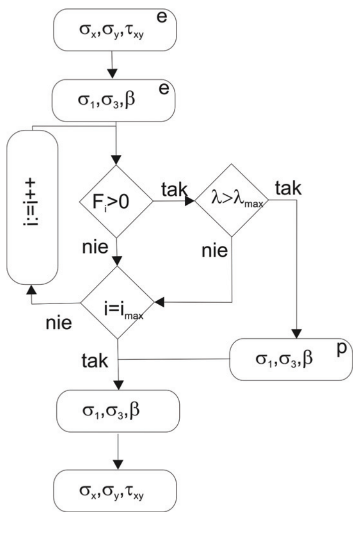
Górnictwo i Geoinżynieria • Rok 32 • Zeszyt 2 • 2008

*Janusz Kozubal**, *Marek Wyjadłowski**

ZAPIS WARUNKU PLASTYCZNOŚCI W JĘZYKU SKRYPTOWYM FLEXPDE ORAZ FLAC 2D

1. Wstęp

Praca powstała jako rozwiązanie problemu zapisu zagadnień plastyczności w niezmiernie interesującym pod względem zagadnień fizykalnych programie MES FlexPDE v5.0 [3] oraz programie MRS FLAC 2D [4]. Zastosowano model ciała sprężysto-idealnie plastycznego w zadaniach płaskiego stanu odkształcenia. Opracowana ścieżka postępowania w dogodny sposób umożliwia zapisanie warunków z dodatkowymi ograniczeniami, tj. zamknięcie od strony naprężeń ściskających w przestrzeni naprężeń głównych oraz ograniczenie rozciągania zapisanych jako powierzchnia wypukła wielosegmentowa. Sposób postępowania wyjaśnia rysunek 1.



Rys. 1. Schemat blokowy skryptu

* Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego, Politechnika Wrocławska, Wrocław

2. Warunek plastyczności

Przyjęto następujące założenia dotyczące naprężeń głównych: jako dodatnie określa się naprężenia ściskające:

$$\sigma_1 \le \sigma_2 \le \sigma_3 \tag{1}$$

$$F(\sigma_1, \sigma_3) = -\sigma_3(1-\sin\varphi) + \sigma_1(1+\sin\varphi) + 2c\cos\varphi = 0 \tag{2}$$

W rozwiązaniach dotyczących gruntów nasyconych stosuje się warunek Coulomba–Mohra (2) i jego postać rozszerzoną, wielosegmentową (21). Uzależnia on kształt powierzchni plastyczności od iloczynu stałego współczynnika i wielkości naprężeń średnich [3], gdzie ϕ i c są parametrami wytrzymałościowymi, zaś zmienne stanu naprężenia oznaczono jako: s, t.

$$t = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \tag{3}$$

oraz

$$s = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \tag{4}$$

Warunek (2) jest symetryczny względem osi ciśnień hydrostatycznych, stąd jego kształt określają dwie stałe materiałowe. Warunek stanu granicznego otwarty od strony naprężeń ściskających można traktować jako szczególny przypadek warunku zamkniętego [5, 6] przy założeniu dużej wartości ciśnienia prekonsolidacji. Zakładając, że odkształcenia całkowite są sumą plastycznych i sprężystych:

$$\varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^s \tag{5}$$

w płaskim stanie odkształcenia można przedstawić zależność:

$$\varepsilon^s = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} - \varepsilon_0 \tag{6}$$

gdzie u oraz v są odpowiednio prędkościami odkształcenia w kierunkach x i y, uzyskiwane są z rozwiązania układu równań różniczkowych równowagi dla naprężeń [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Naprężenia można wyrazić jako:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \tag{8}$$

W rozważaniach uwzględniamy rezydualne — zastane naprężenia oraz odkształcenia związane z wpływem takich czynników jak temperatura i przesuszenie. Związek pomiędzy naprężeniem i odkształceniem wyraża się za pomocą liniowej sprężystości jak dla ciała izotropowego:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} c_{11}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y \\ c_{22}\varepsilon_x + c_{11}\varepsilon_y \\ c_{12}\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \sigma_0 \tag{9}$$

