Ekonomia Menedżerska
2008, nr 3, s. 77–88

Andrzej Paliński, Stanisław Jędrusik *

Gra przeciw naturze jako narzędzie podejmowania decyzji inwestycyjnych

1. Wprowadzenie

Podejmowanie rzeczowych decyzji inwestycyjnych o dużej skali i długim okresie zwrotu wymaga zastosowania nowoczesnych metod oceny rentowności inwestycji i ich ryzyka. Problemem jest jednak akceptacja tych metod ze strony kadry menedżerskiej. Powszechnie uznanym od strony teoretycznej miernikiem rentowności jest wartość bieżąca netto NPV, która stanowi miarę przyrostu wartości rynkowej przedsiębiorstwa, w wyniku realizacji podjętej inwestycji. Niestety, dla kadry zarządzającej w przedsiębiorstwach jest to wskaźnik małozrozumiały. Zdecydowanie chętniej stosowany jest wskaźnik wewnętrznej stopy zwrotu IRR, traktowany jako średnia stopa zwrotu z inwestycji. W praktyce jest on jedynym narzędziem oceny przedsięwzięć inwestycyjnych.

Analiza ryzyka projektów sprowadza się zwykle do analizy kilku scenariuszy. Symulacja Monte Carlo, będąca obowiązkowym elementem wniosku o dofinansowanie projektu z funduszy unijnych, nie jest traktowana jako prawdziwe narzędzie oceny ryzyka inwestycji.

Celem niniejszego artykułu jest próba określenia przydatności teorii gier do stworzenia prostego – jednokryterialnego – narzędzia w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych, które byłoby łatwiejsze do stosowania przez kadrę menedżerską w miejsce symulacji Monte Carlo. Narzędzia tego typu były już stosowane w procesach decyzyjnych w górnictwie [3], zatem można się spodziewać ich przydatność również w ocenie rentowności przedsięwzięć inwestycyjnych.

* Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Informatyki Stosowanej.

2. Główne kryteria wyboru strategii w grze przeciw naturze

Gra przeciw naturze jest grą, w której udział biorą dwaj gracze – A i B, przy czym drugiego gracza nazywa się „naturą”. W odniesieniu do decyzji inwestycyjnych gracz-natura rzeczywiście reprezentuje zachowania natury – przypadkowe i pozbawione działań optymalizacyjnych.

W ogólności gra przeciw naturze dotyczy sytuacji decyzyjnych w warunkach niepewności, w których nieznana jest funkcja użyteczności innych graczy (np. funkcja kosztów lub zysków), tym samym nie jest znana macierz wypłat pozostałych graczy. Pierwszy gracz nie wie również, jakie strategie wybiorą inni gracze lub nie zna prawdopodobieństwa wyboru poszczególnych strategii.

W przypadku występowania wielu graczy, grę taką możemy traktować jako grę przeciw naturze, w której zbiór strategii drugiego gracza – natury jest reprezentowany przez iloczyn kartezjański strategii pozostałych graczy. Naturę oznacza się zwykle jako gracza N, a liczba dopuszczalnych stanów natury wynosi wtedy (1)

$$I_N = \prod_X I_X\,, \quad X \neq A\,, \tag{1}$$

gdzie:

I_X – zbiór indeksów strategii gracza X.

W grze przeciw naturze gracz A musi podejmować decyzje jedynie w oparciu o własną macierz wypłat. Wypracowano wiele kryteriów wyboru strategii gry przeciw naturze. Rozważmy macierze wypłat przestawioną w tabeli 1. Strategie gracza A umieszczone są w wierszach macierzy, a wartość wygranych (wypłat) podana jest z jego punktu widzenia. Wartość $V_j(s_i)$ odpowiada wypłacie gracza A, gdy wybierze on strategię s_i, podczas gdy natura wybierze strategię n_j.

