Górnictwo i Geoinżynieria • Rok 31 • Zeszyt 3 • 2007

*Włodzimierz Hałat**

ZASTOSOWANIE KOMPUTEROWEGO RACHUNKU SYMBOLICZNEGO DO ZAGADNIEŃ ZGINANIA BELEK**

1. Wprowadzenie

Jedną z ważniejszych cech komputerów jest możliwość wykonywania przy ich zastosowaniu obliczeń symbolicznych, czyli obliczeń, w których działania są wykonywane na oznaczeniach literowych — symbolach — tak jak to ma miejsce w matematyce. Zastosowanie rachunku symbolicznego pozwala na rozwiązywanie zagadnień, które można opisać równaniami matematycznymi w sposób dokładny, w przeciwieństwie do podejścia numerycznego, gdzie zazwyczaj otrzymuje się rozwiązania przybliżone. Programy systemów algebry komputerowej zwane CAS (ang. *Computer Algebra System*) zaczęły pojawiać się na początku lat 1970. Pionierskie prace nad CAS prowadzone były przez fizyka Martina Veltmana (laureata nagrody Nobla). CAS to pakiety matematyczne wspomagające prace naukowo-techniczne. Mają one szerokie możliwości rozwiązywania zaawansowanych zadań geoinżynieryjnych, a także problemów związanych z geotechniką i budownictwem. Mogą one stanowić pomoc w nauce o wytrzymałości materiałów, a także w zastosowaniu do rozwiązywania zagadnień związanych ze zginaniem belek. Obecnie na rynku jest około 30 różnych pakietów CAS, aktualnymi liderami są Maple i Mathematica. Maple jest programem komputerowym CAS stworzonym w 1982 roku przez Symbolic Computation Group na Uniwersytecie w Waterloo [7]. Jest on ciągle rozbudowywany (podobnie jak inne CAS) i jest to obecnie jeden z bardziej symbolicznych z programów o tym charakterze. W dobrym stopniu naśladuje ludzki sposób myślenia i przeprowadzania obliczeń. Korzystając z niego mamy do dyspozycji polecenia do wizualizacji rozwiązań. Otrzymane rozwiązania mogą zostać przekształcone na kod w językach programowania. Hierarchiczna struktura arkuszy w programie pozwala na łatwiejsze zarządzanie całością pracy. Wyniki z obliczeń mają standardową notację matematyczną. Trzeba jednak mieć świadomość, że pomimo ułatwień, jakie oferują systemy CAS, wymagają one pewnych nakładów pracy.

* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

** Niniejszy artykuł wykonano w oparciu o badania statutowe AGH nr 11.11.100.588

W artykule przedstawiono i rozwiązano, za pomocą rachunku symbolicznego, wpływ sposobu podparcia na wartości: sił reakcji, momentów zginających, sił tnących, kątów ugięcia i linii ugięcia w zginanych belkach stosowanych w budownictwie.

2. Elementarne wiadomości o programie Maple

Maple jest interpreterem [7], czyli po każdorazowym naciśnięciu klawisza ENTER dokonywane jest przetworzenie bieżącej instrukcji i jej wykonanie. Istnieje również możliwość wykonania wszystkich poleceń sesji poprzez wybranie opcji z menu EDIT/EXECUTE/WORKSHEET. Poszczególne instrukcje (komendy, funkcje) języka Maple zapisywane są po znaku zachęty > i muszą się kończyć znakiem końca instrukcji; (średnik). W przeciwnym przypadku otrzymamy komunikat „Warning, premature end of input". Jeśli znakiem końca instrukcji jest znak dwukropka, to instrukcja jest wykonywana, a jej efekt nie jest wyświetlany. Jeśli instrukcja zawiera znak komentarza #, to tekst po tym znaku jest ignorowany. Maple zawiera ogromną listę specyficznych funkcji, który pełny wykaz można uzyskać wykonując instrukcję help (lib). Po jej wykonaniu pojawi się „index, function" zawierający spis i opisy funkcji wykonywanych przez program[1].

