wzajemnego, złożonego oddziaływania składowych deterministycznych i losowych w układach dynamicznych. Jest to źródłem trudności w zdefiniowaniu stopnia wrażliwości trajektorii rozwiązań na warunki początkowe (zob. [30]). Ten typ szumu jest nazywany **szumem dynamicznym**. Jego przeciwieństwem jest tzw. szum pomiarowy niewpływający na dynamikę systemu. Określenie **chaos szumowy** jest związane z systemami chaotycznymi zakłócanymi szumem dynamicznym. Określenie to nie jest zbyt trafne, ponieważ standardowo zakłada się szum gaussowski, czyli dopuszcza składowe losowe nieskończonego wymiaru dla dowolnej dodatniej wariancji. Deterministyczny układ chaotyczny posiadający stabilny atraktor może się stać niestabilnym, jeśli zostanie zakłócony składowymi losowymi z rozkładami prawdopodobieństwa szumu określonymi na nieskończonym nośniku (por. [5]). Jest kilka powodów, dla których badacze zajmują się układami dynamicznymi z szumem dynamicznym. Atraktor dopuszcza stosowanie różnych miar niezmienniczych. Jak podają Eckmann i Ruelle [12] stosowana miara powinna się niewiele różnić od miary niezmienniczej odpowiadającej układowi dynamicznemu z małym szumem dynamicznym. Nawet wtedy, gdy chce się modelować układ dynamiczny, będący w istocie deterministycznym, nie ma pewności, czy ten układ należy do układów, które mogą być opisywane za pomocą rozważanej grupy modeli. W związku z tym bardziej odpowiednim podejściem jest modelowanie danych za pomocą nieliniowych układów dynamicznych z szumem dynamicznym (zob. [5]).

W efekcie w ekonomii i finansach ma się często do czynienia z układami dynamicznymi, dla których zaobserwowane trajektorie, jak indeksy giełdowe, wykazują niewielką korelację, jeśli chodzi o warunkową średnią odpowiadającą składowej deterministycznej, przy równoczesnej bogatej strukturze warunkowej wariancji odpowiadającej składowej losowej. W praktyce, w przypadku takich układów dynamicznych jak indeksy giełdowe, badacze i inwestorzy interesują się przede wszystkim własnościami składowej losowej, to znaczy dynamiką wariancji warunkowej. W teorii szeregów czasowych zależność warunkowej wariancji od czasu nazywa się niejednorodnością (heteroskedastycznością). Na te tematy, szczególnie w przypadku finansowych szeregów czasowych, napisano wiele prac należących do literatury przedmiotu (np. zob. [1]).

Wykładnik Lapunowa został zdefiniowany tylko dla systemów deterministycznych. Pomimo tego procedura estymacji wszystkich lub przynajmniej największego wykładnika Lapunowa (por. [11], [16], [34], [24] oraz [40]) była i jest stosowana do finansowych szeregów czasowych generowanych przez szum bądź będących pod wpływem szumu. Jednakże w przypadku stochastycznych układów dynamicznych bezkrytyczne stosowanie tych procedur może prowadzić do tzw. „pozornie

dodatnich” wykładników (zob. [39]). Daemmig i Mitschke [6] dowodzą, że dla szeregu czasowego będącego białym szumem algorytm zaproponowany przez Wolfa i in. [40] może generować różne dodatnie wartości wykładnika Lapunowa, które zależą od parametrów obliczeniowych. Jeśli wykładniki Lapunowa są estymowane na podstawie „zanurzonej” dynamiki, co zwykle ma miejsce w praktyce, to jest możliwe otrzymanie większych wykładników Lapunowa niż największy wykładnik otrzymany na podstawie rzeczywistej dynamiki, nawet dla układów czysto deterministycznych (por. [7], [17]). Tego problemu najczęściej unika się przez uwzględnienie na początku procedury małego zanurzenia wymiaru, powiększanego w kolejnych krokach. Kilka algorytmów estymacji wykładników Lapunowa w zastosowaniu do szeregów finansowych, takich jak stopy zwrotu, indeksy giełdowe, czy kursy wymiany walut można znaleźć w [7], [11] oraz [13]. W tych opracowaniach podano podobne wyniki obliczeń. Oszacowane wykładniki Lapunowa są małymi liczbami dodatnimi. Możliwym wyjaśnieniem w przypadku tych wyników jest to, że analizowane szeregi finansowe mogły wykazywać pierwiastki jednostkowe (czyli niestacjonarność). Fakt otrzymania małych i dodatnich wykładników Lapunowa może skłaniać do założenia istnienia wysokowymiarowego układu chaotycznego generującego zachowanie podobne do losowego z powodu swojego ukrytego wymiaru (zob. [13]). Jeszcze innym możliwym powodem otrzymywania wykładników bliskich zeru może być przyjęcie niewłaściwych wartości parametrów w algorytmie estymacji. Gencay [15] wprowadził do literatury przedmiotu estymowanie największego wykładnika Lapunowa szeregu czasowego generowanego przez układ dynamiczny w postaci przedziału ufności. Schittenkopf i in. [36] zastosowali metodę estymacji wykładników Lapunowa polegającą na wyznaczeniu rozkładów empirycznych wykładników Lapunowa za pomocą techniki bootstrapu. Ich zdaniem metoda ta jest bardziej niezawodnym narzędziem analizy deterministycznych i stochastycznych układów dynamicznych. Autorzy zbadali mapę logistyczną wartości parametru chaotycznego bez szumu i dla przypadku chaotycznej wartości parametru bez szumu oraz dla chaotycznej wartości parametru z szumem i bez szumu szeregu wartości austriackiego indeksu giełdowego ATX oraz szeregu czasowego, bez chwilowych zależności powstałych z „przemieszania” szeregu ATX. Wyniki części empirycznej skłoniły autorów do posłużenia się koncepcją wrażliwej zależności od warunków początkowych dobrze zdefiniowaną dla stochastycznych układów dynamicznych. Chodziło o pomysł Yao i Tonga [42] opisu wzajemnego oddziaływania składowych deterministycznej i stochastycznej za pomocą miary teoretyczno-informacyjnej dotyczącej odległości pomiędzy funkcjami gęstości prawdopodobieństwa. Ta miara wrażliwości oparta na odległości pomiędzy trajektoriami jest naturalnym rozszerzeniem pojęcia wykładników Lapunowa. Jednakże w przeciwieństwie do wykładników Lapunowa jest ona miarą lokalną zależną od stanu. W nawiązaniu do pracy Yao i Tonga