Tabela 1

Macierz wypłat dla gracza A

	n_1	n_2	...	n_m
s_1	$V_1(s_1)$	$V_2(s_1)$	...	$V_m(s_1)$
s_2	$V_1(s_2)$	$V_2(s_2)$	...	$V_m(s_2)$
...	...	...	...	...
s_k	$V_1(s_k)$	$V_2(s_k)$	...	$V_m(s_k)$

Źródło: opracowanie własne.

Najczęściej stosowane kryteria wyboru strategii to (zob. [1] i [4]):

- kryterium Walda,
- kryterium optymistyczne,
- kryterium Hurwicza,
- kryterium Laplace'a,
- kryterium Savage'a.

Kryterium Walda – to kryterium ostrożne (pesymistyczne) charakteryzujące się awersją do ryzyka. Zakłada się w nim, że może wystąpić sytuacja najmniej korzystna dla gracza. Kryterium to nazywane jest *maximinowym*, gdyż dla każdej własnej strategii poszukuje się wypłaty najmniejszej, a następnie wybiera się strategię, która tę wypłatę maksymalizuje. Oznaczając przez $\hat{s}_i$ optymalną strategię gracza, kryterium Walda definiuje następujące zadanie optymalizacji (2).

$$\hat{s}_i = \arg\max_i \{ \min_j V_j \ (s_i) : i \in I_A \} . \tag{2}$$

Wybrana zostaje ta strategia s_i, która maksymalizuje wypłatę spośród najmniejszych wypłat dla poszczególnych własnych strategii.

Kryterium optymistyczne (dla ryzykantów), charakteryzuje się największym optymizmem. Zakłada się, że wystąpi sytuacja najbardziej korzystna dla gracza. Dla każdej własnej strategii wybierana jest największa wypłata, a następnie wybiera się strategię, która tę wypłatę maksymalizuje. Kryterium optymistyczne definiuje następujące zadanie optymalizacji (3).

$$\hat{s}_i = \arg\max_i \{ \max_j V_j (s_i) : i \in I_A \} . \tag{3}$$

Kryterium Hurwicza stanowi uogólnioną postać kryterium ostrożnego Walda i kryterium optymistycznego. Jest ono kombinacją liniową wymienionych kryteriów, a arbitralnie dobrany współczynnik α stanowi wagę poszczególnych kryteriów. Współczynnik α jest nazywany współczynnikiem optymizmu. Kryterium Hurwicza wyznacza następujące zadanie optymalizacji (4).

$$\hat{s}_i = \arg\max_i \{ \alpha \max_j V_j (s_i) + (1 - \alpha) \min_j V_j (s_i) : i \in I_A \} . \tag{4}$$

Wybór współczynnika $\alpha = 0$ sprowadza kryterium Hurwicza do kryterium pesymistycznego, a $\alpha = 1$ prowadzi do kryterium optymistycznego.

Kryterium Laplace'a, zwane też kryterium Bayesa, wykorzystuje wartość oczekiwaną wypłaty dla każdej strategii jako narzędzie wyboru strategii. Ze względu na brak informacji na temat macierzy wypłat przeciwnika, zakłada się, że każda z jego strategii jest jednakowo prawdopodobna. Problem optymalizacji sprowadza się do rozwiązania poniższego zadania optymalizacji (5).

$$\hat{s}_i = \arg\max_i \{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} V_j(s\ \ ) : i \in I_A \} \tag{5}$$

Kryterium Savage'a ma podłoże psychologiczne i wynika z obserwacji procesu podejmowania decyzji. Kryterium to służy minimalizacji poczucia straty, wynikającej z podjęcia decyzji gorszej niż najlepsza dla danego stanu natury. Wartość straty (żalu) pierwszego gracza przy ustalonej strategii natury n_j jest określana jako różnica między największą wypłatą $V_{j\ \max}$, a wypłatą $V_j(s_i)$, jaką otrzyma wybierając strategię s_i. Funkcja, która każdej wartości z macierzy wypłat przyporządkowuje wartość poczucia straty nazywa się funkcją żalu. Maksymalną wypłata gracza A, przy ustalonej strategii n_j gracza N, można otrzymać z następującej zależności (6).

