

Zbigniew Muszyński\*, Jarosław Rybak\*

## ZASTOSOWANIE METOD ESTYMACJI ODPORNEJ W OBLICZENIACH NOŚNOŚCI GRANICZNEJ PALI

---

### 1. Wprowadzenie

Podana w Polskiej Normie PN-83/B-02482 [1] procedura przeprowadzania badania nośności pali oraz zasady interpretacji wyników osiadań pozwalają na ocenę poprawności metody projektowej i zgodności warunków geotechnicznych z założonymi do projektowania. Wyniki próbnego obciążenia stanowią ponadto podstawę do wprowadzenia ewentualnych zmian w projekcie palowania. Wiarygodność wyników osiadań musi być wysoka, ponieważ badania statyczne są bardzo czasochłonne i kosztowne, a podejmowane na ich podstawie decyzje przynoszą istotne konsekwencje techniczne i ekonomiczne. Zbudowanie dodatkowego stanowiska badawczego jest często bardzo utrudnione, ze względu na niedostateczne zbrojenie i nośność na wyciąganie pali kotwiących lub konieczność stosowania balastu.

Szeroko stosowanym ostatnio rozwiązaniem jest wykonywanie badań dynamicznych nośności pali. W przypadku prefabrykowanych pali wbijanych udział badań dynamicznych w ogólnej liczbie wykonywanych badań osiągnął w 2007 roku 71%. Podstawą prawną stosowania badań dynamicznych jest Polska Norma PN-EN 12699. Specjalne roboty geotechniczne. Pale przemieszczeniowe [7], która dopuszcza test dynamiczny do badania nośności. Problemem, jaki się napotyka, jest konieczność precyzyjnej kalibracji tych badań, zarówno w aspekcie wyznaczenia w badaniach dynamicznych nośności granicznej, jak i doboru odpowiedniego współczynnika bezpieczeństwa, pozwalającego na określenie dopuszczalnego obciążenia na pal.

Dobra kalibracja wymaga znajomości nośności granicznej pala z badania statycznego, a ta często nie może być wyznaczona ze względu na ograniczoną nośność stanowiska badawczego. Projektant jest wtedy zmuszony do obliczenia nośności granicznej na podstawie posiadanych danych przez „ekstrapolację” wyników badań. W pracy przedstawiono wyniki

---

\* Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wroclawska, Wrocław

obliczeń nośności granicznej pali fundamentowych na podstawie tzw. metody 80% zaproponowanej przez Brinch Hansena [1]. Przeanalizowano procedurę aproksymacyjną w aspekcie:

- liczby pomiarów osiadań uwzględnianych w obliczeniach,
- wag poszczególnych pomiarów osiadań,
- zmiany wag poszczególnych pomiarów osiadań (eliminacja błędów metodami estymacji odpornej).

Wnioski z przeprowadzonych obliczeń mają w dalszych etapach stanowić podstawę do zaproponowania metody obliczania nośności granicznej na podstawie wyników próbnego obciążenia statycznego dla potrzeb kalibracji wdrażanych coraz częściej badań dynamicznych.

