Ekonomia Menedżerska
2008, nr 3, s. 67–75

Marcin Suder *, Jacek Wolak, Tomasz Wójtowicz **

Zastosowanie rozkładów stabilnego, hiperbolicznego i odwrotnego gaussowskiego do opisu dziennych stóp zwrotu indeksów giełd europejskich

1. Wprowadzenie

Celem niniejszej pracy jest rozszerzenie gamy rozpatrywanych rozkładów (patrz [9]) o rozkłady: α-stabilny, rozkład odwrotny gaussowski i rozkład hiperboliczny. Badania rozkładów dziennych współczynników zwrotu, uwzględniające powyższe rozkłady są stosunkowo nowe. W 1994 Peiro (patrz [7]) badał zgodność rozkładów stóp zwrotu indeksów ważniejszych giełd światowych m.in. z rozkładem α-stabilnym. Również w 1994 roku Küchler, a rok później Eberlein i Keller (patrz [3]) pokazali, że rozkład odwrotny Gaussa dobrze opisuje dzienne stopy zwrotu na giełdzie niemieckiej.

W podręczniku [10] autorzy przeprowadzają analizę, na podstawie której okazuje się, że do współczynników zwrotu indeksu DJIA najlepiej pasuje rozkład α-stabilny.

Podstawowe informacje dotyczące omawianych rozkładów zostały podane w rozdziale 2. Rozdział 3 zawiera opis metodologii badań oraz omówienie wyników przeprowadzonych testów. Natomiast w rozdziale 4 przedstawiono wnioski wypływające z analizy uzyskanych rezultatów.

* Wyższa Szkoła Ekonomii i Informatyki w Krakowie, Zakład Metod Ilościowych.
** Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Ekonomii i Ekonometrii.

2. Przegląd badanych rozkładów

Do opisu współczynników zwrotu rozważanych indeksów giełdowych wybrane zostały rozkłady charakteryzujące się własnością grubych ogonów. W szczególności własność tę posiadają rozkłady z rodziny uogólnionych rozkładów hiperbolicznych, które zaproponował w 1977 roku Ole Bandorff-Nielsen ([2]). W pracy badane będą: rozkład hiperboliczny oraz odwrotny rozkład gaussowski (NIG). Ponadto zbadana zostanie zgodność zmian indeksów z rozkładem stabilnym zaproponowanym przez Benoit Mandelbrota w 1963 roku ([6]).

Funkcja gęstości rozkładu hiperbolicznego dana jest wzorem:

$$f(x)=\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{2\delta\alpha K_1\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)}\exp\left\{-\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}+\beta(x-\mu)\right\},$$

gdzie:

$\delta > 0$ jest parametrem skali,
$\alpha > 0$ i $|\beta| < \alpha$ są parametrami kształtu,
a $-\infty < \mu +\infty$ odpowiada za położenie,
$K_1(\cdot)$ jest funkcją Bessela drugiego rodzaju z indeksem 1.

W szczególności parametr α odpowiada za spłaszczenie rozkładu a parametr β opisuje jego skośność – gdy $\beta > 0$, to grubszy jest prawy ogon rozkładu.

Funkcja gęstości rozkładu NIG dana jest wzorem:

$$f(x)=\frac{\alpha\delta K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)}{\pi\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}\exp\left\{\beta(x-\mu)+\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right\}.$$

Parametry tego rozkładu mają analogiczną interpretację, jak parametry rozkładu hiperbolicznego.

W przeciwieństwie do omówionych powyżej rozkładów z klasy uogólnionych rozkładów hiperbolicznych, rozkład α-stabilny nie posiada, poza szczególnymi przypadkami, funkcji gęstości zapisanej w postaci analitycznej. Jest on zdefiniowany za pomocą funkcji charakterystycznej, która jest dana wzorem:

$$\varphi(t)=\begin{cases}-\sigma^\alpha|t|^\alpha\{1-i\beta\,\mathrm{sgn}(t)tg\frac{\pi\alpha}{2})+i\mu t\} & dla \quad \alpha\neq 1\\ -\sigma|t|\{1-i\beta\frac{2}{\pi}\mathrm{sgn}(t)\ln\frac{\pi\alpha}{2})+i\mu t\} & dla \quad \alpha=1\end{cases},$$

przy czym:

$0 < \alpha \leq 2$ jest indeksem stabilności rozkładu,
$-1 < \beta < 1$ jest parametrem skośności,

$\sigma > 0$ jest parametrem skali i pełni rolę podobną do odchylenia standardowego w rozkładzie normalnym,

a $-\infty < \mu < \infty$ odpowiada za przesunięcie.

