

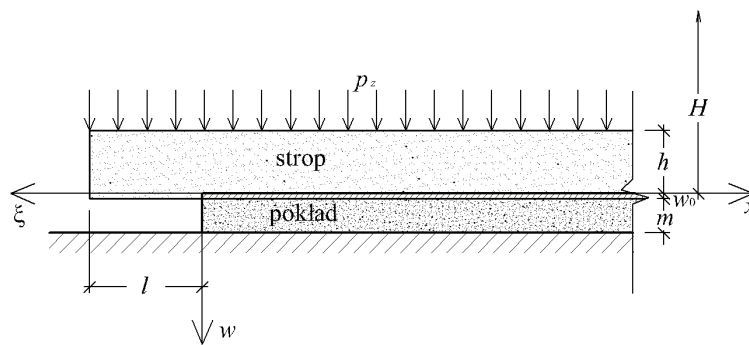
Marian Paluch*, Antoni Tajduś*

ANALIZA WYTRZYMAŁOŚCIOWA STROPU BĘDĄCEGO W KONTAKCIE DWUPARAMETROWYM Z POKŁADEM PRZY EKSPLOATACJI NA ZAWAŁ

1. Wstęp

Zajmować będziemy się analizą pasma płytowego stropu o grubości h [m] znajdującego się na głębokości H [m] i obciążonego ciśnieniem $p_z = \gamma H$ [N/m²].

Warstwa stropu spoczywa na pokładzie, który można przyjąć jako podłoże sprężyste. Strop nad zrobami stanowi wspornik o długości l m (rys. 1).



Rys. 1

Pomiędzy stropem a pokładem istnieje kontakt dwuparametrowy typu Wieghardta:

$$r(x, y) = c w(x, y) - c_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

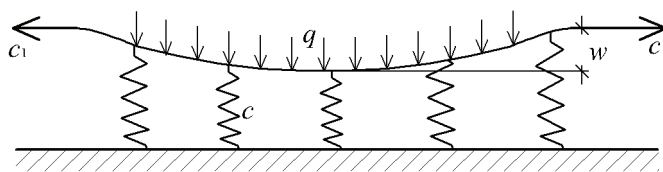
* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

gdzie:

- r — jest odporem podłoża $[\text{N}/\text{m}^2]$,
- c — współczynnik oporu właściwego pokładu $[\text{N}/\text{m}^3]$,
- w — ugięcie stropu $[\text{m}]$,
- c_1 — siła naciągu powłoki $[\text{N}/\text{m}]$.

W analizowanym modelu siła c_1 (rys. 2) wyraża się zależnością:

$$c_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q \quad (2)$$



Rys. 2

Zatem siła c_1 naciągu powłoki (membrany) jest proporcjonalna do obciążenia q i odwrotnie proporcjonalna do krzywizny:

$$K = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

Założenie bardzo długiego frontu ściany zezwala na przyjęcie walcowego zgięcia stropu:

$$w(x, y) = w(x)$$

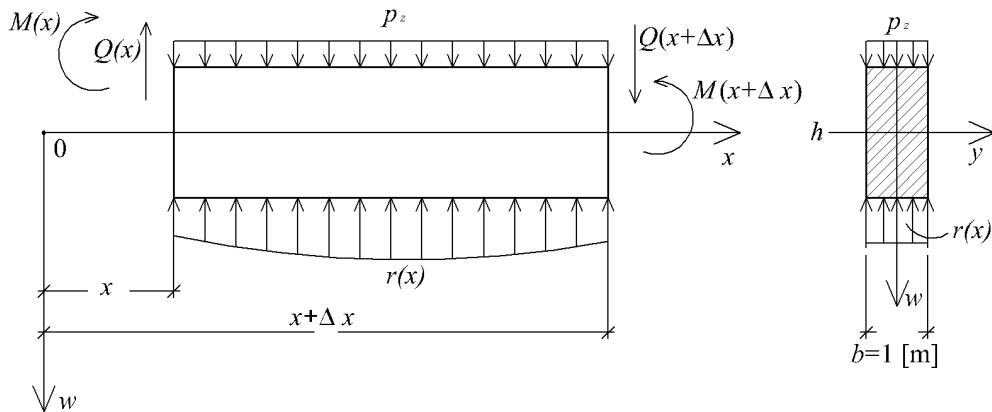
A więc możemy zamiast pasma płytowego rozważać belkę o wysokości h $[\text{m}]$, szerokości $b = 1$ m i module sprężystości podłużnej (Younga):

$$E = \frac{E'}{1 - \nu^2} \quad (4)$$

gdzie:

- E' — moduł sprężystości skały stropowej,
- ν — liczba Poissona.