## **2. Próbne obciążenia statyczne**

### **— pryncypia i możliwe problemy techniczne**

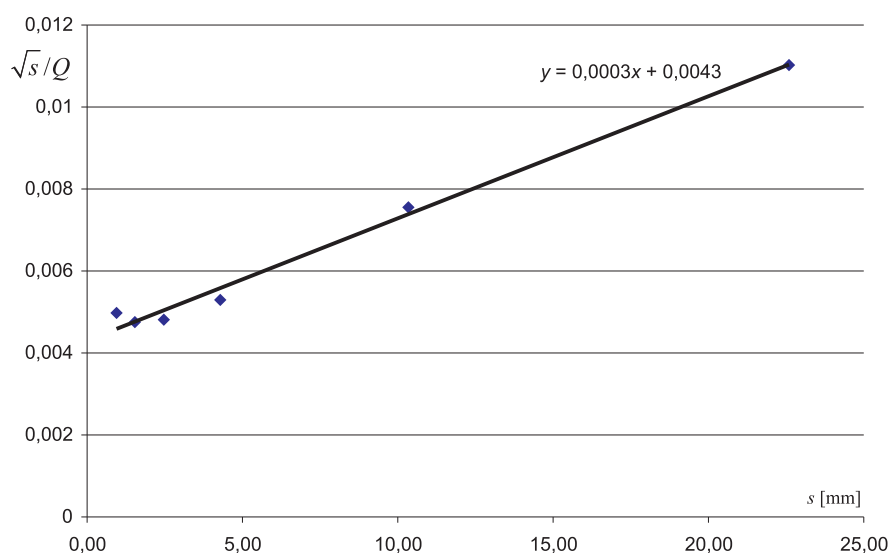
Przepisy normowe, dotyczące zasad określania liczby i wyboru miejsca pali próbnie obciążanych, nakazują wykonanie badań praktycznie dla każdego obiektu posadowionego na palach. Próbne obciążenia statyczne wykonuje się zazwyczaj metodą belki odwróconej z wykorzystaniem sąsiednich pali jako pali kotwiących lub z zastosowaniem balastu. Sposób przeprowadzania próbnych obciążeń pali oraz zasady interpretacji wyników przedstawione są w punktach 7 i 8 normy [6]. Należy pamiętać, że próbne obciążenie statyczne, choć traktowane jest jako badanie najbardziej wiarygodne (badanie referencyjne), może również być obarczone różnorodnymi błędami. Największe ryzyko niosą:

- błędy systematyczne związane z niedokładnościami układu obciążającego (kalibracja siłownika i manometrów) lub układu pomiarowego (czujniki osiadań),
- przemieszczenie bazy z czujnikami do rejestracji osiadań związane z osiadaniami terenu przy palu (do wyeliminowania przy zastosowaniu niwelacji precyzyjnej),
- przemieszczenie bazy z czujnikami spowodowane wpływami termicznymi, np. nagrzaniami od nasłonecznienia (badanie często trwa kilkanaście godzin),
- niejednoczesne odczyty wskazań osiadań,
- wahania ciśnienia w układzie hydraulicznym (i siły obciążającej pal) spowodowane osiadaniami pała i deformacją belek układu obciążającego (występuje zazwyczaj w ostatnich krokach obciążenia, decydujących o wyznaczonej nośności granicznej).

Wymienione wyżej możliwe niedokładności wyznaczenia zależności obciążenie — osiadanie mają oczywiście znaczący wpływ na interpretację wyników badań. Zaobserwowano np. wynikające z wpływów termicznych (nasłonecznienie) różnice we wskazaniach osiadań rzędu 0,1 mm, co jest znaczącym zaburzeniem w sytuacji wymaganej dokładności pomiaru rzędu 0,01 mm.

### 3. Obliczanie nośności granicznej metodą 80% Brinch Hansena

Propozycja Brinch Hansena definiuje nośność graniczną  $N_g$  jako punkt, po przekroczeniu którego następuje nieskrępowany przyrost osiadań. Metoda Brinch Hansena [1], podobnie jak normowa metoda wyznaczania nośności granicznej  $N_g$ , wymaga przeprowadzenia badania statycznego w zakresie wykraczającym poza sprężystą pracę pala. Do analizy przyjmuje się wtedy zazwyczaj tę część zależności osiadanie–obciążenie, gdzie siła przekracza obliczeniowe obciążenie na pal. Za  $N_g$  rozumie się takie obciążenie, dla którego osiadanie  $s$  przekroczyło czterokrotnie wartość pomierzoną przy 80% tego obciążenia. Zależność osiadanie–obciążenie ( $s - Q$ ) transformuje się do układu współrzędnych:  $s$  — odcięte i  $\sqrt{s}/Q$  — rzędne (rys. 1).



Rys. 1. Obliczenie nośności granicznej według Brinch Hansena (metoda 80%)

Dla ostatnich punktów przeprowadzonego badania, dla których uzyskano stabilizację osiadań, wyznacza się (przez aproksymację) zależność liniową w postaci:

$$\sqrt{s}/Q = A \cdot s + B.$$

Można łatwo obliczyć, że graniczna nośność pala według metody 80% wynosi:

$$N_g = \frac{1}{2\sqrt{A \cdot B}} \quad (1)$$

W przykładzie na rysunku 1 otrzymujemy z aproksymacji prostą:  $A = 0,0003$  i  $B = 0,0043$ .