Maple akceptuje: standardowe operatory: dodawania (+), mnożenia (*) (nie wolno opuszczać znaku mnożenia), dzielenia (/), potęgowania (^), wszystkie standardowe funkcje matematyczne (w wersji angielskiej, tak więc np. „tan", a nie „tg", jest symbolem funkcji tangens) [2].

Argumenty funkcji zapisujemy w nawiasach okrągłych (*f*(*x*)). W programie Maple każdy ciąg liter i cyfr, nie rozpoczynający się od cyfry i nie zawierający innych znaków, jest zmienną. Nazwy zmiennych mogą być o dowolnej długości. Należy zaznaczyć, że pakiet ma już wbudowane standardowe zmienne, których nazwy są zastrzeżone, co oznacza, że użytkownik nie może tak nazwać swojej zmiennej. Zmienne nie mogą również przyjmować nazw funkcji wbudowanych. Wszystkie obliczenia są wykonywane za pomocą rachunku symbolicznego. Aby dowiedzieć się szczegółów dotyczących danego symbolu, możemy się posłużyć funkcją abort (symbol). Chcąc odwołać się do poprzedniego obliczenia, należy użyć znaku procent (%). Zmienną zdefiniowaną przez użytkownika można wyczyścić stosując następujące polecenie: > *a*:='*a*', gdzie „*a*" jest zmienną. Aby wykonać obliczenia w Maple, należy wcisnąć klawisz enter. Gdy chcemy otrzymać wynik po wprowadzeniu kilku komend, a nie po każdej instrukcji, wówczas trzeba wcisnąć kombinację klawiszy Shift + Enter zamiast samego klawisza Enter.

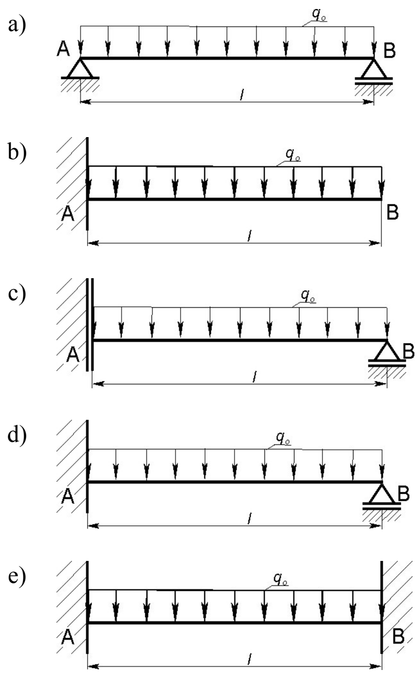
Jeśli identyfikatorowi nie została przypisana wartość, to jest on symbolem. Symbole są używane do reprezentacji niewiadomych w równaniach, zmiennych w wielomianach itp. Na przykład: > *p*:=*x*^2+8**x*+16: identyfikatorowi *p* zostało przypisane wyrażenie $x^2 + 8 * x + 16$. Identyfikator *p* nie jest zatem symbolem, lecz nazwą; identyfikatorowi *x* natomiast nie została przypisana wcześniej żadna wartość, więc jest on symbolem. Można zapytać, jaka jest wartość p; wartością p jest wielomian $x^2 + 8 * x + 16$. A jaką wartością jest *x*? — *x* nie

[1] Program Maple zawiera ponad 850 instrukcji.

ma żadnej określonej wartości, jest więc symbolem. Jeśli przypiszemy teraz symbolowi x jakąś wartość, np. > x:=3: i spytamy Maple o wartość p, to na ekranie monitora nie zostanie wydrukowany wielomian $x^2 + 8 * x + 16$, lecz wartość liczbowa 49. Identyfikator x przestał być symbolem. Do wielomianu p w miejsce symbolu x została podstawiona wartość przypisana x. Identyfikator p ma zatem wartość 32 + 8 * 3+16, czyli 49. Widać tu wyraźną różnicę pomiędzy Maple a tradycyjnymi językami programowania. Identyfikatory mogą być użyte jako zmienne programowe oraz niewiadome matematyczne. Do zresetowania wszelkich nazw w środowisku służy instrukcja > restart: instrukcja ta dokładniej mówiąc czyści wewnętrzną pamięć programu, a więc zapominane są wszystkie parametry identyfikatorów (nazw i procedur).