Na belkę stropową (rys. 3) działają siły zewnętrzne, odpór podłoża i siły przekrojowe.



Rys. 3

2. Wyznaczenie ugięć punktów osi belki

Całkowite ugięcie $w(x)$ jest sumą przemieszczeń podchodzących od momentu zginającego $M(x)$ i siły tnącej $Q(x)$:

$$w(x) = w_M(x) + w_Q(x) \quad (5)$$

We wzorze (5):

$$\begin{cases} w_M''(x) = -\frac{M(x)}{EJ} \\ w_Q'(x) = \frac{k}{GF} Q(x) \end{cases} \quad (6)$$

gdzie:

$M(x)$ — moment zginający,

$Q(x)$ — siła tnąca,

E, G — moduły sprężystości odpowiednio Younga i Kirchhoffa,

k — stała zależna od kształtu przekroju poprzecznego belki, dla przekroju prostokątnego $k = 1, 2$,

F — pole przekroju poprzecznego belki

$$F = h \cdot b \text{ [m}^2\text{]}.$$

Różniczkując dwukrotnie zależność (6)₁ i jednokrotnie zależność (6)₂ względem zmiennej x otrzymamy dla obszaru kontaktu równania:

$$\begin{cases} w^{IV}(x) = \frac{b}{EJ}(p_z(x) - r(x)) \\ w''(x) = -\frac{kb}{GF}(p_z(x) - r(x)) \end{cases} \quad (7)$$

Jeżeli teraz równanie (7)₂ zróżniczkujemy dwukrotnie po zmiennej x i dodamy do równania (7)₁, to otrzymamy równanie różniczkowe czwartego rzędu niejednorodne na ugięcie całkowite $w(x)$:

$$\left(1 + \frac{c_1 kb}{GF}\right) w^{IV}(x) - \left(\frac{bc_1}{EJ} + \frac{ckb}{GF}\right) w''(x) + \frac{bc}{EJ} w(x) = \frac{b}{EJ} p_z - \frac{kb}{GF} p_z'' \quad (8)$$

Ponieważ $p_z = \text{const}$, to $p_z'' = 0$.

Równanie charakterystyczne dla równania jednorodnego:

$$\left(1 + \frac{c_1 kb}{GF}\right) w^{IV}(x) - \left(\frac{bc_1}{EJ} + \frac{ckb}{GF}\right) w''(x) + \frac{bc}{EJ} w(x) = 0 \quad (9)$$

jest równaniem algebraicznym dwukwadratowym:

$$r^4 - 2 \frac{b(c_1 GF + ckEJ)}{2EJ(GF + bc_1 k)} r^2 + \frac{bcGF}{EJ(GF + bc_1 k)} = 0 \quad (10)$$

Wprowadzając w (10) oznaczenia:

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{b(c_1 GF + ckEJ)}{2EJ(GF + bc_1 k)} > 0, \quad \alpha \left[\frac{1}{m} \right] \\ \beta = \sqrt[4]{\frac{bcGF}{EJ(GF + bc_1 k)}} > 0, \quad \beta \left[\frac{1}{m} \right] \\ \psi = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{b(c_1 GF + ckEJ)}{2\sqrt{bcGF EJ(GF + bc_1 k)}} > 0 \end{cases} \quad (11)$$

wyznamy pierwiastki r_1, r_2, r_3, r_4 równania (10).

I tak dla:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \psi > 1$$

$$\begin{cases} r_{1,2} = \pm\beta\sqrt{\psi - \sqrt{\psi^2 - 1}} \\ r_{3,4} = \pm\beta\sqrt{\psi + \sqrt{\psi^2 - 1}} \end{cases} \quad (12)$$

Gdy:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \psi = 1$$

to:

$$\begin{cases} r_1 = r_3 = \beta \\ r_2 = r_4 = -\beta \end{cases} \quad (13)$$

Jeżeli:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \psi < 1$$

to:

$$\begin{cases} r_1 = e^{\lambda x} \cos(\gamma x), & r_2 = e^{-\lambda x} \cos(\gamma x) \\ r_3 = e^{\lambda x} \sin(\gamma x), & r_4 = e^{-\lambda x} \sin(\gamma x) \end{cases} \quad (14)$$

gdzie:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \psi}, & \lambda \left[\frac{1}{m} \right] \\ \gamma = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \psi}, & \lambda \left[\frac{1}{m} \right] \end{cases} \quad (15)$$