Możemy zatem obliczyć:

$$N_g = 440 \text{ kN.}$$

Należy zauważyć, że zarówno liczba punktów, których ułożenie aproksymujemy liniowo, jak również ewentualne niedokładności (losowe) ich wyznaczenia wpływają na oszacowanie nośności.

#### 4. Metody aproksymacji

Najczęściej stosowane metody aproksymacji opierają się na tzw. metodzie najmniejszych kwadratów. Większość arkuszy kalkulacyjnych posiada wbudowane moduły obliczeniowe (wykorzystujące tę metodę), pozwalające na opisanie analizowanego zbioru punktów zależnością liniową (lub wyższych rzędów). W bardziej zaawansowanych zastosowaniach metody najmniejszych kwadratów istnieje możliwość nadania wag poszczególnym obserwacjom. W rozpatrywanym przypadku obliczeń nośności granicznej eliminujemy te punkty (poprzez nadanie zerowej wagi), które układają się w zakresie sprężystej pracy pała w gruncie. Informacje z przedziału pracy sprężysto-plastycznej można również wstępnie podzielić na mniej i bardziej istotne. Intuicja podpowiada, że największy wpływ na wynik obliczeń nośności granicznej mają ostatnie obserwacje przed zakończeniem próbnego obciążenia, zwłaszcza te, które zawierają się w przedziale  $(0,8 \div 1,0) Q_{\max}$ .

Odrębnym zagadnieniem jest dążenie w trakcie procesu obliczeniowego do zmniejszenia wpływu opisanych wcześniej błędów systematycznych i przypadkowych oraz do eliminacji ewentualnych błędów grubych. Można w tym celu zastosować znane ze statystyki matematycznej (oraz często wykorzystywane w geodezji) metody estymacji odpornej. Istota tych metod polega na wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów z jednoczesnym iteracyjnym modyfikowaniem (zmniejszaniem) wag tych obserwacji, które zostały uznane za odstające. Jako odstające traktuje się te punkty, dla których obliczona odchyłka wpasowania (aproksymacji) przekracza wartość uznaną za dopuszczalną. W rezultacie obserwacje odstające mają mniejszy (a w skrajnym przypadku zerowy) wpływ na uzyskiwane rozwiązanie. Pozwala to wpasować przyjęty model teoretyczny aproksymacji w największą liczbę punktów przystających.

W niniejszym artykule wykorzystano dwie metody estymacji odpornej:

- 1) metodę Hubera,
- 2) tzw. metodę duńską.

##### 4.1. Metoda Hubera

Została zaproponowana przez Hubera w pracy [2] i powtórzona w artykule [3]. Stanowi połączenie metody najmniejszych kwadratów i metody najmniejszego odchylenia przeciętnego. Dla  $i$ -tej obserwacji, iteracyjna modyfikacja wag przebiega zgodnie ze wzorem (2).

$$\widehat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{dla } |v_i| \leq f \\ p_i \frac{f}{|v_i|} & \text{dla } |v_i| > f \end{cases} \quad (2)$$

gdzie:

- $p$  — waga  $i$ -tej obserwacji z poprzedniej iteracji (w pierwszym kroku obliczeniowym przyjmowana z metody najmniejszych kwadratów);
- $\widehat{p}$  — waga zmodyfikowana;
- $v$  — odchyłka wpasowania (aproksymacji);
- $f$  — parametr sterujący, określający przedział dopuszczalnych wartości odchyłek wpasowania  $v$ .