3. Zginanie płaskie belek prostych

Każda belka, jako konstrukcja budowlana, jest w sposób bezpośredni lub pośredni związana z podłożem poprzez różnego rodzaju połączenia, czyli więzy układu, nazywane podporami [8]. Na rysunku 1 przedstawiono typowe podpory stosowane w budownictwie w belkach jednoprzęsłowych.



Rys. 1. Schematy belek jednoprzęsłowych obciążonych na całej długości obciążeniem ciągłym q_o podpartych na: a) podporze przegubowej i przegubowo-przesuwnej; b) pełnym utwierdzeniu — belka wspornikowa; c) utwierdzeniu z pionowym przesuwem i podporze przegubowo-przesuwnej; d) pełnym utwierdzeniu i podporze przegubowo-przesuwnej; e) obustronnie utwierdzonej

3.1. Odkształcenia belek prostych

Po wyznaczeniu wartości sił reakcji podpór i zapisaniu funkcji momentu zginającego w przekroju poprzecznym belki w funkcji określonej odciętą x zapisujemy równanie różniczkowe linii ugięcia belki. Dla przypadków praktycznie spotykanych w budownictwie (małe ugięcia w stosunku do rozpiętości belki) wyrażenie $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2$ pomijamy jako małą wyższego rzędu w stosunku do jedności, i wówczas przybliżone równanie różniczkowe osi odkształconej ma postać [8, 6]

$$EJ*\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) = EJ*y'' = \pm M(x) \tag{1}$$

Wybór jednego z dwóch znaków po prawej stronie równania (1) zależy od przyjętego układu osi współrzędnych i reguły znakowania momentu zginającego. Zapis równania (1) w języku Maple ma postać:

```
>EJ*Diff(y,x$2)=Mg(x);#
```

w wyniku działania Maple-a [7, 9] otrzymujemy

$$EJ\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y\right) = \mathrm{Mg}(x) \tag{2}$$

Pierwsza całka równania (1) daje zależność, z której wyznaczamy kąty obrotu przekroju, w języku Maple ma ona postać:

```
>EJ*Diff(y,x$1)=_C1+int(M(x),x);#
```

w efekcie otrzymujemy

$$EJ\left(\frac{\partial}{\partial x}y\right) = \_C1 + \int \mathrm{M}(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

Druga całka z równania (1) daje zależność, z której wyznaczamy ugięcia przekroju:

```
>EJ*y=_C1*x+_C2+int(int(M(x),x),x);#
```

w efekcie otrzymujemy

$$EJy = \_C1x + \_C2 + \iint \mathrm{M}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x \tag{4}$$

gdzie:

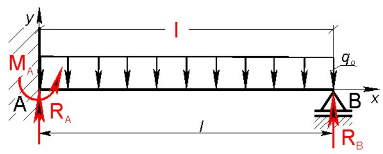
EJ — sztywność zginania belki,

$\_C1$ i $\_C2$ — stałe całkowania wyznaczane z warunków brzegowych oraz z warunku ciągłości osi odkształconej.