[42], Schittenkopf i in. [36] wyprowadzili wyrażenia mogące służyć jako miara wrażliwości dynamiki stochastycznej o stałej lub zależnej od stanu wariancji. Mogą one być zastosowane do wielu modeli wykorzystywanych w nieliniowej analizie szeregów czasowych, przy czym chodzi tu o modele tak homoskedastyczne jak i heteroskedastyczne (np. AR, ARCH, GARCH).

Zagadnienia chaosu i dynamiki nieliniowej były przedmiotem nielicznych dotąd prac w literaturze polskiej. Wynika to ze stosunkowo krótkiej historii polskiego rynku kapitałowego. Opublikowane prace dotyczyły głównie empirycznych zastosowań metod fraktalnych. Główną publikacją podejmującą tę tematykę jest praca Siemieniuk [37], w której autorka bada właściwości fraktalne szerokiego spektrum spółek istniejących na GPW w Warszawie oraz indeksu WIG w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku. Wyniki pracy oparte na analizie R/S, wykładniku Hursta, wymiarze korelacyjnym oraz największym wykładniku Lapunowa dla indeksu WIG wskazują na chaotyczny charakter badanych szeregów czasowych. Przykładowo dla tygodniowych stóp zwrotu indeksu WIG autorka uzyskała wartość estymatora wykładnika Hursta dla WIG-u na poziomie 0,70, natomiast wartość wymiaru korelacyjnego została ustalona na zaskakująco niskim poziomie 2,47. Jak zauważa sama autorka, poprawność niektórych uzyskanych wyników może zostać poddana w wątpliwość w związku z krótkim okresem analizy szeregu czasowego. Fakt ten potwierdzają również wyniki uzyskane przez Jajugę i Papłę [23], którzy analizowali 38 szeregów czasowych pochodzących z GPW w Warszawie z nieco krótszego okresu. W swojej pracy autorzy wskazują na brak zbieżności wymiaru korelacyjnego dla większości badanych szeregów z jakąkolwiek wartością, co wskazywałoby na brak występowania chaosu deterministycznego w badanych szeregach czasowych. Zastosowaniem wykładnika Lapunowa do identyfikacji chaosu na GPW w Warszawie zajmowali się w swoich pracach także Kwiatkowski i Orzeszko (zob. [26]). Biorąc pod uwagę wcześniejsze badania oraz fakt, że GPW w Warszawie i Wiedniu mają podobną historię (indeks ATX jest notowany od 2.01.1991 roku z wartością bazową 1000 punktów i obejmuje obecnie 21 spółek; indeks WIG wystartował 16.04.1994 roku i obejmuje 20 spółek – miał również wartość bazową 1000), porównywalną kapitalizację oraz są lokalnymi rywalami, obliczenia przeprowadzono na podstawie danych dla tych właśnie giełd.

### 3. Opis danych

W celu porównania badanych własności obu rynków finansowych wykorzystano codzienne dane dotyczące indeksów ATX oraz WIG20 z okresu od stycznia 2001 do sierpnia 2008. W przeprowadzonych analizach wykorzystano notowania ( $S_t$ ) wspomnianych indeksów. Badania oparto na dziennych stopach zwrotu

$R_t = \ln(S_t/S_{t-1})$  oraz resztach z odpowiednio dobranych modeli ARMA (dla ATX był to model AR(3) natomiast dla WIG20 model ARMA(2,1)) .

Wstępną charakterystykę danych będącą równocześnie pierwszym etapem analizy porównawczej badanych szeregów reprezentujących dwie konkurujące ze sobą giełdy rozpoczęto od wyznaczenia podstawowych statystyk dla stóp zwrotu. Dodatkowo w pierwszej części analizy przeprowadzono podstawowe testy normalności.

Przedstawione w tabeli 1 podstawowe statystyki dla stóp zwrotu z badanych indeksów wskazują na różnicę w zakresie miar asymetrii oraz skupienia. Stopy zwrotu ATX charakteryzują się silną asymetrią lewostronną oraz silnym skupieniem, w przeciwieństwie do stóp zwrotu WIG20, w przypadku którego nie występuje asymetria, natomiast skupienie jest istotnie mniejsze niż dla ATX.

