

*Włodzimierz Hałat\**

## ROZWIĄZYWANIE BELEK Z WYKORZYSTANIEM FUNKCJI HEAVISIDE'A I DIRACA\*\*

---

### 1. Wprowadzenie

W wielu problemach budownictwa, odnoszących się do zginania belek, wyznaczenie wartości sił reakcji nie jest możliwe do uzyskania bez wcześniejszego wyznaczenia przemieszczeń. Dotyczy to zagadnień statycznie niewyznaczalnych, w których liczba sił biernych (reakcji więzów) jest większa niż ilość dostępnych równań statyki. Przedstawiona w pracy analiza belki poddanej zginaniu sformułowana została w przemieszczeniach. Sposób ten pozwala rozwiązywać, oprócz zagadnień statycznie niewyznaczalnych, również zagadnienia statycznie wyznaczalne bez potrzeby przeprowadzania dodatkowych obliczeń. Dostarcza on pełnych informacji o przebiegu sił wewnętrznych i ugięć wzdłuż całej długości belki. Jest to niekiedy sposób postępowania dość żmudny, wymagający znajdowania wielu stałych całkowania równań różniczkowych, droga ta jednak w wielu zastosowaniach jest najwygodniejsza.

Zastosowanie metody zaproponowanej przez A. Clebscha upraszcza rozwiązywanie zginanych belek. Pozwala ona również na wprowadzenie do rozwiązywanych zagadnień funkcji Heaviside'a i Diraca związanych z teorią dystrybucji [2]. Funkcje te w połączeniu z abstrakcyjnym operatorem różniczkowania oznaczanym symbolem  $D$  pozwalają, w sposób zwarty [5, 6], na zapisanie w języku rachunku symbolicznego i wykonywanie obliczeń związanych ze zginaniem belek.

Przedstawiony w artykule „arkusz rozwiązania belki” pozwala na rozwiązywanie belek jednoprzęsłowych dowolnie obciążonych i dowolnie podpartych. Aby można było tego dokonać, należy w arkuszu zapisać swoją funkcję obciążenia i zapisać nowy, inny sposób podparcia poprzez uwzględnienie odpowiednich warunków brzegowych.

---

\* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

\*\* Niniejszy artykuł oparty jest na badaniach statutowych AGH nr 11.11.100.588

## 2. Ugięcie belek poprzez całkowanie równania obciążenia

W belkach najczęściej spotykanych w budownictwie [7, 9], mających małe wymiary poprzeczne w stosunku do rozpiętości, nie uwzględniamy wpływu sił poprzecznych  $T = f_2(x)$  na ugięcie. Zakładając, że sztywność zginania  $EJ$  jest stała na całej długości belki (przykładki powszechnie spotykane w praktyce inżynierskiej), możemy zapisać, że pomiędzy obciążeniem  $q = f_1(x)$ , siłą poprzeczną  $T = f_2(x)$ , momentem zginającym  $M = f_3(x)$ , kątem obrotu  $K = f_4(x)$  oraz ugięciem  $U = f_5(x)$  zachodzą następujące związki:

$$EJ * \left( \frac{d^4 y}{dx^4} \right) = -q(x) \quad (1)$$

$$EJ * \left( \frac{d^3 y}{dx^3} \right) = T(x) = -\int q(x) dx + C_1 \quad (2)$$

$$EJ * \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = M(x) = -\int \left( \int q(x) dx \right) dx + C_1 * x + C_2 \quad (3)$$

$$EJ * \left( \frac{dy}{dx} \right) = EJ * K(x) = \int M(x) dx + C_3 \quad (4)$$

$$= -\int \left( \int \left( \int q(x) dx \right) dx \right) dx + \frac{C_1 * x^2}{2} + C_2 * x + C_3$$

$$EJ * (y(x)) = EJ * U(x) = \int M(x) dx + C_3 * x + C_4 \quad (5)$$

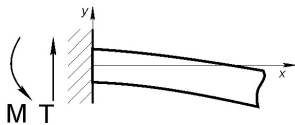
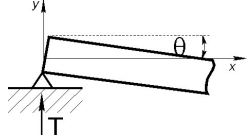
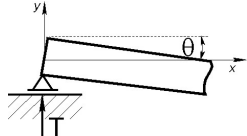
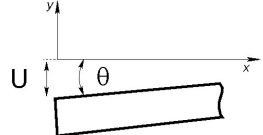
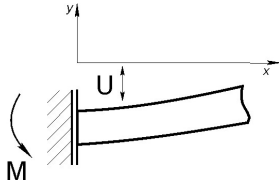
$$= -\int \left( \int \left( \int \left( \int q(x) dx \right) dx \right) dx \right) dx + \frac{C_1 * x^3}{6} + \frac{C_2 * x^2}{2} + C_3 * x + C_4$$