W matematyce wynik powtórnego całkowania zapisanego przez Maple w postaci (4) zapisalibyśmy w postaci

$$EJ*y=\_C1*x+\_C2+\int\left(\int \mathrm{M}(x)*\mathrm{d}x\right)*\mathrm{d}x \tag{4a}$$

Belki na rysunkach 1a–c są belkami statycznie wyznaczalnymi, natomiast belki z rysunków 1d–e są belkami hiperstatycznymi. Korzystając z twierdzenia Menabre'a[2]–Castigliano [5] zapiszmy w języku Maple i wyznaczmy wartości sił reakcji oraz moment utwierdzenia dla np. belki „D" (rys. 1d). Schemat statyczny belki „D" przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat statyczny belki „D"

3.2. Zapis wyznaczenia reakcji belki „D" w języku symbolicznym Maple

Rozwiązując belkę (rys. 2) od strony lewej do prawej, *worksheet*[3] pozwalający na wyznaczenie reakcji ma postać:

>restart;x1:=l:

>S_M[B]:=-M[A]+R[A]*x1-1/2*q[o]*x1^2=0:eqn_1:=S_M[B];# suma momentów, równanie 1:

$$eqn\_1:=-M_A+R_A l-\frac{1}{2}q_o l^2=0$$

>r_1:=solve(eqn_1,{M[A]}): M[A];# rozwiązanie równania (1):

$$R_A l-\frac{1}{2}q_o l^2$$

>M_1:=x->(-M[A]+R[A]*x-q[o]*x^2/2):M_1(x); # funkcja momentu zginającego:

$$-R_A l-\frac{1}{2}q_o l^2+R_A x-\frac{1}{2}q_o x^2$$

[2] Luigi F. Menabre — inżynier, generał, dyplomata włoski — ogłosił swą zasadę 1857 roku, a wyczerpującego dowodu dostarczył A. Castigliano.

[3] Tak nazywane są otwarte arkusze sesji Maple'a. Wiersze nie są numerowane.

>W:=1/2*unapply((1/EJ*Int((M_1(x))^2,x=0..x1)),x)=1/2*unapply((1/EJ*int((M_1(x))^2,x=0..x1)),x):W(x):# energia sprężysta układu:

>U_R[A]:=W(x):

>A:=unapply(U_R[A],R[A]):A(R[A]):# energia sprężysta układu w funkcji reakcji R[A]:

>def_Ra:=unapply(lhs(%),R[a]):def_Ra(R[A]):

>Diff(def_Ra(R[A]),R[A])=value(diff(def_Ra(R[A]),R[A]));# pochodna z energii sprężystej układu w funkcji reakcji R[A]:

$$\frac{\partial}{\partial R_A}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{EJ}\int_0^l\left(-R_A l+\frac{1}{2}q_o l^2+R_A x-\frac{1}{2}q_o x^2\right)^2 \mathrm{d}x\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{EJ}\int_0^l\left(-2R_A l+q_o l^2+2R_A x-q_o x^2\right)\left(l-x\right)\mathrm{d}x\right)$$

>def:=simplify(rhs(%)); prawa strona powyższego równania po uproszczeniach:

$$def := \frac{1}{24}\frac{l3\left(5q_o l-8R_A\right)}{EJ}$$

>eqn_Ra:=def=0:# przyrównanie pochodnej energii sprężystej układu do zera:

>r_2:=solve({eqn_Ra},{R[A]}):R[A]; # rozwiązanie równania (2):

$$\frac{5}{8}q_o l$$

>M[A];M_1(x); # moment utwierdzenia MA i funkcja momentu zginającego:

$$\frac{1}{8}q_o l^2$$

$$\frac{1}{8}q_o l^2+\frac{5}{8}q_o lx-\frac{1}{2}q_o x^2$$

>T_1:=unapply(diff(M_1(x),x),x):simplify(T_1(x)); R[B]:=-subs(x=x1,T_1(x));# funkcja sił tnących i wartość reakcji RB:

$$\frac{5}{8} q_o l - q_o x$$

$$R_B := \frac{3}{8} q_o l$$

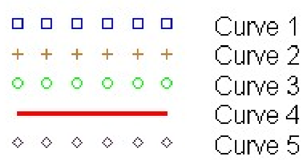
Znając wartości sił reakcji i momentu utwierdzenia, wyznaczamy na podstawie równań (3) i (4) kąty ugięcia i linie ugięcia belki. Ograniczone miejsce nie pozwala na zapisanie wykonywanych operacji w postaci *worksheetu*.