**Tabela 1**  
Podstawowe statystyki dziennych stóp zwrotu indeksów

Indeks	liczebność	średnia	odch. std.	min.	maks.	skośność std.	kurtoza std.
ATX	1900	0,000635	0,0109	-0,077	0,05352	-12,86	34,92
WIG20	1923	0,0001896	0,0148	-0,062	0,0548	0,31	9,41

Źródło: obliczenia własne

Wyniki testów normalności wskazują na lepsze dopasowanie rozkładu normalnego do stóp zwrotu WIG20 w porównaniu z ATX, choć w żadnym przypadku nie można stwierdzić normalności rozkładów tych stóp (por. tabela 2).

**Tabela 2**  
Wyniki testów normalności dla dziennych stóp zwrotu indeksów

Testy	Indeks	ATX		WIG20	
		statystyka	wartość $p$	statystyka	wartość $p$
chi-kwadrat		187,36	1,37E-11	128,48	0,0001
statystyka Shapiro-Wilka		0,96	0,0000	0,9846	0,0043
statystyka skośności Z-score		8,2348	2,22E-16	0,2198	0,8259
statystyka kurtozy Z-score		12,47	0,0000	6,21	5,29E-10
statystyka Jarque'a-Bera		1371,17	0,0000	87,38	0,0000

Źródło: obliczenia własne

## 4. Metodologia

Głównym celem artykułu jest wykorzystanie wybranych metod statystycznych do identyfikacji w badanych szeregach czasowych występowania struktur nieliniowych oraz chaosu deterministycznego. Autorzy wybrali najbardziej popularne metody statystyczne, tj. analizę R/S, wykładnik Hursta, test BDS, wymiar korelacyjny oraz największy wykładnik Lapunowa.

### 4.1. Analiza R/S i wykładnik Hursta

Analiza przeskalowanego rozstępu (ang. *rescaled range*, ozn.  $R/S$ ), w której występuje wykładnik Hursta jest przykładem techniki nieparametrycznej, którą jako pierwszy zastosował Hurst (zob. [21]), badając poziom wody na Nilu i powtarzanie się wylewów tej rzeki. Zajmowali się nią również, wprowadzając pewne poprawki, Mandelbrot [28], Lo [27] oraz Moody i Wu [29].

Analiza ta opiera się na badaniu zakresu skumulowanych odchyień od średniej. Hurst za pomocą przeskalowanego zasięgu rozszerzył model Einsteina<sup>1</sup> na następujący:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_n = c \cdot n^H \quad (1)$$

gdzie  $S$  oznacza odchylenie standardowe przyrostów badanego szeregu w czasie  $n$ ,  $c$  – stałą dodatnią,  $n$  – liczbę elementów szeregu czasowego. Wielkość  $H$  nazywana jest wykładnikiem Hursta. Jeśli badany proces byłby rzeczywiście losowy, to wraz ze wzrostem  $n$  wartość  $H$  z zależności (1) powinna zmierzać do 0,5. W przeciwnym wypadku można przypuszczać, że nie ma się do czynienia z procesem typowo losowym, lecz z procesem z tzw. długą pamięcią.

Analiza  $R/S$  zaproponowana przez Hursta dla zadanego szeregu  $x_1, x_2, \dots, x_N$  przebiega w pięciu etapach:

1. Szereg ten dzieli się na podszeregi czasowe liczące po  $n$  obserwacji.
2. Dokonuje się scentrowania każdego szeregu czasowego poprzez odjęcie średniej arytmetycznej, otrzymując szereg:  $z_1, z_2, \dots, z_N$ .
3. Tworzy się skumulowane szeregi czasowe, według wzoru:  $y_i = \sum_{j=1}^i z_j$ .
4. Oblicza się rozstępy skumulowanych szeregów czasowych, według wzoru:  $R_i = \max(y_1, y_2, \dots, y_i) - \min(y_1, y_2, \dots, y_i)$ .
5. Dla każdego skumulowanego szeregu czasowego oblicza się tzw. przeskalowane rozstępy, dzieląc rozstęp przez odchylenie standardowe tego szeregu.

<sup>1</sup> Einstein wykazał, iż cząsteczki poruszające się ruchem Browna pokonują w czasie  $T$  drogę równą  $R_T = T^{1/2}$ .



Procedurę opisaną w punktach 1–5 przeprowadza się dla różnych długości  $N$  szeregu czasowego. W ten sposób otrzymuje się zależność wielkości  $R/S$  od długości  $N$  szeregu postaci (1). Aby wyznaczyć wartość wykładnika Hursta dla dowolnego szeregu, należy zlogarytmować równanie (1), otrzymując:

$$\ln(R/S) = \ln(c) + H \ln(n) \quad (2)$$

Następnie za pomocą regresji liniowej estymujemy wartość  $H$  będącą współczynnikiem kierunkowym w równaniu (2). Zatem wykładnik Hursta określa nachylenie krzywej otrzymanej przez wykreślenie w skali podwójnie logarytmicznej  $(R/S)_n$  względem  $n$ .