$$V_{j\max} = \max_i V_j(s_i) \tag{6}$$

Funkcja żalu wyraża się zależnością (7).

$$\tilde{V}_j(s_i) = V_{j\max} - V_j(s_i) \tag{7}$$

W celu posłużenia się kryterium Savage'a niezbędnym jest utworzenie macierzy względnych strat z oryginalnej macierzy wypłat. W kryterium tym poszukuje się strategii, która minimalizuje maksymalną względną stratę. Jest to kryterium *minimaxowe* dla macierzy względnych strat. Zadanie optymalizacyjne, które należy rozwiązać jest zdefiniowane następująco (8).

$$\hat{s}_i = \arg\min_i \{ \max_j \tilde{V}_j(s_i) : i \in I_A \} \tag{8}$$

Poza wymienionymi kryteriami wyboru strategii mamy możliwość skonstruowania własnych kryteriów gry przeciw naturze, zgodnych z preferencjami inwestora. Kryteria te powinny spełniać sześć aksjomatów zdefiniowanych przez Milnora w 1954 roku, cytowanych np. w [7]. Przykłady tego typu kryteriów prezentuje Laskowski w [4] i [5].

3. Przedsięwzięcie inwestycyjne jako gra przeciw naturze

Rozważana inwestycja dotyczy podziemnego magazynowania gazu (PMG) w obszarze południowo-wschodniej Polski. Pod uwagę brane są trzy warianty inwestycyjne, różniące się znacznie skalą ponoszonych nakładów. W rzeczywistości warianty te są trudne do porównania według prostych kryteriów, gdyż budowa magazynu o największej pojemności wymagałaby podejmowania decyzji o charakterze politycznym, związanym z bezpieczeństwem energetycznym i uwzględnieniem kierunków przepływu gazu w sieci gazowniczej. Niemniej na potrzeby niniejszego artykułu analizowane przedsięwzięcie inwestycyjne potraktowane zostanie jako prosta trzywariantowa inwestycja, której rentowność mierzona będzie jedynie wskaźnikiem IRR. Główne dane dotyczące inwestycji zawarte są w tabeli 2.

Tabela 2

Podstawowa charakterystyka trzech wariantów budowy podziemnego magazynu gazu

Dane	Wariant I	Wariant II	Wariant III
Pojemność czynna [mln m^3]	100	230	870
Nakłady inwestycyjne [mln zł]	113,3	209,8	696,4
Okres budowy [lata]	2	4	4
Okres analizy [lata]	21	25	30

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych PGNiG S.A.

Czynnikiem obarczonym największą niepewnością jest stopień wykorzystania magazynu, zależący od perspektyw wzrostu zapotrzebowania na gaz w Polsce oraz częściowo sytuacji klimatycznej (ocieplenie klimatu). Kolejnym trudnym do określenia czynnikiem jest cena usługi za magazynowanie gazu, która generalnie rośnie wraz ze wzrostem cen gazu na światowych rynkach oraz różnicą między ceną gazu w lecie i w zimie. Przyjęto trzy scenariusze zapotrzebowania na usługę magazynowania:

- optymistyczny,
- realny,
- pesymistyczny.

Wpływ tych scenariuszy jest jednak różny dla poszczególnych wariantów inwestycyjnych, co przedstawione zostało w tabeli 3.

Tabela 3

Wpływ scenariuszy na stopień wykorzystania podziemnego magazynu gazu

Scenariusz wykorzystania PMG	Procentowe wykorzystanie PMG		
	Wariant I	Wariant II	Wariant III
optymistyczny	100%	100%	100%
realny	100%	90%	70%
pesymistyczny	100%	70%	50%

Źródło: opracowanie własne.