Korzystając z zasady najmniejszości energii [5] (twierdzenie Menabre'a–Castigliano) można również belkę rozwiązać od strony prawej do lewej. Wówczas rozwiązanie jest prostsze, a zapis w języku symbolicznym mniej skomplikowany — mający mniejszą wartość dydaktyczną.

4. Porównanie otrzymanych rozwiązań

Porównania można dokonywać na podstawie zestawień wzorów lub w postaci wykresów. Zestawienie wszystkich wzorów w tabelach zajęłoby dwie strony artykułu i nie uwidoczniłoby wpływów sposobu podparcia na pracę zginanych belek.

Przyjmijmy, że wszystkie belki są o tej samej długości l = 6 m i zostały wykonane z tego samego materiału. Mają ten sam przekrój poprzeczny [1]. Belki obciążono obciążeniem ciągłym o wartości q_o = 2 kN/m. W artykule, na zamieszczonych wykresach, krzywej 1 odpowiada belka „A" z rysunku 1a, krzywej 2 odpowiada belka „B" z rysunku 1b itd.



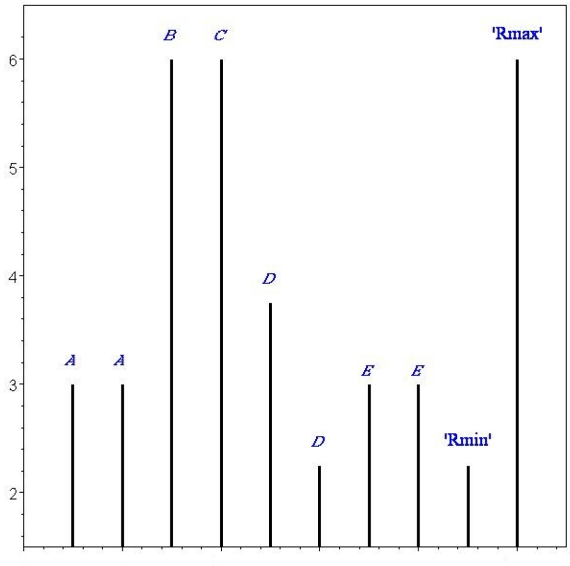
Rys. 3. Legenda do wykresów

Legendy opisujące wykresy sił przekrojowych, kątów ugięcia i linii ugięcia przedstawiono na rysunku 3. Obliczenia przeprowadzone w Maple mogą zostać zilustrowane w postaci grafiki 2D lub 3D. Służą do tego instrukcje „plot" i „plot 3d". Mają one ograniczone możliwości ustawiania parametrów rysowania.

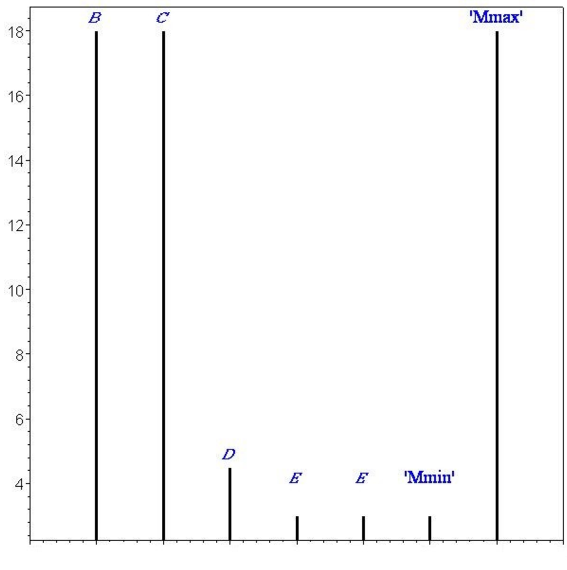
Instrukcje rysowania wywołujemy w następujący sposób: >plot(nazwa funkcji, dziedzina, wartości, inne opcje — parametry rysowania). Przed przystąpieniem do rysowania w Maple wszystkim symbolom muszą zostać przypisane wartości liczbowe. Maple nie rysuje wykresów w oparciu o wartości symboliczne.