Przy wyznaczaniu przeskalowanego zasięgu oraz wykładnika Hursta dla szeregów czasowych pochodzących z rynków finansowych mamy pewne ograniczenia związane z długością badanego szeregu czasowego. Jest to również bezpośrednio związane z ilością dzielników liczby określającej długość szeregu. W związku z tym ilość danych do analizy modyfikujemy w ten sposób, aby  $N$  miało jak najwięcej dzielników naturalnych. Czasami wiąże się to ze skróceniem analizowanego szeregu (zazwyczaj odcinamy kilka najstarszych obserwacji). Drugim istotnym problemem jest fakt, że w szeregach naturalnych mogą występować cykle (procesy o skończonej pamięci), które zniekształcają wyniki otrzymane przy użyciu opisanego algorytmu. Należy zatem szczegółowo przeanalizować wykres  $\log(R/S)_n$  względem  $\log n$  oraz zbadać, czy nie istnieje taki punkt  $\log n^*$ , w którym wykreślona krzywa istotnie zmienia swoje nachylenie. Jeśli taki punkt istnieje, należy wówczas do wyznaczania wartości  $H$  użyć tylko wartości  $(R/S)_n$  wyznaczonych dla  $n < n^*$ . W przypadku, gdy dla wartości  $n \geq n^*$  współczynnik regresji będzie zbliżony do wartości 0,5 (w szczególności, gdy wartość  $H$  otrzymana z regresji jest nieistotna) możemy powiedzieć, że pamięć w systemie jest skończona i proces staje się białym szumem. Wartość  $n^*$  uważa się za średnią długość cyklu nieokresowego.

Podsumowując, analiza przeskalowanego zasięgu, to bardzo mocny nieparametryczny test do sprawdzania, czy badany szereg jest losowy, czy też nie. Dodatkowa korzyść wynikająca z tej analizy polega na wykrywaniu długości cykli (o ile istnieją). Nie dotyczy to tylko regularnych cykli okresowych, ale również cykli nieokresowych.

## 4.2. Wymiar korelacyjny, test BDS

Metoda wyznaczania wymiaru korelacyjnego, zaproponowana przez Grassbergera i Procaccia [18], polega na odtwarzaniu wielowymiarowego atraktora na podstawie jednowymiarowego szeregu czasowego. Dane wyższych wymiarów otrzymywane są jako przesunięte dane jednowymiarowego szeregu czasowego. Określenie wymiaru atraktora odbywa się przez zwiększanie wymiaru



szeregu danych, zwanego wymiarem zanurzenia oraz określenie dla każdego z otrzymywanych szeregów danych wymiaru korelacyjnego. Gdy przy kolejnym zwiększeniu wymiaru danych wymiar korelacyjny nie zwiększa się, oznacza to, że jest to właśnie poszukiwany wymiar. Załóżmy zatem, że dany jest szereg czasowy  $x_1, x_2, \dots, x_T$ . Oznaczmy przez  $X_{t,m}$  wektor  $m$ -wymiarowy postaci

$$X_{t,m} = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+m-1}). \quad (3)$$

Wymiar korelacyjny określa się, wyznaczając tzw. całkę korelacyjną, według wzoru:

$$C_{m,N}(\varepsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \cdot \sum_{1 \leq t < s \leq N} H(\varepsilon - \|X_{t,m} - X_{s,m}\|), \quad (4)$$

gdzie  $N = T - m + 1$ ,  $H(x)$  jest funkcją skokową Heaviside'a określoną wzorem

$$H = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}, \text{ natomiast } \| \| \text{ oznacza dowolną normę w przestrzeni}$$

$m$ -wymiarowej.

Okazuje się, jak wykazał Brock i in. [4], że wartość całki nie zależy od wyboru normy. Całkę tę można interpretować jako prawdopodobieństwo tego, że dwa losowo wybrane elementy ciągu są oddalone (w sensie wybranej normy) na odległość mniejszą niż  $\varepsilon$ . Przechodząc do granicy, otrzymujemy wzór na wartość wymiaru korelacyjnego:

$$D_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C_{m,N}(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (5)$$

Przybliżoną wartość wymiaru korelacyjnego uzyskujemy, wyznaczając współczynnik kierunkowy regresji zmiennej  $\ln C_{m,N}(\varepsilon)$  względem  $\ln \varepsilon$  przy zastosowaniu niewielkich wartości  $\varepsilon$ .

Wymiar korelacyjny jest ważną informacją o systemie, ponieważ umożliwia ustalenie minimalnej liczby zmiennych dynamicznych potrzebnych do opisanego układu. Jednocześnie wymiar korelacyjny stanowi dolną granicę liczby możliwych stopni swobody.

Pojęcie całki korelacyjnej zostało również wykorzystane w teście BDS. Test ten został stworzony jako silne narzędzie do identyfikacji występowania chaosu deterministycznego. Weryfikuje on hipotezę zerową o tym, że analizowany proces jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie (i.i.d.). W rzeczywistości więc test BDS identyfikuje występowanie zależności nieliniowych w badanym szeregu czasowym, co może być oznaką pojawiania się chaosu.

Statystyka BDS przyjmuje postać:

$$BDS = \sqrt{N} \left[ C_{m,N}(\varepsilon) - (C_{1,N}(\varepsilon))^m \right] \quad (6)$$

i ma ona asymptotyczny rozkład normalny ze średnią 0 i znaną wariancją zależną od  $\varepsilon$  oraz  $m$ .

### 4.3. Największy wykładnik Lapunowa

Największy wykładnik Lapunowa jest miarą badającą wrażliwość układu na warunki początkowe. Jest miarą szybkości „rozbiegania” się bliskich sobie trajektorii układu.