Sposób rozwiązywania równania różniczkowego czwartego rzędu (1) zależy od jego prawej strony. Jeżeli jest ona znaną funkcją  $x$ , to całkowanie przebiega w sposób tradycyjny. Aby otrzymać ugięcie  $U(x)$ , operację całkowania trzeba przeprowadzać czterokrotnie, określając z warunków brzegowych cztery stałe całkowania. Warunki brzegowe mogą być statyczne lub kinematyczne. Formułujemy je w siłach bądź w przemieszczeniach. Stawiane są na końcach belki i w myślowych przekrojach; potwierdzają ciągłość przemieszczeń oraz sił wewnętrznych. Warunki brzegowe dla  $x = 0$  i różnych sposobów podparcia zestawiono w tabeli 1.

Zazwyczaj przebieg linii ugięcia belki wyznaczany jest z podstawowego równania różniczkowego [7] zapisanego w postaci (3). Mamy wówczas do wyznaczenia dwie stałe całkowania.

TABELA 1

Warunki brzegowe dla różnych sposobów podparcia belek

Sposób podparcia belki	Warunki brzegowe	
		lub
	$y(0)=0, \theta(0)=0$	$y(0)=0, y'(0)=0$
	$y(0)=0, M(0)=0$	$y(0)=0, y''(0)=0$
	$y(0)=0, M(0)=0$	$y(0)=0, y''(0)=0$
	$M(0)=0, T(0)=0$	$y''(0)=0, y'''(0)=0$
	$\theta(0)=0, T(0)=0$	$y'(0)=0, y'''(0)=0$

### 3. Funkcja Heaviside'a i funkcja Diraca oraz operatory różniczkowania w Maple

Metoda całkowania, podstawowego równania różniczkowego (3), staje się uciążliwa i czasochłonna, kiedy w belce mamy kilka przedziałów charakterystycznych. Rozwiązania tego typu problemów komplikują się, jakkolwiek mogą one być uproszczone poprzez metodę zaproponowaną i rozwiniętą przez niemieckiego matematyka A. Clebscha (ok. 1862 r.). Metoda ta wymaga zachowania pewnych warunków sposobu zapisu. Pozwala ona również na wprowadzenie do rozwiązywanych zagadnień funkcji uogólnionych, które określane są przedziałami. Należą do nich funkcja Heaviside'a oraz funkcja impulsowa Diraca [2].

Funkcja Heaviside'a  $H(x - x_o)$  jest to tzw. funkcja skoku jednostkowego. Definiowana jest jako

$$H(x - x_o) = \begin{cases} 0 & x < x_o \\ 1 & x > x_o \end{cases} \quad (6)$$

W punkcie  $x = x_o$  funkcja  $H(x - x_o)$  jest nieciągła. Ma własności opisane zależnościami (7) i (8):

$$f(x) * H(x - x_o) = \begin{cases} 0 & x < x_o \\ f(x) & x > x_o \end{cases} \quad (7)$$

$$g(x) = f(x)[H(x - x_1) - H(x - x_2)] = \begin{cases} 0 & x \notin (x_1, x_2) \\ f(x) & x \in (x_1, x_2) \end{cases} \quad (8)$$

Wynika stąd wniosek, że złożenie funkcji  $f(x)$  z funkcjami Heaviside'a powoduje wygaszenie funkcji  $f(x)$  dla  $x \notin (x_1, x_2)$ .

Pochodna funkcji Heaviside'a w tradycyjnym sensie nie istnieje. Funkcja „ $\delta$ ” Diraca uważana jest za graniczny przypadek pochodnej funkcji  $H(x - a)$ . Ma ona własności:

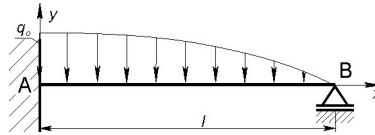
$$\delta(x - x_o) = \begin{cases} 0 & x \neq x_o \\ \infty & x = x_o \end{cases} \quad (9)$$

Przedstawia ona prostokąt o nieskończonej wysokości i zerowej szerokości o polu równym jedności [2].