#### 4.2. Metoda duńska

Została opracowana przez Krarupa i opisana w pracy [4]. W porównaniu z poprzednią metodą charakteryzuje się bardziej empirycznym podejściem do zagadnienia modyfikacji wag obserwacji odstających. Modyfikacje te, przeprowadzane zgodnie ze wzorem (3), wykorzystują tzw. funkcję tłumienia (4)

$$\widehat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{dla } |v_i| \leq f \\ p_i \cdot t(v_i) & \text{dla } |v_i| > f \end{cases} \quad (3)$$

$$t(v_i) = \exp\left(-d\left(\frac{|v_i|}{f}\right)^k\right) \quad (4)$$

gdzie:  $d, k$  oznaczają parametry funkcji tłumienia o dodatnich wartościach.

### 5. Wyniki obliczeń

Obliczenia nośności granicznej wykonano na podstawie wyników próbnych obciążeń statycznych czterech prefabrykowanych pali wbijanych, zbadanych na budowie dużego centrum handlowego na południu Polski.

Korzystając ze środowiska Mathcad [5] opracowano algorytm obliczania nośności granicznej następującymi metodami:

- metodą najmniejszych kwadratów, przy założeniu jednakowych wag dla wszystkich analizowanych punktów;
- metodą najmniejszych kwadratów, przy założeniu zróżnicowanych wag dla poszczególnych punktów;

- metodą Hubera, przy założeniu wstępnego zróżnicowania wag dla poszczególnych punktów;
- metodą duńską, przy założeniu wstępnego zróżnicowania wag dla poszczególnych punktów.

W obliczeniach wykorzystywano sześć ostatnich obserwacji z zakresu pracy sprężysto-plastycznej pali. Wybór akurat sześciu obserwacji przed zakończeniem próbnego obciążenia wynika z faktu, że zazwyczaj tyle obserwacji rejestruje się pomiędzy odciążeniem a osiągnięciem maksymalnego obciążenia podczas badania polowego. Przyjęto numerację obserwacji od końca obciążania: ostatnia posiada numer 1, przedostatnia — numer 2, itd.

Zróżnicowanie wag w metodzie najmniejszych kwadratów (oraz wstępnych wag — w przypadku metod estymacji odpornej) polegało na przypisaniu obserwacji nr 1 — wagi 1,0, obserwacji nr 2 — wagi 0,8, obserwacji nr 3 — wagi 0,6, obserwacji nr 4 — wagi 0,4 oraz obserwacjom nr 5 i 6 — wag 0,2. Wykorzystanie wspomnianych metod estymacji odpornej wymaga przyjęcia pewnych wartości parametrów sterujących, określających dopuszczalny przedział wartości odchyłek wpasowania (aproksymacji). Parametry te przyjmowane są zazwyczaj w sposób empiryczny, odpowiednio dla poszczególnych zastosowań tych metod. W niniejszym artykule wartość parametru  $f$  ustalano na poziomie 50%, 75% i 100% wartości odchylenia standardowego odchyłek aproksymacji z poprzedniej iteracji (na wstępie obliczeń — z metody najmniejszych kwadratów ze zróżnicowanymi wagami). W metodzie duńskiej wartość parametrów  $d$  i  $k$ , decydujących o „kształcie” funkcji tłumienia — wzór (4), przyjęto na podstawie literatury geodezyjnej na poziomie:  $d = 0,05$ ,  $k = 4,4$ .

Kryterium zbieżności procesu iteracyjnego ustalono na następującym poziomie: zmiana wartości obu szukanych parametrów:  $A$  i  $B$  w trzech kolejnych iteracjach nie powinna przekraczać  $1 \cdot 10^{-7}$  (co gwarantuje kilka cyfr znaczących).

W tabeli 1 przedstawiono wyniki obliczeń nośności granicznej  $N_g$  według różnych metod.