W dalszych rozważaniach założono stowarzyszone prawo płynięcia, stąd uwzględniając kierunek wektora plastycznego odkształcenia jako normalny do powierzchni plastyczności wyznaczono:

$$\begin{aligned} N_m &= (1 - \sin\varphi) \\ N_p &= (1 + \sin\varphi) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial F(\sigma_1, \sigma_3)}{\partial \sigma_1} \\ \dfrac{\partial F(\sigma_1, \sigma_3)}{\partial \sigma_3} \end{Bmatrix} = \dot{\lambda} \begin{Bmatrix} -N_p \\ N_m \end{Bmatrix} \tag{11}$$

gdzie $\dot{\lambda}$ to stały mnożnik, który wyliczamy z zależności

$$F\left(\sigma_1{}^N, \sigma_3{}^N\right) = 0 \tag{12}$$

oraz

$$\begin{aligned} \sigma_1^N &= \sigma_1 - \Delta\sigma_1^P \\ \sigma_3^N &= \sigma_3 - \Delta\sigma_3^P \end{aligned} \tag{13}$$

dla gałęzi

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_1^P &= c_{11}\dot{\lambda}N_p - c_{22}\dot{\lambda}N_m, \\ \Delta\sigma_3^P &= c_{11}\dot{\lambda} - N_m + c_{22}\dot{\lambda}N_p \end{aligned} \tag{14}$$

Po podstawieniu i pogrupowaniu składników uzyskano wartość mnożnika $\dot{\lambda}$ (15):

$$\dot{\lambda} = \frac{-F(\sigma_1, \sigma_3)}{(-c_{11}N_m + c_{22}N_p)N_m - (c_{11}N_p - c_{22}N_m)N_p} \tag{15}$$

Po wyznaczeniu wartości powyższego mnożnika można dodać poprawkę do naprężeń głównych w postaci (16):

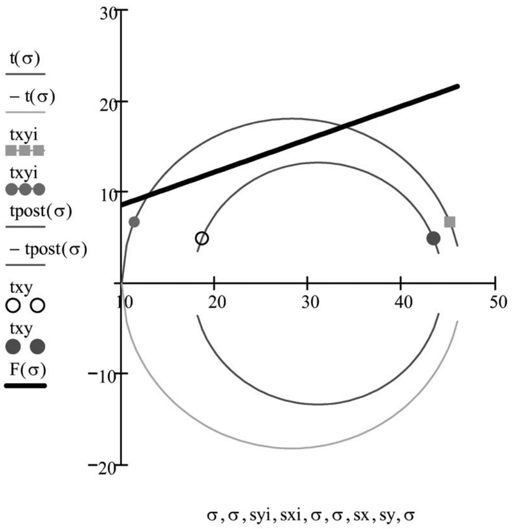
$$\begin{aligned} \Delta\sigma_1^P &= c_{11}\dot{\lambda}N_p - c_{22}\dot{\lambda}N_m, \\ \Delta\sigma_3^P &= -c_{11}\dot{\lambda}N_m + c_{22}\dot{\lambda}N_p \end{aligned} \tag{16}$$

Następnie należy przejść do wartości naprężeń na kierunkach rzeczywistych, pozostawiając wartość kąta α równą tej uzyskanej z inicjującego stanu sprężystego.

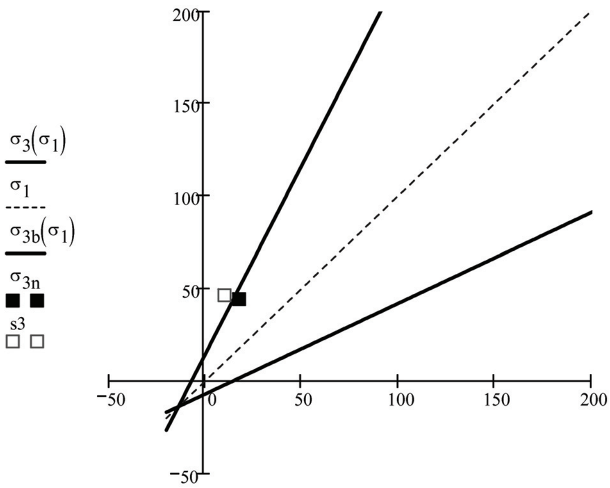
Największą zaletą FlexPDE jest możliwość adaptacji do złożonych zagadnień modelowania poprzez swobodne wpasowanie własnych fragmentów kodu — (skrypt) do mechanizmów obliczeniowych MES [7]. W wygodny sposób dostarcza nam to kontrolę przebiegu obliczeń, jakość wyniku oraz duże możliwości prezentacji graficznej rezultatów (rys. 2).