Maple ma wbudowane dwie różne operacje różniczkowania: pierwsza z nich oznaczana jest symbolem „diff”, funkcja zmienna przedziałami w każdym z przedziałów różniczkowana jest oddzielnie. Druga operacja różniczkowania, oznaczana symbolem  $D$ , jest abstrakcyjnym operatorem różniczkowania, który może wykonywać operację różniczkowania funkcji [6]. Za pomocą operatora  $D$  w prosty sposób zapisujemy warunki początkowe dla równań różniczkowych. Operator  $D$  w połączeniu z funkcją Heaviside'a i funkcją Diraca pozwala na uproszczenie zapisu algorytmu rozwiązywania zginanych belek. Otrzymany wynik jest funkcją w przedstawieniu operatorowym [5].

#### 4. Rozwiązanie belek za pomocą rachunku symbolicznego oraz funkcji Heaviside'a i Diraca

Przykład rozwiązania belki statycznie niewyznaczalnej, w oparciu o twierdzenie Menabre'a–Castigliano wraz z elementarnymi wiadomościami o programie Maple niezbędny do zagadnień zginania belek, podano w pracy [4]. Twierdzenie Menabre'a–Castigliano wymaga zapisania równań równowagi oraz obrania wielkości statycznie niewyznaczalnych.



Rys. 1. Schemat belki

Rozwiązując belkę statystycznie niewyznaczalną (rys. 1) w oparciu o rachunek dystrybucyjny<sup>1</sup>, nie musimy zapisywać równań równowagi ani obierać wielkości statycznie niewyznaczalnych.

Belka została obciążona obciążeniem o natężeniu:

$$q(x) = q_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right).$$

Wiersz poleceń odzwierciedlający postać równania (5) dla schematu belki z rysunku 1 w zapisie języka symbolicznego Maple ma postać<sup>2</sup>:

```
> dsolve({diff(y(x),x$4) = -q[0]*cos((Pi*x)/(2*l))/EJ},y(x));#
```

w wyniku rozwiązania otrzymujemy:

$$\left\{ y(x) = -\frac{16q_0 l^4 \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)}{EJ\pi^4} + \frac{C1x^3}{6} + \frac{C2x^2}{2} + C3x + C4 \right\}.$$

#### 4.1. Arkusz rozwiązania belki w języku symbolicznym Maple

Poniżej przedstawiono kolejne zakodowane wiersze poleceń języka symbolicznego Maple (*Worksheet*<sup>3</sup>), umożliwiające rozwiązywanie belek za pomocą funkcji Heaviside'a oraz Diraca:

```
> restart;
```

```
> D1:=x->D(x):D1(x); D2:=x->D(D(x)):D2(x); D3:=x->D(D(D(x))): D3(x);
```

```
D(x)
```

<sup>1</sup> W pracy [8] podano przykłady zastosowania rachunku dystrybucyjnego w odniesieniu do belek statystycznie wyznaczalnych.

<sup>2</sup> Wiersze poleceń Maple wyświetlane są w kolorze czerwonym, dane wyjściowe w kolorze niebieskim.

<sup>3</sup> Tak nazywane są otwarte arkusze sesji Maple.

$$(D^{(2)})(x)$$

$$(D^{(3)})(x)$$

>H:=a->Heaviside(x-a); mH:=x->1-H(x);l:=6;p:=-q[o]\*cos((Pi\*x)/(2\*l)):

$$H := a \rightarrow \text{Heaviside}(x - a)$$

$$mH := x \rightarrow 1 - H(x)$$

>S:=(wa,wb,a,b)->(wa\*H(a)+H(a)\*(x-a)\*(wb-wa)/(b-a))\*mH(b);

$$S := (wa, wb, a, b) \rightarrow \left( wa H(a) + \frac{H(a)(x-a)(wb-wa)}{b-a} \right) mH(b)$$

>F\_Hew:=(S(p,p,0,l));# funkcja Heaviside rozwiązywanej belki

$$F\_Hew := -q_o \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) \text{Heaviside}(x)(1 - \text{Heaviside}(x - 6))$$

>Warunki:={y(1)=0,D2(y)(1)=0,y(0)=0,D(y)(1)=0};

$$\text{Warunki} := \left\{ y(0) = 0, y(6) = 0, (D^{(2)})(y)(6) = 0, D(y)(6) = 0 \right\}$$