Jeśli $\alpha=2$, to zmienna ma rozkład normalny, gdy $\alpha < 2$, to rozkład ma ogony grubsze, niż ogony występujące w rozkładzie normalnym.

Jeśli $\beta > 0$, to rozkład jest skośny w prawo, a jeżeli $\beta < 0$, to rozkład jest skośny w lewo.

Gdy $\alpha > 1$, to parametr μ jest równy wartości oczekiwanej. Należy ponadto zaznaczyć, że rozkłady stabilne z parametrem $\alpha < 2$ charakteryzują się nieskończoną wariancją.

Uogólnione rozkłady hiperboliczne należą do klasy rozkładów o średnio-ciężkich ogonach (*semi-heavy tailed distributions*), co oznacza, że do rodziny tej należą zarówno rozkłady o ogonach zbliżonych do gaussowskich, jak i rozkłady o ogonach aproksymowanych funkcją potęgową. W szczególności, gęstość rozkładu hiperbolicznego dla dużych wartości *x* zachowuje się jak funkcja wykładnicza:

$$f(x) \sim const \exp\left(-\alpha|x| + \beta x\right) \text{gdy } x \to \pm\infty,$$

natomiast w przypadku rozkładu NIG zachodzi:

$$f(x) \sim const|x|^{-3/2} \exp\left(-\alpha|x| + \beta x\right) \text{gdy } x \to \pm\infty.$$

Z powyższych wzorów wynika, że zachowanie się ogonów tych rozkładów zależy od wartości parametrów α i β.

Rozkład stabilny charakteryzuje się cięższymi ogonami, których zachowanie się dla $\alpha < 2$ oraz dużych wartości *x* opisuje zależność:

$$f(x) \sim \alpha\sigma^{\alpha} c_{\alpha} (1+\beta) x^{-(\alpha+1)} \text{ gdy } x \to +\infty$$

oraz

$$f(x) \sim \alpha\sigma^{\alpha} c_{\alpha} (1-\beta) x^{-(\alpha+1)} \text{ gdy } x \to -\infty,$$

gdzie: $c_{\alpha} = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\frac{\Gamma(\alpha)}{\pi}$.

3. Metodologia i wyniki badań

W artykule zbadano rozkłady dziennych stóp zwrotu indeksów sześciu giełd europejskich[1]: trzech giełd Europy Zachodniej: CAC40 (Paryż), DAX (Frankfurt), FT-SE 100 (Londyn) oraz trzech Europy Środkowo-Wschodniej: BUX (Buda-

[1] Dane pochodzą z serwisu internetowego www.parkiet.com

peszt), RTS (Moskwa) i WIG20 (Warszawa). Dane dotyczą okresu od 1 stycznia 2001 do 30 czerwca 2007 roku. Ze względu na różną liczbę dni funkcjonowania poszczególnych giełd liczność zbiorów indeksów waha się od 1214 (RTS) do 1260 (CAC 40).

Została przyjęta następująca definicja dziennych współczynników zwrotu:

$$R_t = 100 \cdot \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right),$$

gdzie: X_t są wartościami odpowiednich indeksów w dniu t.