Wpływ scenariuszy na wykorzystanie magazynu o najmniejszej pojemności praktycznie nie istnieje, natomiast wpływ na stopień wykorzystania PMG w wariancie III jest szczególnie duży. Założono następnie trzy scenariusze cenowe dla całkowitej ceny za usługę magazynowania gazu:

- 170 zł/m^3,
- 150 zł/m^3,
- 130 zł/m^3.

Ostatecznie otrzymano następujące stany natury:
n_1 = (optymistyczny, 170),
n_2 = (optymistyczny, 150),
n_3 = (optymistyczny, 130),
n_4 = (realny, 170),
n_5 = (realny, 150),
n_6 = (realny, 130),
n_7 = (pesymistyczny, 170),
n_8 = (pesymistyczny, 150),
n_9 = (pesymistyczny, 130).

Biorąc pod uwagę przyjęte założenia dotyczące stopnia wykorzystania PMG (tabela 3) oraz ceny za usługę magazynowania gazu, wyliczono wskaźnik IRR dla każdego wariantu inwestycyjnego i każdego stanu natury. Wykorzystano arkusze obliczeniowe zawierające szczegółową analizę finansową przedsięwzięcia, w tym: zestawienie nakładów inwestycyjnych, harmonogram amortyzacji składników majątku trwałego, rachunek zysków i strat, bilans i sprawozdanie z przepływów pieniężnych dla potrzeb analizy inwestycji.

Inwestor, czyli gracz A, ma do dyspozycji trzy strategie odpowiadające wariantom inwestycyjnym – s_1, s_2 i s_3. Natura ma do wyboru dziewięć strategii. Otrzymane wyniki zebrane są w tabeli 4, będącej macierzą wypłat w grze przeciw naturze.

Tabela 4

Wewnętrzna stopa zwrotu IRR dla poszczególnych strategii inwestycyjnych i różnych stanów natury

		Natura								
		n_1	**n_2**	**n_3**	**N_4**	**n_5**	**n_6**	**n_7**	**n_8**	**n_9**
Gracz	**s_1**	8,0%	6,2%	4,4%	8,0%	6,2%	4,4%	8,0%	6,2%	4,4%
	s_2	11,5%	9,7%	7,8%	10,1%	8,4%	6,5%	7,0%	5,5%	3,8%
	s_3	13,7%	12,0%	10,2%	9,4%	8,0%	6,5%	4,1%	3,1%	2,1%

Źródło: opracowanie własne.

Minimalne wypłaty dla poszczególnych strategii inwestora $min_j V_j(s_i)$ w kryterium Walda to:
$V_3(s_1) = V_9(s_1) = 4{,}4\%$,
$V_9(s_2) = 3{,}8\%$,
$V_9(s_3) = 2{,}1\%$.

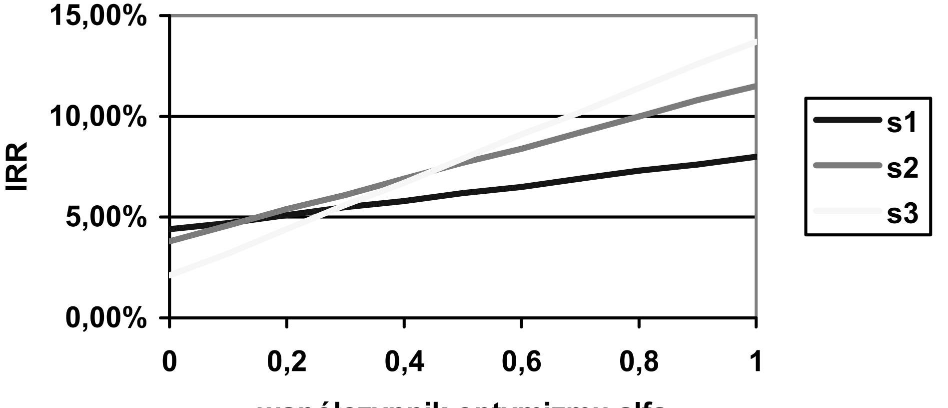
Maksymalną spośród minimalnych wartości daje strategia s_1, zatem kryterium Walda wskazuje na pierwszy wariant inwestycyjny.