>yy:=EJ\*diff(y(x),x\$4)=F\_Hew;# zapis równania różniczkowego

$$yy := EJ \left( \frac{d^4}{dx^4} y(x) \right) = -q_o \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) \text{Heaviside}(x)(1 - \text{Heaviside}(x - 6))$$

>dsolve({yy} union Warunki ,y(x)): # rozwiązanie równania

>U:=simplify(rhs(%));#funkcja linii ugięcia:

$$\begin{aligned}
U := & -2q_o \left( -10368 \operatorname{Heaviside}(x) - 216 \operatorname{Heaviside}(x-6) \right) \pi^3 \\
& + 108\pi^3 x \operatorname{Heaviside}(x-6) - 864\pi x \operatorname{Heaviside}(x-6) \\
& + 36 \operatorname{Heaviside}(x) \pi^2 x^2 + 5184 \operatorname{Heaviside}(x-6) \pi \\
& + 10368 \operatorname{Heaviside}(x) \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) - 10368 \operatorname{Heaviside}(x-6) \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) \\
& - 18\pi^3 x^2 \operatorname{Heaviside}(x-6) + x^3 \pi^3 \operatorname{Heaviside}(x-6) - 36x^2 \pi^2 \\
& + 432x^2 - 24x^3 \Big/ (\pi^4 EJ)
\end{aligned}$$

>q[o]:=2000:E:=205000\*10^6:J:=3060/(100^4):EJ:=E\*J:# sztywność zginania [1]

>K:=simplify(factor(diff(U,x)));# funkcja kątów ugięcia:

$$\begin{aligned}
K := & -6q_o \left( -12\pi^3 x \operatorname{Heaviside}(x-6) + \pi^3 x^2 \operatorname{Heaviside}(x-6) \right) \\
& + 36 \operatorname{Heaviside}(x-6) \pi^3 + 288x - 288 \operatorname{Heaviside}(x-6) \pi - 24x \pi^2 \\
& - 24x^2 + 24 \operatorname{Heaviside}(x) \pi^2 x + 288 \operatorname{Heaviside}(x-6) \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) \pi \\
& - 288 \operatorname{Heaviside}(x) \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) \pi \Big/ (\pi^4 EJ)
\end{aligned}$$

>M:=simplify(EJ\*diff(U,x\$2)); # funkcja momentów zginających:

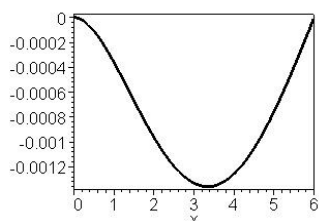
$$\begin{aligned}
M := & -12q_o \left( 144 + 12 \operatorname{Heaviside}(x-6) \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) \right) \pi^2 \\
& - 6 \operatorname{Heaviside}(x-6) \pi^3 - 12 \operatorname{Heaviside}(x) \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) \pi^2 \\
& + \pi^3 x \operatorname{Heaviside}(x-6) - 12\pi^2 + 12 \operatorname{Heaviside}(x) \pi^2 - 24x \Big/ \pi^4
\end{aligned}$$

>T:=simplify(EJ\*diff(U,x\$3)); # funkcja sił tnących

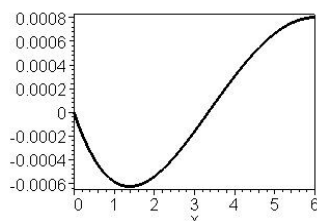
$$T := \frac{12 \left( \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) - 1 \right) \operatorname{Heaviside}(x-6) - 12 \operatorname{Heaviside}(x) \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)}{\pi} + \frac{228}{\pi^4}$$

## 5. Graficzne przedstawienie wyników

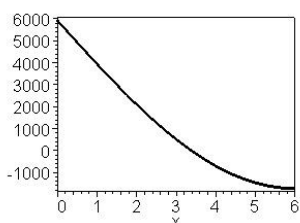
Narysowanie wykresów za pomocą programu Maple nie stanowi problemu: wystarczy w linii poleceń napisać `plot(U,x = 0..1, color = black,thickness = 3, axes = BOXED)`, aby otrzymać wykres linii ugięcia zginanej belki (rys. 2). Postępując w podobny sposób otrzymujemy wykresy kątów ugięcia (rys. 3), sił tnących (rys. 4) oraz momentów zginających (rys. 5).