Wykonano obliczenia sprawdzające dla ośrodka bez ciężaru własnego w zadaniu nośności podłoża jednorodnego. Nie uzyskano rezultatów zgodnych z rozwiązaniami teoretycznymi np. dla mechanizmu Prandtla. Program jest wrażliwy na wprowadzenie nieciągłości w minimalizowane funkcje, a taką nieciągłością jest właśnie plastyczność i związane z nią przekształcenia.

a)



b)



Rys. 2. Ilustracja wprowadzania poprawki na wstępnie przyjętych naprężeniach z rozwiązania równania równowagi (7): a) przestrzeń naprężeń CM, b) przestrzeń naprężeń głównych

3. Implementacja numeryczna

Sposobem na usunięcie niestabilności w uzyskiwaniu rozwiązania jest nałożenie osłabienia materiału w kolejnych krokach czasowych, np. dla *t*(0,1>, aż do uzyskania wstępnie założonego położenia warunku w przestrzeni naprężeń głównych. Procedurę tę realizuje się poprzez wprowadzenie współczynnika do wzoru na powierzchnię plastyczności, gdzie czas zostanie potraktowany jako parametr osłabienia, stąd równanie (2) po uwzględnieniu (17) przyjmie postać (18):

$$m_t = \frac{1}{t} \tag{17}$$

$$F(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_3(1 - \sin\varphi) - \sigma_1(1 + \sin\varphi) - m_t 2c\cos\varphi = 0 \tag{18}$$

Praca na odkształceniu plastycznym jest wtedy postaci (19):

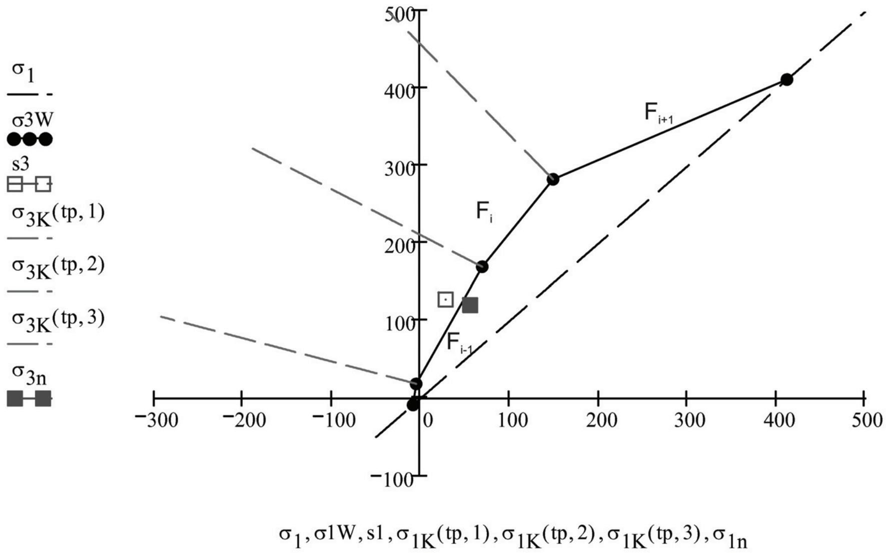
$$W^P = \int_{t_1}^{t_2} \Delta\sigma^P \frac{\partial F(\sigma)}{\partial\sigma} \lambda \frac{1}{t} dt = \Delta\sigma^P \frac{\partial F(\sigma)}{\partial\sigma} \lambda \ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right) \tag{19}$$

Rozwiązanie uzyskuje się przeprowadzając obliczenia dla małych postąpień kroku czasowego (10^{-5}) procedury numerycznej FlexPDE w zakresie $t = (0,1>$. Uzyskanie rozwiązań za pomocą tej metody jest czasochłonne, a działanie programu podczas obliczeń niestabilne.

```
(...)
VARIABLES
u v
DEFINITIONS
(...)
{blok sprezysty PSO}
{***********************}
sxi=c_11*e11 + c_22*e22
syi=c_22*e11 + c_11*e22
txyi=c_12*e12
{***********************}
p_1=(sxi+syi)/2
a_x=sxi-p_1
a_y=syi-p_1
t_1=sqrt(txyi^2+a_x^2)
s_1=p_1-t_1
s_3=p_1+t_1
s_alfax=if t_1=0 then 0 else txyi/t_1
c_alfax=if t_1=0 then 1 else a_x/t_1
c_alfay=if t_1=0 then 1 else a_y/t_1
{blok plastycznosci}
fs1s3=-s_3*Nm+s_1*Np+2*coh*cfi/t
mig=(-c_11*Nm+c_22*Np)*Nm-(c_11*Np-c_22*Nm)*Np
```

```
lambda=if fs1s3<0 then abs(fs1s3/mig)else 0
s_1n=s_1-lambda*(c_11*Np-c_22*Nm)
s_3n=s_3-lambda*(-c_11*Nm+c_22*Np)
p_2=(s_1n+s_3n)/2
t_2=((s_3n-s_1n)/2)
txy=s_alfax*t_2
sy=p_2+c_alfay*t_2
sx=p_2+c_alfax*t_2
EQUATIONS
u: dx( sx) + dy( txy)=0
v: dx( txy) + dy( sy)=0
(...)
```