W pierwszej kolejności wyestymowano podstawowe statystyki opisowe rozważanych szeregów czasowych współczynników zwrotu, tj. wartość średnia, odchylenie standardowe, skośność i kurtoza. Zostały one zestawione w tabeli 1. Wszystkie rozważane indeksy charakteryzują się dodatnią średnią, co jest zrozumiałe w kontekście panującej w omawianym okresie hossy. Ponadto, we wszystkich rozważanych próbkach danych występują ujemne współczynniki skośności, co świadczy o lewostronnej skośności, czyli grubszym lewym ogonie rozkładu stóp zwrotu. Również wyestymowane wartości kurtozy, wahające się od 3,97 dla WIG20 do 8,18 dla FT-SE 100, świadczą o możliwym braku normalności rozkładu współczynników zwrotu rozważanych indeksów. Ostatecznym potwierdzeniem tego faktu są wyniki przeprowadzonego testu normalności Jarque-Bera. We wszystkich przypadkach statystyki okazały się istotne na poziomie 0,01, powodując odrzucenie hipotezy o normalności współczynników zwrotu indeksów omawianych giełd. Wyniki wstępnych badań oraz wcześniejsze obserwacje empiryczne znane z literatury uzasadniają konieczność badania zgodności rozkładów współczynników zwrotu z rozkładami innymi niż normalny.

Tabela 1

Podstawowe statystyki opisowe badanych dziennych współczynników zwrotu

Dane	WIG20	CAC40	BUX	DAX	FT-SE 100	RTS
średnia	0,080	0,035	0,109	0,048	0,028	0,137
odch. stand.	1,358	1,354	1,334	1,564	1,081	1,782
skośność	–0,120	–0,026	–0,241	–0,059	–0,236	–0,815
kurtoza	3,974	7,509	4,359	6,697	8,182	7,510
stat. J-B	52,0	1060,1	105,8	709,6	1376,0	1154,7

Parametry badanych rozkładów estymowano metodą największej wiarygodności z wykorzystaniem oprogramowania *Matlab*. Dla parametrów rozkładu α-stabilnego obliczenia zostały przeprowadzone za pomocą przybornika *Fraclab-1.0* z zastosowaniem metody Koutrouvelisa (patrz [5]).

W celu weryfikacji hipotezy o zgodności rozkładu empirycznego współczynników zwrotu poszczególnych indeksów i odpowiedniego rozkładu teoretycznego wykonano następujące testy: chi-kwadrat, Kołmogorowa-Smirnowa oraz Andersona-Darlinga. Statystyka w teście chi-kwadrat została obliczona w wyniku podziału na 34 klasy o jednakowym prawdopodobieństwie.

Tabela 2

Estymatory współczynników rozkładów dziennych współczynników zwrotu

	WIG20	**CAC40**	**BUX**	**DAX**	**FT-SE 100**	**RTS**
Rozkład hiperboliczny						
α	1,231	1,115	1,487	0,948	1,408	0,882
β	0,016	0,047	0,082	0,032	0,078	0,127
δ	0,939	0,138	1,524	0,001	0,114	0,482
μ	0,120	0,112	0,254	0,154	0,109	0,507
α+β	1,215	1,068	1,405	0,916	1,330	0,755
−α+β	1,247	−1,162	−1,569	−0,980	−1,486	−1,009
Rozkład odwrotny Gaussa						
α	0,964	0,478	1,191	0,373	0,613	0,541
β	−0,024	−0,037	−0,084	−0,049	−0,054	−0,137
δ	1,797	0,879	2,095	0,944	0,705	1,546
μ	0,134	0,104	0,258	0,174	0,091	0,540
α+β	0,940	0,441	1,107	0,324	0,559	0,404
−α+β	-0,988	-0,515	-1,275	-0,422	-0,667	-0,678
Rozkład α-stabilny						
α	1,828	1,545	1,879	1,537	1,564	1,697
σ	0,847	0,642	0,857	0,745	0,516	0,969
β	−0,066	−0,154	−0,167	−0,392	−0,106	−0,702
μ	0,094	0,007	0,115	−0,070	0,021	0,046

Wyniki estymacji parametrów omawianych rozkładów, tj.: hiperbolicznego, odwrotnego rozkładu Gaussa oraz rozkładu α-stabilnego zawarte zostały w tabeli 2. Potwierdzają one obserwacje poczynione na podstawie statystyk opisowych.

Ujemne wartości parametru β poszczególnych rozkładów potwierdzają lewostronną asymetrię rozkładów współczynników zwrotu. Największą skośność wykazywały współczynniki zwrotu RTS (wsp. skośności równy –0,815) i w ich przypadku parametry β przyjmują najniższe wartości (–0,127 w rozkładzie hiperbolicznym, –0,137 w rozkładzie NIG oraz –0,702 w rozkładzie stabilnym).