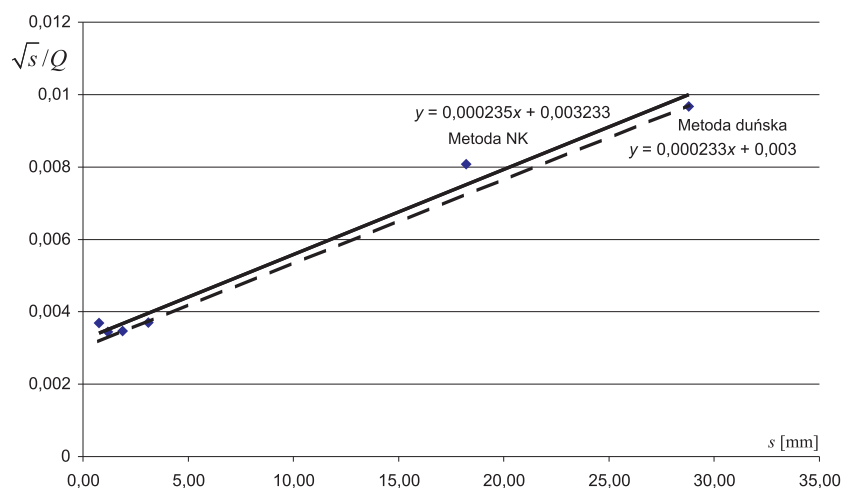
TABELA 1

**Wyniki obliczeń nośności granicznej  $N_g$  według różnych metod**

Pal	Metoda NK	Metoda NK + wagi	Metoda duńska			Metoda Hubera		
			$f = 0,50 \sigma$	$f = 0,75 \sigma$	$f = 1,00 \sigma$	$f = 0,50 \sigma$	$f = 0,75 \sigma$	$f = 1,00 \sigma$
P1	680	682	704	692	691	705	696	691
P2	574	575	597	598	598	597	598	598
P3	441	442	444	448	443	442	448	443
P4	690	687	687	685	686	687	685	686

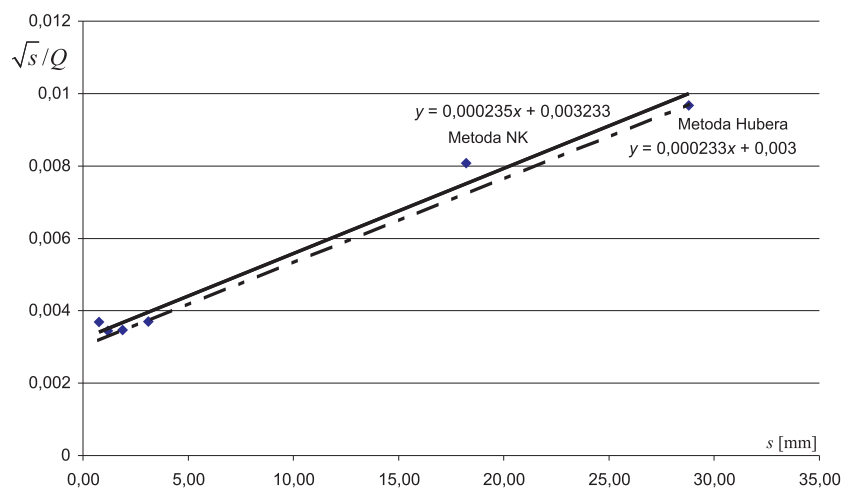
Wyniki wpasowania prostych do obliczeń nośności granicznej pala P2, dla którego stwierdzono największe różnice w wynikach uzyskanych z aproksymacji metodą najmniej-

szych kwadratów (NK) w stosunku do metod odpornych, przedstawiono poniżej na rysunkach 2 i 3. Rysunek 2 przedstawia dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów oraz aproksymację metodą duńską.



**Rys. 2.** Aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów i metodą duńską

Na rysunku 3 pokazano analogiczne porównanie dla metody Hubera. Dwie metody estymacji odpornej dały praktycznie identyczny wynik obliczeń. Również różnicowanie parametru sterującego  $f$  nie wpłynęło na wynik dopasowania.



**Rys. 3.** Aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów i metodą Hubera

Bardzo ciekawe wnioski przynosi analiza końcowych wag przypisywanych kolejnym punktom. W tabeli 2 zestawiono końcowe wagi z obliczeń prowadzonych dla pala P2.