Maksymalne wypłaty dla strategii inwestora $max_j V_j(s_i)$ w kryterium optymistycznym to:
$V_4(s_1) = V_7(s_1) = 8{,}0\%$,
$V_1(s_2) = 11{,}5\%$,
$V_1(s_3) = 13{,}7\%$.

Maksymalną spośród maksymalnych wartości przynosi strategia s_3, zatem kryterium optymistyczne wskazuje na trzeci wariant inwestycyjny.

Wybór strategii wg kryterium Hurwicza w sposób istotny zależy od wartości współczynnika optymizmu α. Zależność tę obrazuje wykres 1.

Dla wartości $\alpha < 0{,}14$ kryterium Hurwicza sugeruje strategię s1. Od tej wartości do $\alpha < 0{,}45$ wg tego kryterium należy wybrać strategię s_2, a powyżej tej wartości strategię s_3. Zatem czym ostrożniejsze podejście, tym mniejszy wariant inwestycyjny. Przy $\alpha = 0$ uzyskujemy strategię s_1 – wariant I, identycznie jak w kryterium Walda, a dla $\alpha = 1$ otrzymujemy wariant III, tak jak w kryterium optymistycznym.



Rys. 1. Kryterium Hurwicza – wartość IRR ważona współczynnikiem optymizmu α w zależności od wyboru strategii
Źródło: opracowanie własne.

W kryterium Laplace'a średnie wypłaty dla poszczególnych strategii wyglądają następująco:
$V_{śr.}(s_1) = 6{,}2\%$,
$V_{śr.}(s_2) = 7{,}8\%$,
$V_{śr.}(s_3) = 7{,}7\%$.

Najwyższą wartością oczekiwaną wypłaty charakteryzuje się strategia s_2 i ona powinna zostać wybrana według tego kryterium.

Kolejne kryterium – Savage'a wymaga utworzenia macierzy relatywnych strat, która została przedstawiona w tabeli 5. Wartości równe zero są umieszczone w miejscach, w których występuje najwyższa wypłata dla danej strategii natury.

Tabela 5

Macierz względnych strat dla kryterium Savage'a

		Natura								
		n_1	**n_2**	**n_3**	**n_4**	**n_5**	**n_6**	**n_7**	**n_8**	**n_9**
Gracz	**s_1**	5,7%	5,8%	5,8%	2,1%	2,2%	2,2%	0,0%	0,0%	0,0%
	s_2	2,2%	2,3%	2,4%	0,0%	0,0%	0,0%	1,0%	0,8%	0,6%
	s_3	0,0%	0,0%	0,0%	0,8%	0,4%	0,0%	3,9%	3,1%	2,3%

Źródło: opracowanie własne.

Maksymalne wartości względnej straty dla poszczególnych strategii w macierzy strat wynoszą odpowiednio:
$\tilde{V}_3(s_1) = 5{,}8\%$ (dokładnie 5,82%),
$\tilde{V}_3(s_2) = 2{,}4\%$,
$\tilde{V}_7(s_3) = 3{,}9\%$.

Najmniejsza wartość spośród maksymalnych względnych strat jest uzyskiwana dla strategii s_2.

Podsumowanie wyników wyboru strategii według rozważanych kryteriów podano w tabeli 6.

Podsumowując otrzymane wyniki można stwierdzić, że dla gracza (inwestora) o umiarkowanej skłonności do ryzyka (współczynnik optymizmu mniejszy od 0,45) większość kryteriów wskazuje na strategię s_2, czyli drugi wariant inwestycyjny o pojemności czynnej magazynu 230 mln m^3. Niemniej jednak nawet dla inwestora o wysokiej awersji do ryzyka, jak i przeciwnie – inwestora-ryzykanta kryteria niezależne od miary optymizmu (Laplace'a i Savage'a) wskazują na strategię s_2. Tym samym jedynie bardzo wysoki poziom pesymizmu sugerowałby strategię s_1, a olbrzymi optymizm skłaniałby do strategii s_3.