Do opisu zachowania się ogonów rozkładów hiperbolicznego i NIG – zgodnie z wcześniejszymi wzorami – istotne są wartości parametrów α i β; w szczególności zachowanie się lewego ogona zależy od ich sumy a prawego – od różnicy. Im mniejsza jest ich wartość bezwzględna, tym większe jest prawdopodobieństwo występowania wartości ekstremalnych.

Na podstawie wyników zawartych w tabeli 2 można zauważyć, że wyestymowany rozkład hiperboliczny ma najgrubszy ogon w przypadku współczynników zwrotu indeksu RTS; natomiast największe prawdopodobieństwo wystąpienia dużych dodatnich zmian występuje na giełdzie we Frankfurcie (–α+β dla DAX wynosi –0,98). W przypadku rozkładu NIG zarówno α+β, jak i –α+β są najmniejsze (co do wartości bezwzględnej) dla współczynników zwrotu indeksu DAX. Zachowanie się ogonów rozkładów współczynników2 zwrotu indeksu DAX zgodne jest ze stosunkowo wysoką kurtozą, świadczącą o odchyleniu od rozkładu normalnego. Zależność ta znajduje potwierdzenie również w przypadku innych indeksów, w szczególności WIG20 oraz BUX. Dopełnieniem tego obrazu są wartości parametru δ, charakteryzującego koncentrację rozkładu wokół wartości średniej – im mniejsze wartości przyjmuje, tym ta koncentracja jest większa. Należy jednak zauważyć, że w przypadku współczynników zwrotu indeksu FTSE100 najwyższa wartość kurtozy nie implikuje, że wyestymowane rozkłady mają też najcięższe ogony.

W przypadku rozkładu stabilnego o odstępstwie od rozkładu normalnego świadczy wartość indeksu stabilności α. Im bardziej różni się on od 2, tym bardziej rozkład jest oddalony od normalnego i posiada grube ogony. Dla badanych danych współczynnik ten jest mniejszy od 2 i zawiera się między 1,537 w przypadku DAX, a 1,879 dla indeksu BUX. Jest to kolejny dowód na występowanie grubych ogonów oraz nieadekwatność założenia o normalności współczynników zwrotu.

Rezultaty testów zgodności z rozkładem hiperbolicznym i odwrotnym rozkładem Gaussa umieszczono w tabelach 3 i 4. Na poziomie istotności 0,1 testy zgodności są zbliżone i nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy, że współczynniki zwrotu badanych indeksów pochodzą z tych rozkładów.

W tabeli 5 zamieszczono rezultaty testów zgodności z rozkładem α-stabilnym. Można zauważyć, że na poziomie istotności 0,1 test chi-kwadrat odrzuca hipotezę mówiącą o tym, że stopy zwrotu trzech z badanych indeksów (DAX, WIG20 i BUX) mogą być modelowane przez ten rozkład, przy czym wartość P-value dla BUX jest mniejsza niż 0,01. Okazuje się jednak, że w przypadku zestawu danych pochodzących z giełdy londyńskiej właśnie dopasowanie rozkładem stabilnym jest najlepsze.

Tabela 3

Wyniki testów zgodności rozkładu współczynników zwrotu
i rozkładu hiperbolicznego

Dane	WIG20	CAC40	BUX	DAX	FT-SE100	RTS
Test chi-kwadrat						
wartość stat. P-value	22,83 0,907	43,35 0,107	37,63 0,266	38,81 0,224	39,99 0,188	34,44 0,399
Test Kołmogorowa-Smirnowa						
wartość stat. P-value	0,478 0,977	0,730 0,658	0,517 0,952	0,838 0,484	0,759 0,613	0,644 0,802
Test Andersona-Darlinga						
wartość stat.	0,051	0,164	0,070	0,137	0,138	0,115

Tabela 4

Wyniki testów zgodności rozkładu współczynników zwrotu i odwrotnego rozkładu gaussowskiego