Wykorzystując twierdzenie Zaremby o całce ogólnej równania niejednorodnego:

$$C.O.R.N. = C.O.R.J. + C.S.R.N. \quad (16)$$

wyznaczymy całkę szczególną $C.S.R.N.$ równania (8):

$$w_s(x) = \frac{P_z}{c} \quad (17)$$

Zatem:

$$w(x) = \frac{p_z}{c} + A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x} + A_3 e^{r_3 x} + A_4 e^{r_4 x} \quad (18)$$

Ponieważ dla $x \rightarrow \infty$, $w(\infty) = \frac{p_z}{c}$ to $A_1 = A_3 = 0$.

Stałe A_2 i A_4 wyznaczamy z warunków dla $x = 0$ (rys. 1):

$$\begin{cases} EJw''(x=0) = -M(x=0) = \frac{bp_z l^2}{2} \\ EJw'''(x=0) = -Q(x=0) = bp_z l \end{cases} \quad (19)$$

Poniżej zestawiamy wyprowadzone rozwiązania na ugięcia $w(x)$, odpór podłoża $r(x) = cw(x) - c_1 w'(x)$, moment zginający $M(x)$ i siłę tnącą $Q(x)$:

— $\boxed{\Psi > 1}$

$$\begin{cases} w(x) = \frac{p_z}{c} + \frac{p_z lb}{2EJ(r_4 - r_2)} \left(\frac{lr_4 - 2}{r_2^2} e^{r_2 x} + \frac{2 - lr_2}{r_4^2} e^{r_4 x} \right) \\ r(x) = p_z + \frac{p_z lb}{2EJ(r_4 - r_2)} \left[\frac{(lr_4 - 2)(c - c_1 r_2^2)}{r_2^2} e^{r_2 x} - \frac{(lr_2 - 2)(c - c_1 r_4^2)}{r_4^2} e^{r_4 x} \right] \\ M(x) = -\frac{p_z lb}{2(r_4 - r_2)} \left[(lr_4 - 2)e^{r_2 x} - (lr_2 - 2)e^{r_4 x} \right] \\ Q(x) = -\frac{p_z lb}{2(r_4 - r_2)} \left[r_2(lr_4 - 2)e^{r_2 x} - r_4(lr_2 - 2)e^{r_4 x} \right] \end{cases} \quad (20)$$

— $\boxed{\Psi = 1}$

$$\begin{cases} w(x) = \frac{p_z}{c} + \frac{p_z lb}{2EJ\beta^3} [3\beta + 4 + (2 + l\beta)\beta^{-1} x] e^{-\beta x} \\ r(x) = p_z + \frac{p_z lb}{2EJ\beta^3} [4c + l\beta(3c - \beta^2 c_1) + (2 + l\beta)(c - \beta^2 c_1)\beta^{-1} x] e^{-\beta x} \\ M(x) = -\frac{p_z lb}{2} [l + (2 + l\beta)x] e^{-\beta x} \\ Q(x) = -\frac{p_z lb}{2} [2 - (2 + l\beta)\beta^{-1} x] e^{-\beta x} \end{cases} \quad (21)$$

— $0 < \psi < 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x) = \frac{p_z}{c} + \frac{p_z l b}{2EJ\gamma(\lambda^2 + \gamma^2)^2} \left[\gamma(4\lambda + l(3\lambda^2 - \gamma^2))\cos(\gamma x) + \right. \\ \left. + (2(\lambda^2 - \gamma^2) + \lambda l(\lambda^2 - 3\gamma^2))\sin(\gamma x) \right] e^{-\lambda x} \\ r(x) = p_z + \frac{p_z l b}{2EJ(\lambda^2 + \gamma^2)^2} \left[\gamma(4c\lambda + lc(3\lambda^2 - \gamma^2) - lc_1(\lambda^2 - \gamma^2)^2)\cos(\gamma x) + \right. \\ \left. + (2c(\lambda^2 - \gamma^2) - 2c_1(\lambda^2 + \gamma^2)^2 + \lambda lc(\lambda^2 - 3\gamma^2) - \right. \\ \left. - \lambda lc_1(\lambda^2 + \gamma^2)^2)\sin(\gamma x) \right] e^{-\lambda x} \\ M(x) = -\frac{p_z l b}{2} \left[l\cos(\gamma x) + \frac{2 + l\lambda}{\gamma}\sin(\gamma x) \right] e^{-\lambda x} \\ Q(x) = -\frac{p_z l b}{2} \left[2\cos(\gamma x) - \frac{1}{\gamma}(2\lambda + l(\lambda^2 + \gamma^2))\sin(\gamma x) \right] e^{-\lambda x} \end{array} \right. \quad (22)$$