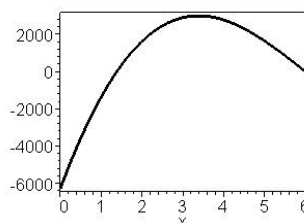
Rys. 2. Wykres linii ugięcia



Rys. 3. Wykres kątów ugięcia

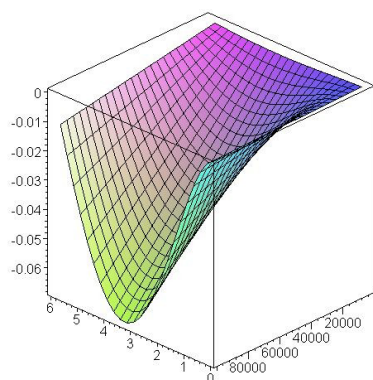


Rys. 4. Wykres sił tnących

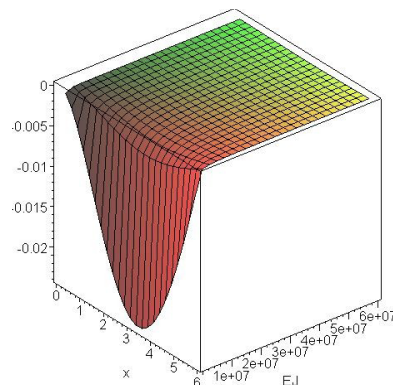


Rys. 5. Wykres momentów gnących

Program Maple, oprócz grafiki dwuwymiarowej, ma zdefiniowane instrukcje pozwalające na trójwymiarową prezentację zdefiniowanych funkcji. Na rysunkach 6 i 7 przedstawiono wpływ zmiany obciążenia oraz sztywności zginania [1, 9] na linię oraz ugięcia belki.



Rys. 6. Linia ugięcia belki w funkcji  $q_0$



Rys. 7. Linia ugięcia belki w funkcji  $EJ$



## 6. Konkluzje

Przedstawione w niniejszym artykule rezultaty oraz możliwości języka symbolicznego Maple upoważniają do stwierdzenia, że jest on pakietem CAS wspomagającym prace naukowo-techniczne w zakresie zastosowania do projektowania i rozwiązywania zginanych belek rachunku dystrybucyjnego. Na pewno CAS nie zastąpi tradycyjnego podejścia do rozwiązywania zagadnienia za pomocą kredy i tablicy; nie można jednak żyć przeszłością i udawać, że CAS nie istnieje. Do lamusa historii przeszły obliczenia projektowe wspomagane suwakami logarytmicznymi, ten sam los podzielił obliczenia projektowe wspomagane zwykłymi kalkulatorami. Systemy CAS nie tylko sprawnie rozwiązują postawione zadania, ale także znakomicie pokazują, jak zmieniają się wykresy analizowanych funkcji. Możliwości graficzne i animacyjne pakietów CAS pogłębią ich przydatność i pozwolą użytkownikom skupić się na istocie problemu, a nie na żmudnych przekształceniach. Korzystając z CAS, należy jednak uważać, by „forma nie przerosła treści”; trzeba także pamiętać, że programy CAS podlegają ciągłemu rozwojowi i nie zawsze kolejna wersja programu wykonuje to, co robiła wersja wcześniejsza.

### LITERATURA

- [1] *Bogucki W. et al.*: Tablice do projektowania konstrukcji metalowych. Warszawa, Arkady 1996
- [2] *Bronstejn I. N. et al.*: Nowoczesne kompendium matematyki. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN 2004
- [3] *Halat W.*: Zastosowanie komputerowego rachunku symbolicznego do zagadnień zginania belek. Badania statutowe AGH 11.11.100.588, Kraków 2007
- [4] *Halat W.*: Zastosowanie komputerowego rachunku symbolicznego do zagadnień zginania belek. Kwartalnik AGH Górnictwo i Geoinżynieria, 3, 2007
- [5] Maple Learning Guide, Maplesoft
- [6] *Palczewski A.*: Równania różniczkowe zwyczajne: teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych. Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 2004
- [7] *Pyrak S., Szulborski K.*: Mechanika konstrukcji — przykłady obliczeń. Warszawa, Arkady 1998
- [8] *Skalmierski B.*: Mechanika. Podstawy mechaniki klasycznej. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej 1998
- [9] *Żmuda J.*: Podstawy projektowania konstrukcji metalowych. Warszawa, Arkady 1977