Dane	WIG20	CAC40	BUX	DAX	FT-SE100	RTS
Test chi-kwadrat						
wartość stat. P-value	24,43 0,740	26,60 0,777	42,04 0,134	28,11 0,709	35,99 0,331	35,96 0,332
Test Kołmogorowa-Smirnowa						
wartość stat. P-value	0,596 0,870	0,518 0,951	0,520 0,950	0,614 0,845	0,604 0,859	0,694 0,721
Test Andersona-Darlinga						
wartość stat.	0,049	0,057	0,060	0,071	0,050	0,075

Zestawiając otrzymane wyniki z wynikami prezentowanymi w [9], należy zauważyć, że rozszerzenie gamy rozważanych rozkładów, pozwoliło znaleźć rozkłady lepiej opisujące współczynniki zwrotów na tamtejszych giełdach. I tak zmianę wartości indeksu WIG20 najlepiej opisuje rozkład hiperboliczny, a FT-SE 100 rozkład α-stabilny.

Tabela 5

Wyniki testów zgodności rozkładu współczynników zwrotu i rozkładu α-stabilnego

Dane	WIG20	CAC40	BUX	DAX	FT-SE100	RTS
Test chi-kwadrat						
wartość stat. P-value	42,77 0,977	33,46 0,445	46,12 0,064	57,82 0,005	29,78 0,628	40,22 0,181
Test Kołmogorowa-Smirnowa						
wartość stat. P-value	0,812 0,525	0,513 0,954	0,609 0,853	1,100 0,178	0,448 0,988	0,957 0,319
Test Andersona-Darlinga						
wartość stat.	0,065	0,084	0,062	0,108	0,070	0,084

4. Wnioski

W pracy przeprowadzono analizę zgodności rozkładów stóp zwrotu indeksów sześciu giełd europejskich (Paryż, Londyn, Frankfurt, Budapeszt, Moskwa i Warszawa) z następującymi rozkładami teoretycznymi: hiperbolicznym, odwrotnym Gaussa i α-stabilnym. Tylko w przypadku indeksów giełd w Budapeszcie (BUX), Frankfurcie (DAX) i Warszawie (WIG20) na poziomie istotności 0,1 należy odrzucić hipotezę zgodności z rozkładem α-stabilnym. W pozostałych przypadkach nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o zgodności rozkładu stóp zwrotu poszczególnych indeksów z badanymi rozkładami teoretycznymi. W przypadku testowania zgodności z rozkładami hiperbolicznym i odwrotnym Gaussa uzyskano zbliżone wartości statystyk.

Rozszerzenie gamy badanych rozkładów (patrz [9]), w dwóch przypadkach pozwoliło na znalezienie rozkładów lepiej opisujących stopy zwrotu indeksów badanych giełd.

Literatura

[1] Aparicio F. M., Estrada J.: *Empirical Distribution of Stock Returns: European Securities Markets 1990-1995*, „The European Journal of Finance” 2001, 7, 1–21.

[2] Barndorff-Nielsen O.: *Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size*, Proceedings of the Royal Society of London A353, 1977, 401–419.

[3] Eberlein E., Keller U.: *Hyperbolic distributions in finance*, Bernoulli 1995, 1, 281–299.
[4] Gray J. B., French D.W.: *Empirical comparisons of distributional model for stock index prices*. „Journal of Business Finance and Accounting" 1990, 17, 451–459.
[5] Koutrouvelis, I. A.: *Regression-Type Estimation of the Parameters of Stable Laws*. *„Journal of the American Statistical Association"* 1980, 75, 918–928.
[6] Mandelbrot, B.: *The variation of certain speculative prices*, „Journal of Business" 1963, 36, 394–419.
[7] Peiro A.: *International evidence on the distribution of stock returns*. Applied Financial Economics, 1994, 4, 431–439.
[8] Peters E.: *Teoria chaosu, a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1997.
[9] Suder M., Wolak J. Wojtowicz T.: *Własności dziennych stóp zwrotu na przykładzie indeksów giełd europejskich*, w: *Zarządzanie przedsiębiorstwem w warunkach integracji europejskiej. Cz. 2, Ekonomia, informatyka i metody matematyczne* red. nauk. Marta Czyż i Zdzisław Cięciwa [materiały konferencyjne], UNWD AGH, Kraków 2004, s. 511–528.
[10] Weron A., Weron R.: *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.