3. Energia sprężysta belki wspornikowej

Dla belki wspornikowej o długości l m (rys. 1) wyznaczamy:

— energię sprężystą W :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2EJ} \left[\int_0^l M^2(\xi) d\xi + \frac{k(1+\nu)}{6} \int_0^l Q^2(\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{p_z^2 b^2 l^3}{360EJ} [9l^2 + 12(1+\nu)h^2] \end{aligned} \quad (23)$$

— energię zmiany objętości:

$$W_\nu = \frac{1-2\nu}{6EJ} \int_0^l M^2(\xi) d\xi = \frac{1-2\nu}{120EJ} p_z^2 b^2 l^3 \quad (24)$$

— energię zmiany postaci:

$$W_f = W - W_\nu = \frac{1+\nu}{60EJ} (l^2 + 2h^2) p_z^2 b^2 l^3 \quad (25)$$

4. Wyznaczenie długości granicznej wspornika

Długość graniczną wspornika obliczono z dwóch warunków wytrzymałościowych i dwóch hipotez wyężeniowych, tj.: Rankine'a-Clebscha oraz Burzyńskiego.

$$1) \quad \sigma_{\max} = \frac{6M_{\max}}{bh^2} \leq R_g \Rightarrow l_{\sigma} \leq \sqrt{\frac{R_g}{3p_z}} h \quad (26)$$

$$2) \quad \tau_{\max} = \frac{3Q_{\max}}{2bh} \leq R_c \Rightarrow l_{\tau} \leq \frac{2R_c}{3p_z} h \quad (27)$$

$$3) \quad \sigma_0^{R-C} = \frac{|\sigma|}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R_k \Rightarrow l_{R-C} \leq \frac{2R_k}{\sqrt{3p_z(4R_k + 3p_z)}} h \quad (28)$$

$$4) \quad \kappa = \frac{R_c}{R_k}, \quad \sigma_0^B = \frac{\kappa+1}{2\kappa} \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} + \frac{\kappa-1}{2} \sigma \leq R_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_B \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{6p_z(1+\kappa^2)(1+2\kappa-\kappa^2)} \left[\frac{-(9(1+\kappa)^2 p_z + 16\kappa^2(\kappa-1)R_k) + \sqrt{(9(1+\kappa)^2 p_z + 16\kappa^2(\kappa-1)R_k)^2 + 256\kappa^2(1+\kappa^2)(1+2\kappa-\kappa^2)R_k^2}}{2} \right]} \cdot h \quad (29)$$

$$l_{gr} = \min(l_{\sigma}, l_{\tau}, l_{R-C}, l_B) \quad (30)$$

5. Przykład obliczeniowy

Na podstawie wyprowadzonych wzorów podajemy wyznaczoną długość krytyczną (l_{kr}), energię sprężystą (W) i jej rozkład na części (W_v) i (W_f) oraz w formie wykresów przemieszczenia $w(x)$, odpór podłoża $r(x)$, momenty zginające $M(x)$ i siły tnące $Q(x)$ (rys. 4), dla następujących danych:

- eksploatacja na zawał pokładu węgla o grubości $m = 2,5$ m,
- moduł $E' = 3$ GPa,
- współczynnik oporu właściwego

$$c = \frac{E'}{m} = 1,2 \text{ GPa/m,}$$

— strop jest z łupku piaszczystego:

$$h = 12 \text{ m,}$$

$$\nu = 0,3,$$

$$E = \frac{E'}{1 - \nu^2} = 7 \text{ GPa,}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 2,7 \text{ GPa,}$$

— na głębokości $H = 500 \text{ m}$ ciśnienie pionowe $p_z = 13 \text{ MPa}$,

— długość wspornika $l \leq l_{gr} [m]$,

— siła naciągu $c_1 = 20 \text{ GPa} \cdot \text{m}$,

— wytrzymałość obliczeniowa na rozciąganie przy zginaniu $R_g = R_r = R_k = 16 \text{ MPa}$,