Wyznaczenie największego wykładnika Lapunowa możliwe jest w przypadku, gdy znane są charakterystyki atraktora, takie jak: wymiar korelacyjny, średni czas orbitalny oraz opóźnienie czasowe. Na atraktorze, którego wymiar korelacyjny został oszacowany, wybieramy dwa punkty odległe od siebie co najmniej o jeden okres orbitalny. Odległość tych punktów oznaczamy przez  $L(t_i)$ . Następnie obliczamy odległość wybranych punktów po upływie pewnego czasu, którą oznaczamy przez  $L'(t_{i+1})$ . Największy wykładnik Lapunowa obliczamy, korzystając ze wzoru:

$$L_1 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^m \log_2 \frac{L'(t_{i+1})}{L(t_i)}, \quad (7)$$

gdzie  $m$  oznacza liczbę okresów, natomiast  $t$  okres badania.

Dodatnia wartość największego wykładnika Lapunowa oznacza, że mamy do czynienia z układem chaotycznym, a wartość wykładnika pozwala na określenie czasu, po którym całkowicie tracimy informację o systemie, co jest istotnie powiązane z możliwościami i jakością predykcji.

## 5. Wyniki badań

Prezentację wyników badań zaczniemy od analizy  $R/S$  i estymacji współczynnika Hursta.

### 5.1. Wyniki analizy $R/S$ oraz estymacji wykładnika Hursta

Próbie wykrycia cykli oraz określenia ich długości rozpoczęto od wykreślenia wartości  $\log(R/S)_n$  w zależności od  $\log(n)$  dla  $n = 10, \dots, N/2$ . Zagęszczenie punk-

tów krzywej przez użycie do wyznaczenia wartości  $(R/S)_n$  wszystkich liczb naturalnych  $n$  z przedziału  $[10, N/2]$  pozwoli na dokładniejsze określenie wartości  $\log(n^*)$  (o ile istnieje), w której następuje istotna zmiana nachylenia krzywej. Na wykresach zaznaczono również proste regresji dla  $n \in [10, n^*]$  oraz dla  $n \in [n^*, N/2]$ . Współczynnik kierunkowy prostej uzyskanej w wyniku regresji liniowej dla  $n \in [10, n^*]$  jest jednocześnie wartością wykładnika Hursta uzyskanego przy zastosowaniu zmodyfikowanego algorytmu. Zmiana nachylenia badanych wykresów i jego ustalenie się na poziomie zbliżonym do 0,5 oznacza, że badany proces traci pamięć i staje się losowy. Punkt, w którym krzywa się „odgina” uznajemy za wartość określającą długość pamięci procesu i jednocześnie za średnią długość cyklu nieokresowego.

Wyniki analizy dla stóp zwrotów ATX oraz WIG20 wskazują, iż w badanych szeregach występują zależności długookresowe (efekt długiej pamięci). Wyższa wartość wykładnika Hursta dla indeksu ATX świadczy o tym, że w przypadku szeregu ATX występowanie chaosu deterministycznego jest silniejsze niż dla WIG20. Wartości wykładnika Hursta uzyskane dla szeregów reszt z modelu ARMA są zbliżone do tych z szeregów niemodyfikowanych. Fakt ten jest potwierdzeniem występowania struktur nieliniowych w badanych szeregach (tab. 3).

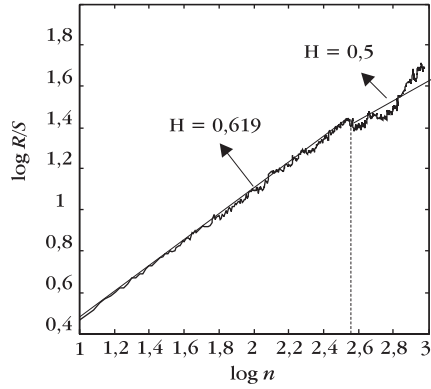
Tabela 3

Wartości wykładnika Hursta oraz długości cykli nieokresowych

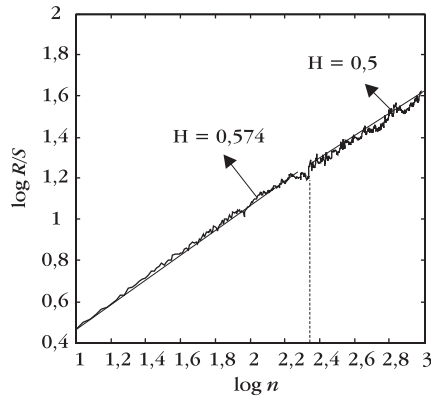
Indeks	Wykładnik Hursta	$n^*$	Długość cyklu w dniach
ATX	0,619	2,58	380
WIG20	0,574	2,36	230
reszty modelu ARMA dla ATX	0,606	2,55	355
reszty modelu ARMA dla WIG20	0,595	2,47	295

Źródło: obliczenia własne

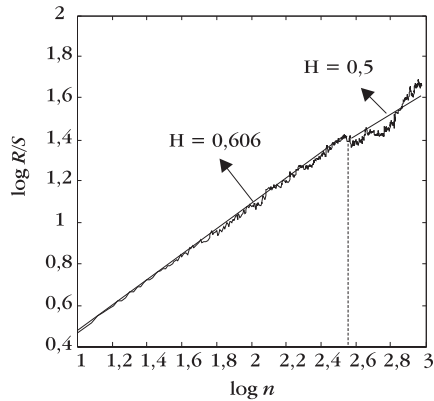
Analiza  $R/S$  (por. rys. 1–4) pozwoliła również na wyznaczenie długości cykli nieokresowych. I tak dla ATX wynosi on 380 dni handlowych, czyli około 1,5 roku kalendarzowego, natomiast dla WIG20 okres ten jest krótszy i wynosi 230 dni biznesowych, czyli około 1 roku kalendarzowego.