Na kolejnych rysunkach, w postaci wykresów, pokazany został wpływ rodzaju podpór na wartości sił przekrojowych, kątów ugięcia i linii ugięcia w zginanych belkach.

Na rysunku 4 w postaci wykresów słupkowych przedstawiono wartości sił reakcji.



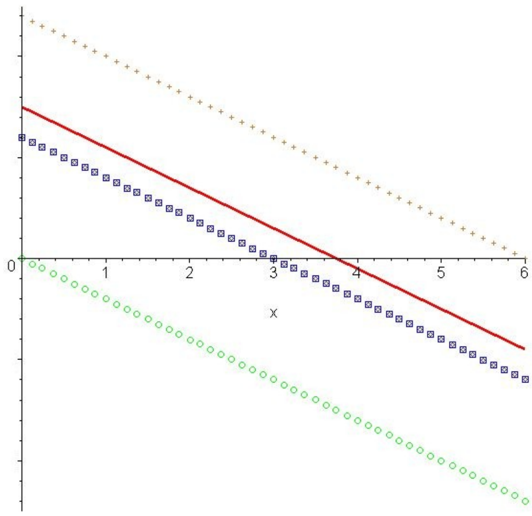
Rys. 4. Wartości sił reakcji



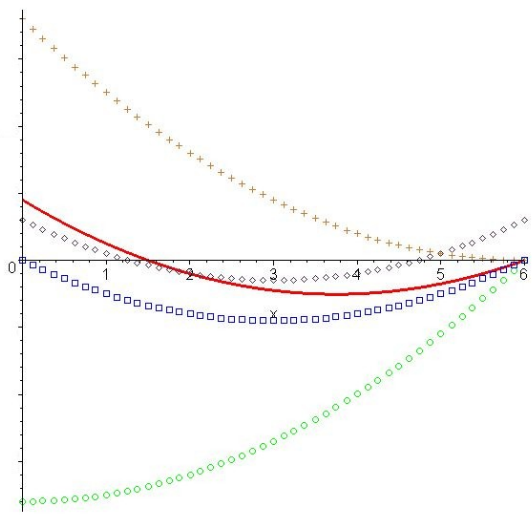
Rys. 5. Wartości momentów utwierdzenia

Z porównania wartości momentów w utwierdzeniach belek (rys. 5) wynika, że mają one mniejsze wartości w belkach statycznie niewyznaczalnych niż w statycznie wyznaczalnych.

Wykresy sił tnących przedstawiono na rysunku 6. W belkach „A” i „C” wykresy sił tnących mają identyczne rozkłady. Wykresy momentów zginających są w kształcie parabol (rys. 7). Największe wartości momentów zginających występują w utwierdzeniach belek „B” i „C”.