— wytrzymałość obliczeniowa na ściskanie przy zginaniu $R_c = 80 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie:

$$l_\sigma = 7,686 \text{ m,}$$

$$l_\tau = 73,846 \text{ m,}$$

$$l_{R-C} = 6,058 \text{ m,}$$

$$l_B = 4,015 \text{ m,}$$

$$l = \min(l_\sigma, l_\tau, l_{R-C}, l_B) = 4,015 \text{ m.}$$

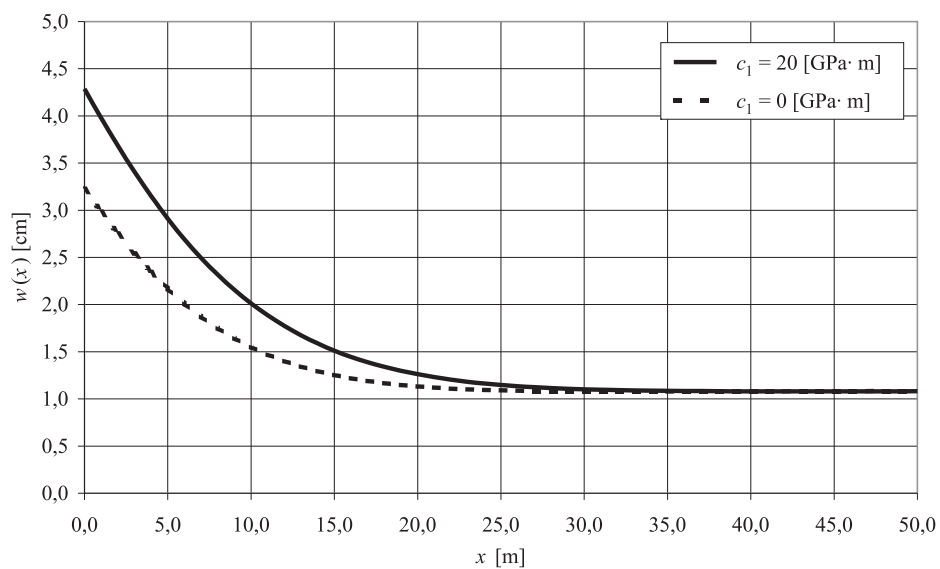
Do dalszych obliczeń przyjęto $l = 4 \text{ m}$

$$W = 71,248 \text{ kN} \cdot \text{m,}$$

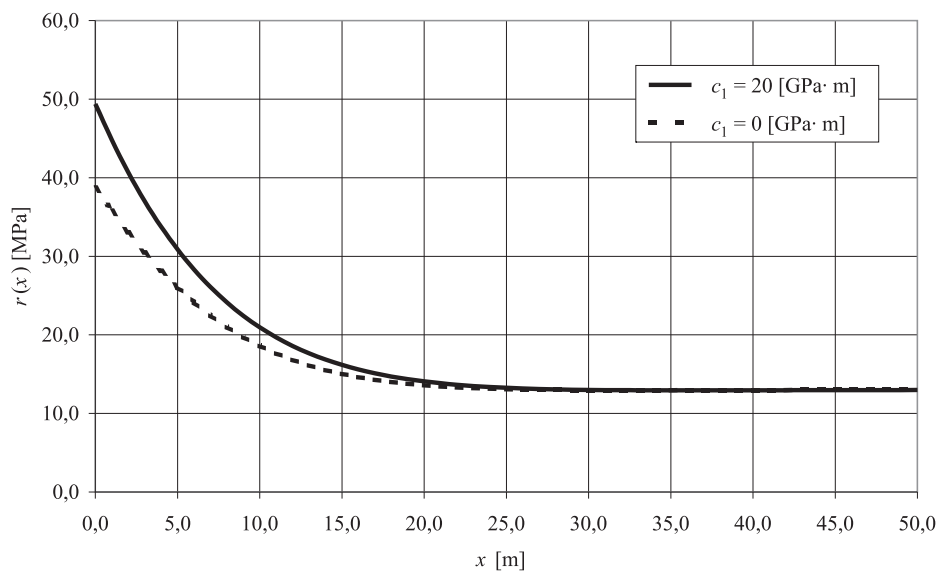
$$W_v = 0,572 \text{ kN} \cdot \text{m,}$$