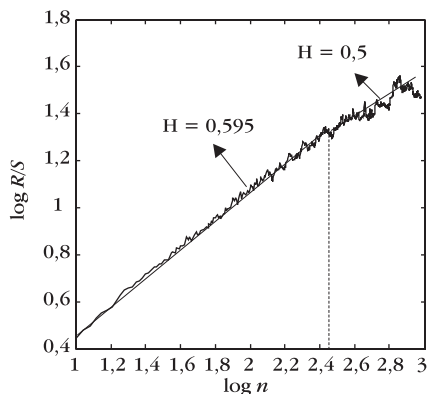
Rys. 1. Wyniki analizy  $R/S$  dla stóp zwrotu ATX



Rys. 2. Wyniki analizy  $R/S$  dla stóp zwrotu WIG20



Rys. 3. Wyniki analizy  $R/S$  dla reszt z modelu ARMA w przypadku stóp zwrotu ATX



Rys. 4. Wyniki analizy R/S dla reszt z modelu ARMA w przypadku stóp zwrotu WIG20

## 5.2. Wyniki testu BDS, estymatory wymiaru korelacyjnego i największego wykładnika Lapunowa

Analizując wyniki testu BDS zamieszczone w tabelach 4 i 5, stwierdzamy, iż w przypadku stóp zwrotu indeksu WIG20 dla wymiaru zanurzenia 2–3 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o tym, że szereg jest realizacją procesu i.i.d.

Tabela 4

Wyniki testu BDS dla stóp zwrotu z indeksów

Indeks	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ATX	7,499	10,492	12,58	14,32	15,61	16,89	18,42	19,825	21,262
WIG20	0,91*	1,17*	2,60	3,64	4,95	6,01	6,75	7,57	8,45

Źródło: obliczenia własne

Uwaga: \* oznacza, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że dane są realizacją procesu i.i.d. przy poziomie istotności 1%. Wartość krytyczna dla testu wynosi 2,58.

Tabela 5

Wyniki testu BDS dla reszt z modelu ARMA

Indeks	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ATX	7,33	10,372	12,463	14,223	15,523	16,821	18,357	19,772	21,236
WIG20	0,82*	1,13*	2,55*	3,61	4,94	6,02	6,76	7,59	8,49

Źródło: obliczenia własne

Przy analizie rezultatów wymiaru korelacyjnego dla stóp zwrotu (por. tab. 6, rys. 5) widać dość wyraźną zbieżność wymiaru korelacyjnego przy zwiększaniu wymiaru zanurzenia dla obydwu indeksów. W przypadku WIG20 zauważamy, że ograniczeniem górnym (całkowitym) jest 7, natomiast dla ATX wartość ta wynosi 6. Liczby te określają zatem wymiar korelacyjny badanych szeregów, a jednocześnie są oszacowaniem z dołu wymiaru atraktora i określają liczbę stopni swobody układu. Zatem dla indeksu polskiego minimalna liczba zmiennych potrzebnych do opisu układu wynosi 7, zaś dla indeksu ATX równa jest 6. Wyniki z analogicznej analizy dla reszt z modelu ARMA wskazują na to, że wymiar korelacyjny dla ATX wynosi 5, przy niezmiennym wymiarze dla WIG20 (por. tab. 7, rys. 6).

**Tabela 6**

Wyniki estymacji wymiaru korelacyjnego w zależności od wymiaru zanurzenia (max. 16)

Indeks	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ATX	0,73	1,44	2,14	2,81	3,40	3,99	4,15	4,38	4,53	4,66	5,11	4,70	5,03	5,42	5,34	5,40
WIG20	0,79	1,57	2,33	3,05	3,76	3,92	4,40	5,02	5,30	5,40	5,75	6,20	6,64	6,69	6,72	6,59

Źródło: obliczenia własne

**Tabela 7**

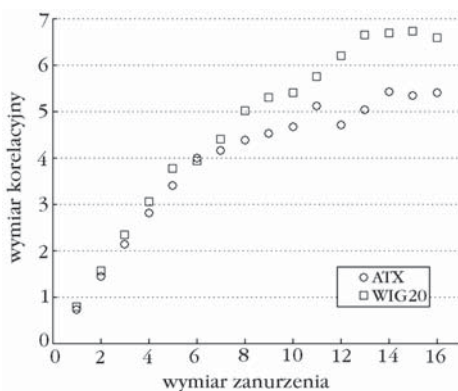
Wyniki estymacji wymiaru korelacyjnego w zależności od wymiaru zanurzenia (max. 16) dla reszt z modelu ARMA

Indeks	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ATX	0,64	1,26	1,85	2,40	2,96	3,43	3,95	4,01	4,15	4,27	4,65	4,72	4,79	4,99	4,85	4,90
WIG20	0,78	1,54	2,29	3,02	3,71	4,22	4,70	5,12	5,25	5,41	5,74	5,87	6,08	6,23	6,57	6,25