Kolejnym krokiem pozwalającym w przypadku prawa stowarzyszonego powiększyć zakres stosowania rozwiązań jest wprowadzenie warunku plastyczności z ograniczeniem naprężeń rozciągających oraz rozciągania. Jest to kolejny etap tworzenia skryptu obliczeniowego. Idee stosowania warunku ilustruje rysunek 3 oraz schemat blokowy dla czterosegmentowego obszaru ograniczającego.



Rys. 3. Powierzchnia plastyczności typu CM wielosegmentowa

Opisano powierzchnię za pomocą n segmentów, wartości parametrów spójności *coh* i kąta tarcia wewnętrznego ϕ zestawiono w postaci wektorowej, aktualną wartość wskazuje indeks $i = 1..n$. Wprowadzono oznaczenia, odpowiadające współczynnikom w równaniu

Coulomba–Mohra (2) dla przestrzeni naprężeń głównych, gdzie indeks i oznacza numer segmentu:

$$A_i = (1 - \sin \varphi_i)\ ,\ \ B_i = (1 + \sin \varphi_i),\quad C_i = 2coh_i \cos \varphi_i \tag{20}$$

$$F_i(\sigma_1, \sigma_3) = -\sigma_3 A_i + \sigma_1 B_i + C_i = 0 \Rightarrow \sigma_1 \subset < \sigma 1W_{i-1}, \sigma 1W_i) \tag{21}$$

Punkty wspólne wyznaczono za pomocą formuły (22), (23), odpowiadającym kolejnym segmentom składowych rozszerzonego warunku plastyczności:

$$\sigma 3W_i = \frac{B_{i+1}C_i - B_i C_{i+1}}{A_i B_{i+1} - B_i A_{i+1}} \tag{22}$$

$$\sigma 1W_i = \frac{A_{i+1}C_i - A_i C_{i+1}}{A_i B_{i+1} - B_i A_{i+1}} \tag{23}$$

Proste rozgraniczające obszar obowiązywania warunków plastyczności dla segmentów wyznaczono w zapisie parametrycznym (24), (25) względem t dla segmentów j:

$$\sigma_{3K}(t,i) = \sigma 3W_i + t \sin\left(\tfrac{1}{2}\left(a\,\mathrm{tg}\frac{B_i}{A_i} + a\,\mathrm{tg}\frac{B_{i+1}}{A_{i+1}} + \pi \right)\right) \tag{24}$$

oraz odpowiednio:

$$\sigma_{1K}(t,i) = \sigma 1W_i + t \cos\left(\tfrac{1}{2}\left(a\,\mathrm{tg}\frac{B_i}{A_i} + a\,\mathrm{tg}\frac{B_{i+1}}{A_{i+1}} + \pi \right)\right) \tag{25}$$

Wykorzystując własność powierzchni plastyczności i ortogonalnego do niej wektora plastycznego odkształcenia wprowadzono prosty sposób znajdowania segmentu odpowiadającego za wprowadzenie do kroku obliczeniowego poprawki na naprężeniach (powierzchnia jest niewklęsła, stąd $\dot{\lambda}$ zawsze musi być nieujemna): $\lambda_{\max} = \max(\dot{\lambda})$, procedura jest numerycznie bardzo sprawna, wymaga jednak obliczenia wartości $\dot{\lambda}$ dla wszystkich segmentów, na których przekroczony jest warunek plastyczności. Do obliczenia poprawki plastycznej na naprężeniach wybierany jest segment z $\lambda_{\max}$.