Tabela 6

Zestawienie wyboru strategii dla różnych kryteriów

Kryterium	**Wybrana strategia**
Walda	s_1
Optymistyczne	s_3
Hurwicza	s_1 dla $\alpha < 0,14$ s_2 dla $0,14 \leq \alpha < 0,45$ s_3 dla $0,45 \leq \alpha$
Laplace'a	s_2
Savage'a	s_2

Źródło: opracowanie własne.

Analizowany przykład pokazuje, że za pomocą kryteriów Hurwicza (jako kombinacji kryteriów pesymistycznego i optymistycznego), Laplace'a oraz Savage'a można utworzyć skuteczne narzędzie wspomagania decyzji inwestycyjnych uwzględniające przy tym poziom optymizmu (awersji do ryzyka) inwestora.

4. Symulacja Monte Carlo dla przedsięwzięcia inwestycyjnego

W celu porównania z teorią gier zastosowano symulację Monte Carlo do oceny efektywności rozważanych inwestycji. Zmiennymi losowymi są analogicznie: stopień wykorzystania pojemności czynnej oraz cena za usługę magazynowania. Obydwie zmienne pobierane są z rozkładów jednostajnych z uwagi na nieznajomość rzeczywistych rozkładów losowych. Wartości najmniejsza i największa stopnia wykorzystania magazynu odpowiadają scenariuszom pesymistycznemu i optymistycznemu w tabeli 3. Cena za usługę magazynowania odpowiednio – najmniejsza 150 zł/tys. m^3 i największa 170 zł/tys. m^3.

Po wykonaniu 1000 przebiegów symulacyjnych dla każdego z wariantów inwestycyjnych otrzymano rozkłady statystyczne zmiennej wynikowej IRR, których charakterystyki zawarte są w tabelach 7 i 8. Analiza symulacyjna wykonana na potrzeby porównania z kryteriami decyzyjnymi gry przeciw naturze jest uproszczoną wersją obszerniejszej analizy, w której zwykle stosuje się większą liczbę zmiennych decyzyjnych, uwzględnia korelację między nimi, wykorzystuje się empiryczne rozkłady prawdopodobieństwa i dokonuje większej liczby przebiegów symulacyjnych. Szerzej zagadnienie symulacji Monte Carlo dotyczące oceny

Tabela 7

Parametry rozkładów statystycznych IRR otrzymane w wyniku symulacji

Parametr	wariant I	wariant II	wariant III
Wartość średnia	6,2%	7,7%	8,7%
Mediana	6,3%	7,8%	8,8%
Odchylenie standardowe	1,0%	1,6%	2,2%
Wariancja	0,0%	0,0%	0,1%
Skośność	−0,08	0,00	−0,02
Kurtoza	1,85	2,33	2,10
Współczynnik zmienności	0,17	0,20	0,26
Wartość minimalna	4,4%	4,3%	3,7%
Wartość maksymalna	8,0%	11,5%	13,7%
Szerokość zakresu wartości	3,6%	7,2%	10,0%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 8

Percentyle wartości IRR otrzymane w wyniku symulacji

Percentyl	wariant I	wariant II	wariant III
0%	4,4%	4,3%	3,7%
10%	4,8%	5,6%	5,7%
20%	5,2%	6,2%	6,5%
30%	5,5%	6,8%	7,3%
40%	5,9%	7,3%	8,1%
50%	6,3%	7,8%	8,8%
60%	6,6%	8,1%	9,5%
70%	6,9%	8,6%	10,1%
80%	7,3%	9,1%	10,8%
90%	7,6%	9,7%	11,7%
100%	8,0%	11,5%	13,7%

Źródło: obliczenia własne.

rentowności podobnego typu przedsięwzięcia inwestycyjnego zostało przedstawione w pracy [6].