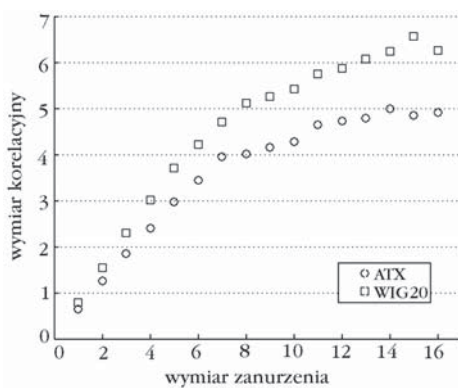
Źródło: obliczenia własne

Wyniki uzyskane z estymacji największego wykładnika Lapunowa (por. tab. 8) sugerują, że we wszystkich przypadkach mamy do czynienia z szeregami czasowymi realizującymi procesy o charakterze chaotycznym.

Jak już wspominaliśmy wykładnik Lapunowa mówi nam, w jakim tempie tracimy informację o układzie. Przykładowo dla ATX wartość wykładnika 0,00343 oznacza, że w ciągu każdego dnia tracimy 0,00343 bita informacji o układzie. A zatem całkowita utrata informacji nastąpi po  $1/0,00343=291$  dniach. Można również powiedzieć, że po 319 dniach system traci pamięć (z analizy *R/S* uzyskano czas 380 dni). Wyniki uzyskane z tej analizy różnią się nienacalnie od uzyskanych z analizy *R/S*. Błąd może wynikać ze stosunkowo niewielkiej liczby wykorzystanych do badania danych.



Rys. 5. Porównanie wymiaru korelacyjnego dla stóp zwrotu



Rys. 6. Porównanie wymiaru korelacyjnego dla reszt z modelu ARMA

Tabela 8

Wyniki estymacji największego wykładnika Lapunowa dla stóp zwrotu

Indeks	Wykładnik Lapunowa	Czas utraty informacji o systemie
ATX	0,0034	319
WIG20	0,0038	263
reszty modelu ARMA dla ATX	0,0041	241
reszty modelu ARMA dla WIG20	0,0042	238

Źródło: obliczenia własne



## 6. Wnioski

Uzyskane wyniki wskazują, iż w badanym okresie indeksy ATX oraz WIG20 wykazywały dość zbliżone własności statystyczne. W przypadku indeksu ATX zwraca uwagę silnie leptokurtotyczny charakter stóp zwrotu w porównaniu do WIG20. Analiza  $R/S$  oraz wykładnika Hursta w obydwu przypadkach wskazała na występowanie długiej pamięci oraz cykli nieokresowych. Jednakże dla indeksu ATX wartość wykładnika Hursta jest istotniejsza, a cykle dłuższe. Otrzymane wartości wymiaru korelacyjnego wskazują w obydwu przypadkach na występowanie chaosu deterministycznego. Jednakże w obydwu przypadkach mamy do czynienia z dość skomplikowanymi układami. W przypadku indeksu WIG20 potrzebujemy 7 zmiennych do opisu układu, a dla indeksu ATX 6. Przy takiej liczbie zmiennych możemy mówić o występowaniu tzw. multifraktali.

## Literatura

- [1] Bollerslev T., Chou R.Y., Kroner K.F., *ARCH modelling in finance: A review of the theory and empirical evidence*, „Journal of Econometrics” 1992, Vol. 52, s. 5–59.
- [2] Brock W.A., *Distinguishing random and deterministic systems: Abridged version*, „Journal of Economic Theory” 1986, Vol. 40, s. 168–195.
- [3] Brock W.A., Dechert W.D., Scheinkman J.A., *A test for independence based on the correlation dimension*, Social Systems Research Institute, University of Wisconsin–Madison, 1987, Working paper no. 8702.
- [4] Brock W.A., Hsieh D., LeBaron B., *A Test of Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability*, Cambridge: MIT Press, 1991.
- [5] Chan K.S., Tong H., *A note on noisy chaos*, „Journal of the Royal Statistical Society B” 1994, Vol. 56, s. 301–311.
- [6] Daemig M., Mitschke F., *Estimation of Lyapunov exponents from time series: The stochastic case*, „Physics Letters A” 1993, Vol. 178, s. 385–394.
- [7] Dechert W.D., Gencay R., *Lyapunov exponents as a non-parametric diagnostic for stability analysis*, „Journal of Applied Econometrics”, Oct–Dec 1992, supplement, Vol. 7, s. 541–560.
- [8] Dockner E.J., Prskawetz A., Feichtinger G., *Non-linear dynamics and predictability in the Austrian stock market*, „Systems in economic and financial models”, 1997, Series in Financial Economics and Quantitative Analysis. Chichester, New York and Toronto, Wiley, s. 45–62.
- [9] Doerner R., Huebinger B., Martienssen W., *Predictability portraits for chaotic motions*, *Chaos, Solitons & Fractals*, 1991, Vol. 1, s. 553–571.
- [10] Eckhardt B., Yao D., *Local Lyapunov exponents in chaotic systems*, „Physica D” 1993, Vol. 65, s. 100–108.