TABELA 2  
**Końcowe wagi z obliczeń prowadzonych dla pala P2**

Punkty	Metoda NK	Metoda NK + wagi	Metoda duńska			Metoda Hubera		
			$f=0,50 \sigma$	$f=0,75 \sigma$	$f=1,00 \sigma$	$f=0,50 \sigma$	$f=0,75 \sigma$	$f=1,00 \sigma$
1	1,00000	1,00000	0,56622	0,90889	1,00000	0,57545	0,86318	1,00000
2	1,00000	0,80000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
3	1,00000	0,60000	0,40267	0,56113	0,60000	0,34011	0,56142	0,60000
4	1,00000	0,40000	0,34490	0,40000	0,40000	0,31246	0,40000	0,40000
5	1,00000	0,20000	0,20000	0,20000	0,20000	0,20000	0,20000	0,20000
6	1,00000	0,20000	0,00000	0,00001	0,00034	0,00001	0,00005	0,00017

Można zauważyć, że w przypadku pala P2 punkt 2 został odrzucony we wszystkich wariantach estymacji odpornej.

W przypadku wszystkich analizowanych pali stwierdzono, że punkt 6 otrzymał ostatecznie wagę mniejszą niż wstępnie założono (można w zasadzie rozważyć prowadzenie obliczeń dla pięciu punktów). Bardzo ważną informacją praktyczną jest (stwierdzana dla wszystkich pali) wysoka wartość wag końcowych dla punktu 1. Potwierdza to intuicję, że o obliczanej wartości nośności granicznej decyduje w największym stopniu ostatnia obserwacja przed zakończeniem próbnego obciążenia.

## 6. Podsumowanie i wnioski

Przyjęty stopień zróżnicowania wag w metodzie najmniejszych kwadratów w niewielki sposób wpływa na uzyskiwaną wartość nośności granicznej  $N_g$ . Wyniki otrzymane z metod estymacji odpornej zależą w pewnym stopniu od przyjętych wartości parametru sterującego  $f$ , bardziej jednak w zakresie wag nadawanych poszczególnym punktom niż w interesujących nas wartościach nośności granicznej. Na podstawie otrzymanych wyników z metod estymacji odpornej (przy trzech intuicyjnie dobranych wartościach parametru sterującego  $f$ ) możemy zauważyć, że z punktu widzenia zastosowań inżynierskich powszechnie stosowana metoda najmniejszych kwadratów pozwala na oszacowanie nośności granicznej z wystarczającą dokładnością.

W celu dokładnego obliczenia nośności granicznej konieczne jest uzyskanie w terenie wiarygodnych danych z pomiarów osiadania pala w ostatnich krokach obciążenia. Świad-



czą o tym bardzo wysokie wagi przypisywane w obliczeniach metodami estymacji odpornej punktowi 1 (ostatniej rejestracji osiadania). W praktyce jest to trudne, bowiem w ostatnich krokach obciążenia rejestruje się już duże osiadania przy długim czasie stabilizacji i znacznych deformacjach układu obciążającego.

*Autorzy składają szczególne podziękowania firmie AARSLEFF Sp. z o.o. za udostępnienie wyników realizowanych badań nośności pali.*

#### LITERATURA

- [1] *Brinch Hansen J.*: Discussion, Hyperbolic Stress-Strain response, Cohesive soil. Journal of soil mechanics and foundation engineering division, ASCE, 89, 1963, s. 241–242
- [2] *Huber P.J.*: Robust Estimation of a Location Parameter. The Annals of Mathematical Statistics, 35, 1, 1964, s. 73–101
- [3] *Huber P.J.*: The 1972 Wald Lecture Robust Statistics: A Review. The Annals of Mathematical Statistics, 43, 4, 1972, s. 1041–1067
- [4] *Krørup T., Kubik K.*: The Danish method. Experience and philosophy. Deutsche Geodätische Kommission. Reihe A, 98, 1983, s. 131–134
- [5] Mathcad 12<sup>®</sup> - program algebry komputerowej (CAS) firmy MathSoft Engineering & Education, Inc.
- [6] PN-83/B-02482. Fundamenty budowli. Nośność pali i fundamentów pałowych
- [7] PN-EN 12699: 2003. Wykonawstwo specjalnych robót geotechnicznych. Pale przemieszczeniowe
- [8] *Tkaczyński G.*: Wyniki i opracowania statystyczne badań nośności pali z archiwum AARSLEFF Sp. z o.o. (komunikacja prywatna)