Mając zdefiniowane wszystkie potrzebne przekształcenia i wartości, prezentujemy kod dla powierzchni plastyczności wielosegmentowej w języku skryptowym FLAC-a. Analogicznie przedstawiać się będzie zapis kodu w skrypcie FlexPDE z modyfikacją spójności po wszystkich segmentach o wartość m_t oraz z zastosowaniem składni odpowiedniej dla tego programu.

```
;FISH Mohr-Coulomb model multi segment
def m_multi_mohr
constitutive_model
f_prop m_E m_ni m_fi(i) m_coh1(i) m_segm
float $K $G $c_11 $c_22 $c_12 (...)
    $K      = m_E/(3*(1-2*m_ni))
    $G      = m_E/(2*(1+m_ni))
    $c_11   = $K+4*m_G/3
    $c_22   = $K-2*m_G/3
 loop i(1,m_segm)
  $A(i)  =1-sin(m_fi(i)*degrad)
  $B(i)  =1+cos(m_fi(i)*degrad)
  $C(i)  =2*coh(i)*cos(m_fi(i)*degrad)
  endloop
s11=zs11+$c_11*zde11 + $c_22*zde22
s22=zs22+$c_22*zde11 + $c_11*zde22
s12=zs12+$c_12*zde12
$p_1     =($s11+$s22)/2
$a_x     =$s11-$p_1
$a_y     =s$22-$p_1
$t_1     =sqrt($s12^2+$a_x^2)
$s_1     =$p_1-$t_1
$s_3     =$p_1+$t_1
if $t_1=0 then $s_alfax=0 else $s_alfax=$s12/$t_1
zs11=$p_2+$c_alfax*$t_2
zs33=zs33+(zde11+zde22)*$c_22
if $t_1=0 then $c_alfax=1 else $c_alfax=$a_x/$t_1
if $t_1=0 then $c_alfay=1 else $c_alfay=$a_y/$t_1
loop i(1,m_segm)
 $F(i)=(s_1*$B(i)+$C(i))- $A(i)*s_3
 if  $F(i)<0  then  $lam(i)=-$F(i)  /  ((-$c_11*$A(i)+$c_22*$B(i))*$A(i)-
(c11*$B(i)-$c_22*$A(i))*$B(i)) else $lam(i)=0
endloop
licznik=1
$lambda=0
loop i(2,m_segm)
 if $lam(i)>$lam(i-1) then
  $lambda=$lam(i)
  licznik=i
 end_if
endloop
```

```
$s_1n=$s_1 - $lambda* ($c_11 * $B(licznik) - $c_22 * $A(licznik))
$s_3n=$s_3 - $lambda * (-$c_11* $A(licznik) + $c_22 * $B(licznik))
$p_2=($s_1n+$s_3n)/2
$t_2=(($s_3n-$s_1n)/2)
zs12=$s_alfax*$t_2
zs22=$p_2+$c_alfay*$t_2
zs11=$p_2+$c_alfax*$t_2
zs33=zs33+(zde11+zde22)*$c_22
end
opt m_multi_mohr
```

4. Wnioski

Próby dostosowania algorytmów programu FlexPDE do rozwiązania szerokiego spektrum zagadnień plastyczności nie są jeszcze zakończone całkowitym powodzeniem. Przedstawione powyżej procedury zapisane w skrypcie FLAC-a służą do kontroli rozwiązania uzyskanego w programie FlexPDE. Celem tego artykułu i dalszych prac jest rozszerzenie zagadnień plastyczności poprzez wprowadzenie dodatkowych pól oddziaływań fizycznych takich jak: transport masy, ciepła oraz zdefiniowanie powiązań między nimi zarówno jawnie na warunkach brzegowych, jak i za pomocą wzajemnych korelacji.

LITERATURA

[1] *Bednarski T.*: Mechanika plastycznego płynięcia w zarysie. Warszawa, PWN 1995

[2] *Ortigao J.A.R.*: Soil mechanics in the light of critical state theories. An introduction. A.A. Balkema, 1995

[3] FlexPDE Documentation Bundle Version 5.0.0 (5/17/05) and Fields of Physics by Finite Element Analysis An Introduction Updated to Version 5 (6/20/05) and FlexPDE Application Manual

[4] User Manual Flac — Theory and background Flac 2D v 5.00

[5] *Gryczmański M.*: Wprowadzenie do opisu sprężysto-plastycznych modeli gruntu. Warszawa, PAN, Studia z zakresu inżynierii, nr 40, 1995

[6] *Izbicki R.J., Mróz Z.*: Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał. Warszawa, PAN IPPT, PWN 1976

[7] *Zienkiewicz O.C.*: Metoda elementów skończonych. Warszawa, ARKADY 1972