- [11] Eckmann J.P., Kamphorst S.O., Ruelle D., Scheinkman J., *Lyapunov exponents for stock returns*, w: *The Economy as an Evolving Complex System*, SFI Studies in the Science of Complexity. Reading, MA: Addison-Wesley, 1988, s. 301–304.
- [12] Eckmann J.P., Ruelle D., *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, „Reviews of Modern Physics” 1985, Vol. 57, s. 617–656.
- [13] Elsner J., *Chaos und Zufall am deutschen Aktienmarkt*, Heidelberg, Germany: Physica-Verlag, 1996.
- [14] Frank M., Gencay R., Stengos T., *International chaos?*, „European Economic Review” 1988, Vol. 32, s. 1569–1584.
- [15] Gencay R., *A statistical framework for testing chaotic dynamics via Lyapunov exponents*, „Physica D” 1996, Vol. 89, s. 261–266.
- [16] Gencay R., Dechert W.D., *An algorithm for the Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown dynamical system*, „Physica D” 1992, Vol. 59, s. 142–157.
- [17] Gencay R., Dechert W. D., *The identification of spurious Lyapunov exponents in Jacobian algorithms*, „Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics”, 1997, Vol. 1, s. 145–154.
- [18] Grassberger P., Procaccia I., *Characterization of strange attractors*, „Physical Review Letters” 1983, Vol. 50, s. 346–349.
- [19] Grassberger P., Badii R., Politi A., *Scaling laws for hyperbolic and nonhyperbolic attractors*, „Journal of Statistical Physics” 1988, Vol. 51, s. 135–178.
- [20] Hsieh D.A., *Chaos and nonlinear dynamics: Applications to financial markets*, „Journal of Finance” 1991, Vol. 46, s. 1839–1877.
- [21] Hurst H.E., *The Long Term Storage Capacity of Reservoirs*, „Transactions of the American Society of Civil Engineers” 1951, 116.
- [22] Jaditz T., Sayers C.L., *Is chaos generic in economic data?*, „International Journal of Bifurcation and Chaos” 1993, Vol. 3, s. 745–755.
- [23] Jajuga K., Papla D., *Teoria chaosu w analizie finansowych szeregów czasowych – aspekty teoretyczne i badania empiryczne*, V Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, „Dynamiczne Modele Ekonometryczne” 9–11 września 1997 Toruń, s. 5–16.
- [24] Kadtke J.B., Brush J., Holzfuß J., *Global dynamical equations and Lyapunov exponents from noisy chaotic time series*, „International Journal of Bifurcation and Chaos” 1993, Vol. 3, s. 607–616.
- [25] Kolmogorov A.N., *A metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces*, „Doklady Akademii Nauk SSSR”, 1958, Vol. 119, s. 861–864.
- [26] Kwiatkowski J., Orzeszko W., *Wykładnik Łapunowa – narzędzie identyfikacji chaosu na WGPW*, „Przegląd Statystyczny” 2004, Vol. 51, s. 85–96.
- [27] Lo A.W., *Long term memory in stock market prices*, „Econometrica” 1991, Vol. 59, s. 1279–1313.

- [28] Mandelbrot B., *Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: from the covariance to R/S analysis*, „Annals of Economic and Social Measurement” 1972, Vol. 1.
- [29] Moody J., Wu L., *Improved estimates for Rescaled Range and Hurst exponents. Neural Networks in Financial Engineering*, eds. Refenes A-P Abu-Mustafa Y., Moody J., Weigend A., „Word Scientific” 1996, s. 537–553.
- [30] Nychka D., Ellner S., Gallant A.R., McCaffrey D., *Finding chaos in noisy systems*, „Journal of the Royal Statistical Society B” 1992, Vol. 54, s. 399–426.
- [31] Oseledec V. I., *A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems*, „Transactions of the Moscow Mathematical Society” 1968, Vol. 19, s. 197–231.
- [32] Peters E.E., *Chaos and Order in the Capital Markets*, New York: Wiley 1991.
- [33] Peters E.E., *Teoria chaosu a rynku kapitałowe*, WIG Press, Warszawa 1997.
- [34] Sano M., Sawada Y., *Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series*, „Physical Review Letters” 1985, Vol. 55, s. 1082–1085.
- [35] Scheinkman J.A., LeBaron B., *Nonlinear dynamics and stock returns*, „Journal of Business” 1989, Vol. 62, s. 311–337.
- [36] Schittenkopf C., Dorffner G., Dockner E.J., *On Nonlinear, Stochastic Dynamics in Economic and Financial Time Series*, „Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics” 2000, Vol. 4 (3), s. 101–121.
- [37] Siemienuk N., *Fraktalne właściwości polskiego rynku kapitałowego*, Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 2001.
- [38] Sinai Y.G., *On the concept of entropy for a dynamic system*, Doklady Akademii Nauk SSSR, 1959, Vol. 124, s. 768–771.
- [39] Tanaka T., Aihara K., Taki M., *Analysis of positive Lyapunov exponents from random time series*, „Physica D” 1998, Vol. 111, s. 42–50.
- [40] Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A., *Determining Lyapunov exponents from a time series*, „Physica D” 1985, Vol. 16, s. 285–317.
- [41] Wolff R.C., *Local Lyapunov exponents: Looking closely at chaos*, „Journal of the Royal Statistical Society B” 1992, Vol. 54, s. 353–371.
- [42] Yao Q., Tong H., *On prediction and chaos in stochastic systems*, „Philosophical Transactions of the Royal Society London A” 1994, Vol. 348, s. 357–369.