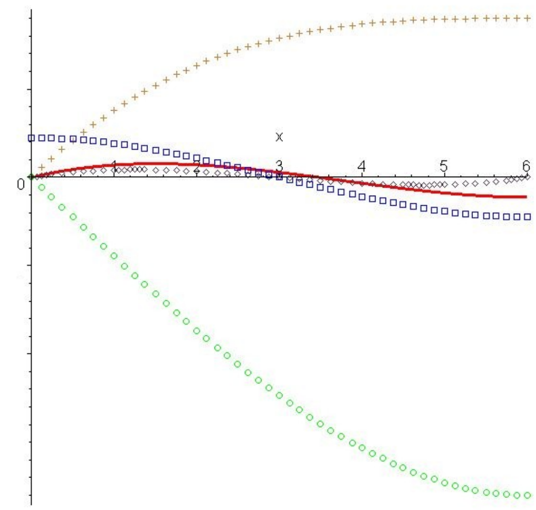


Rys. 6. Wykresy sił tnących

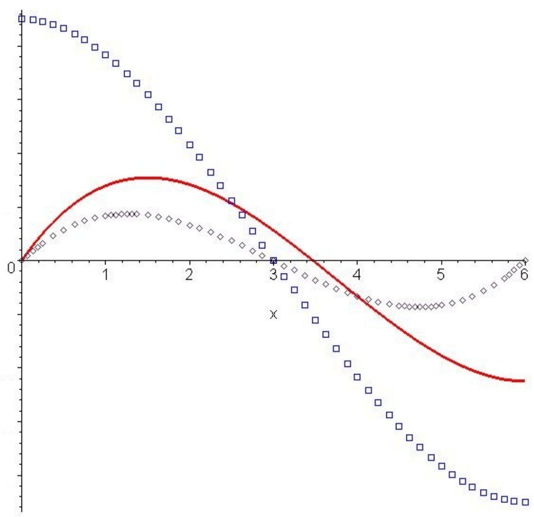


Rys. 7. Wykresy momentów zginających

Wykresy kątów ugięcia przedstawiono na rysunku 8. Zostały one narysowane w tej samej skali. W belkach „A”, „D” i „E” kąty ugięcia mają mniejsze wartości niż w belkach „B” i „C”. W celu lepszego zobrazowania wykresów dla belek „A”, „D” i „E”, narysowano kąty ugięcia w powiększonej skali (rys. 9).

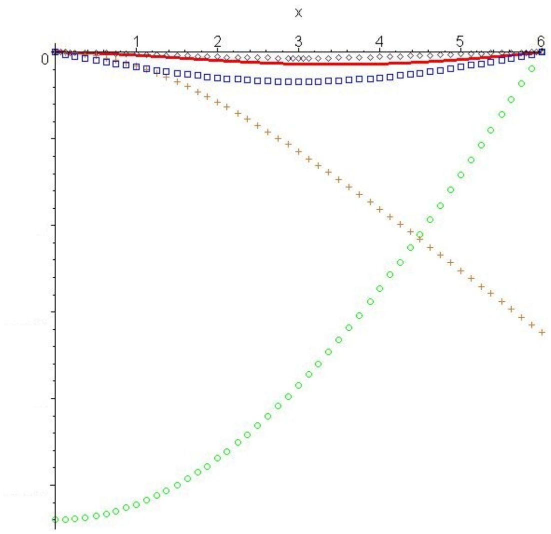


Rys. 8. Wykresy kątów ugięcia

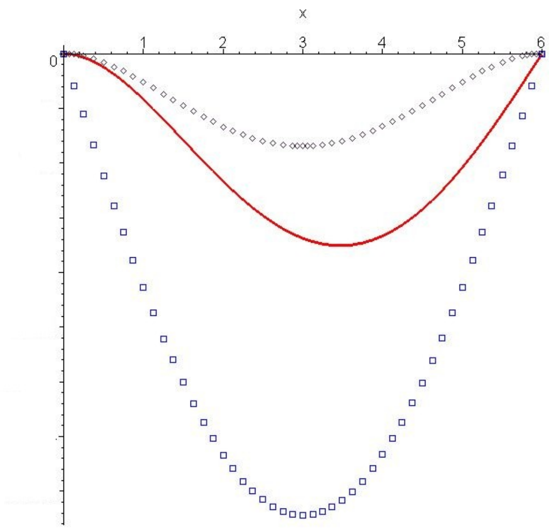


Rys. 9. Wykresy kątów ugięcia w powiększonej skali (dla belek „A”, „D” i „E”)

Linie ugięcia zginanych belek przedstawiono na rysunkach 10 i 11.