Symulacja Monte Carlo pokazuje, że kolejne warianty inwestycyjne mają coraz wyższą wartość oczekiwaną wewnętrznej stopy zwrotu przy rosnącym ryzyku mierzonym odchyleniem standardowym, współczynnikiem zmienności oraz szerokością zakresu wartości. Wariant I jest najbezpieczniejszy, ale z najmniejszą wartością oczekiwaną IRR=6,2%, podczas gdy wariant III jest najbardziej ryzykowny z oczekiwanym IRR=8,7%. Wyniki te nie dają w zasadzie możliwości podjęcia decyzji co do wyboru wariantu inwestycyjnego.

Jeżeli przyjąć, że minimalną akceptowaną stopą zwrotu jest IRR=6%, to kolejną kwestią jest przyjęcie prawdopodobieństwa osiągnięcia wartości nie mniejszej od granicznego IRR. Decyzja ta zależy od awersji do ryzyka inwestora; dla inwestora o umiarkowanej skłonności do ryzyka prawdopodobieństwo sukcesu może wynosić np. 70%. Kryterium to spełniają warianty inwestycyjne II i III. Lepszym z nich jest wariant III, który zapewnia wyższą wartość oczekiwaną i wyższe wartości dla kolejnych percentyli. Początkowe wartości percentyli sprawiają, że nie można powiedzieć, iż wariant III dominuje wariant II w sensie stochastycznej dominacji pierwszego rzędu [2].

Zatem symulacja Monte Carlo wskazuje na trzeci wariant inwestycyjny, jednak zastosowano w niej rozkłady losowe jednostajne – raczej nie używane w symulacyjnej analizie efektywności inwestycji, co obniża przydatność decyzyjną otrzymanych wyników.

5. Podsumowanie

1. Teoria gier stanowi bardzo dobre narzędzie podejmowanie decyzji inwestycyjnych w warunkach niepewności. Poza podstawowymi kryteriami wyboru strategii pozwala na tworzenie własnych kryteriów zgodnych z preferencjami inwestora.
2. Teoria gier dostarcza bardziej jednoznaczne kryteria decyzyjne w stosunku do symulacji Monte Carlo.
3. Z punktu widzenia menedżerów kryteria wyboru w grze przeciw naturze mogą być traktowane jako zbyt abstrakcyjne i teoretyczne, oraz pozbawione podstaw praktycznych w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych w realnych przedsiębiorstwach.
4. W warunkach ryzyka, czyli przy znajomości rozkładów prawdopodobieństwa wystąpienia stanów natury, narzędziem decyzyjnym powinna jednak pozostać symulacja Monte Carlo, dostarczająca rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych wynikowych. Daje to możliwość oceny prawdopodobieństwa wystąpienia stanów akceptowanych przez decydenta.

Literatura

[1] *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*, red. K. Kukułka. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
[2] Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
[3] Kowalik S., *Teoria gier z zastosowaniami górniczymi*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2007.
[4] Laskowski S., *Wspomaganie procesu ustalania cen detalicznych i negocjacji stawek rozliczeniowych na konkurencyjnym rynku usług telekomunikacyjnych*, rozprawa doktorska na Wydziale Elektroniki i Technik Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2004.
[5] Laskowski S., *Wspomaganie procesu ustalania cen detalicznych na konkurencyjnym rynku usług telekomunikacyjnych z asymetrią informacyjną*, „Telekomunikacja i Techniki Informacyjne" 2006, nr 1–2, s. 25–50.
[6] Paliński A., Jędrusik S., *Symulacja Monte Carlo w ocenie efektywności projektów inwestycyjnych przemysłu naftowego*, w: *Zarządzanie przedsiębiorstwem w warunkach integracji europejskiej*. Cz. 1, *Zmiany w teorii i praktyce zarządzania*, red. A. Podobiński, Uczelniane Wydawnictwo Naukowo Dydaktyczne AGH. Kraków 2004, s. 527–535.
[7] Straffin P., *Teoria gier*, Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa 2004.