Rys. 10. Wykresy linii ugięcia



Rys. 11. Wykresy linii ugięcia w powiększonej skali (dla belek „A”, „D”, „E”)

Z przedstawionych wykresów wynika, że belki statycznie niewyznaczalne mają szereg zalet w porównaniu do belek statycznie wyznaczalnych. Naprężenia (proporcjonalne do wykresów momentów zginających, rys. 7) i odkształcenia (proporcjonalne do wykresów linii ugięcia, rys. 10) w belkach statycznie niewyznaczalnych są mniejsze. Belki statycznie niewyznaczalne są więc bardziej ekonomiczne i co ważniejsze bardziej bezpieczne. Należy je zatem stosować wszędzie tam, gdzie względy eksploatacyjne pozwalają na przyjęcie takiego rozwiązania. Niewątpliwymi wadami belek statycznie niewyznaczalnych jest ich czułość na nierównomierne ogrzewanie oraz błędy montażowe. Obydwa te czynniki mogą prowadzić do powstawania dodatkowych naprężeń, które muszą być uwzględnione przy projektowaniu konstrukcji.

4. Podsumowanie

W podręcznikach do wytrzymałości materiałów i mechaniki budowli nie porównuje się wpływu rodzaju podpór na: wartości sił przekrojowych, kąty ugięcia i linie ugięcia zginanych belek. Komputerowy rachunek symboliczny umożliwia dokonanie takiego porównania. Może on również zastąpić tradycyjne podejście — papier i ołówek — poprzez wygenerowywanie matematycznych rozwiązań zagadnienia. Użytkownik musi jednak nie tylko umieć zdefiniować problem, ale także zapisać go poprawnie w zrozumiałym formacie języka symbolicznego, a wówczas komputer faktycznie szybko wykona obliczenia. Programy systemów algebry komputerowej mogą zostać użyte, aby wspomóc i uzupełnić tradycyjne techniki rozwiązania belek w projektowaniu oraz nauczaniu wytrzymałości materiałów.

Reasumując należy stwierdzić, że Maple potrafi obliczyć symbolicznie tylko to, co wcześniej umieli symbolicznie obliczyć matematycy. Można również śmiało powiedzieć, że możliwości Maple są znaczne i przekraczają możliwości nawet dobrze wykształconych matematyków. Zdarza się jednak czasem i tak, że Maple napotyka na problemy i po dłuższej chwili pracy nie znajduje rozwiązania, które istnieje.

Korzystając z Maple lub innego systemu CAS, koniecznie należy mieć podejście badacza, gdyż CAS nie zawsze robi dokładnie to, czego od niego oczekujemy. Czasami trzeba próbować kilka razy, ażeby otrzymać żądany rezultat.

Rozwiązywanie zagadnień związanych ze zginaniem belek w oparciu o funkcje dystrybucyjne Heaviside'a i Diraca w połączeniu z rachunkiem symbolicznym przedstawiono w pracy [4].

LITERATURA

[1] *Bogucki W. et al.*: Tablice do projektowania konstrukcji metalowych. Warszawa, Arkady 1996

[2] *Burkhardt W.*: First Steps in Maple. London, Springer-Verlag 1994

[3] *Hałat W.*: Zastosowanie komputerowego rachunku symbolicznego do zagadnień zginania belek. Badania statutowe AGH 11.11.100.588, Kraków 2007

[4] *Hałat W.*: Rozwiązywanie belek z wykorzystaniem funkcji Heaviside'a i Diraca. Kwartalnik AGH Górnictwo i Geoinżynieria, 3, 2007

[5] *Jakubowicz A., Orłoś Z.*: Wytrzymałość materiałów. Warszawa, WNT 1970

[6] *Magnucki K., Szyc W.*: Wytrzymałość materiałów w zadaniach. Warszawa, PWN 2000

[7] Maple Learning Guide, Maplesoft

[8] *Orłowski W., Słowański L.*: Wytrzymałość materiałów, przykłady obliczeń. Warszawa, Arkady 1963

[9] *Ombach J.*: Wykłady z równań różniczkowych: wspomagane komputerowo — Maple. Kraków, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego 1999