$$W_f = 70,676 \text{ kN} \cdot \text{m.}$$

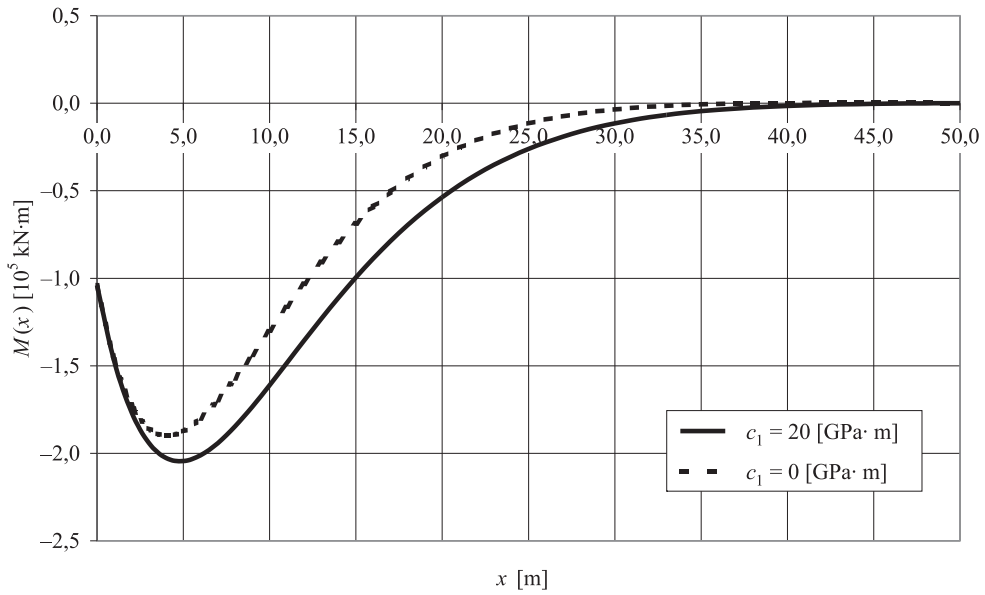
Na rysunkach 4–7 pokazano przebieg zmienności funkcji $w(x)$, $r(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ dla podłoża dwuparametrowego — linia ciągła, zaś jednoparametrowego — linia przerywana, a ich wartości podaje tabela 1.



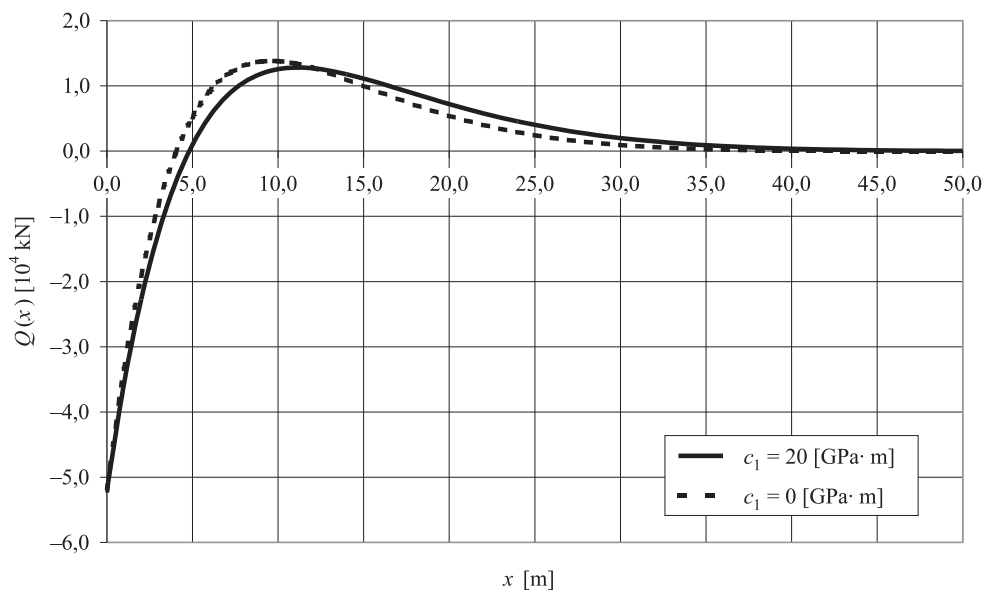
Rys. 4. Ugięcie



Rys. 5. Odpór podłoża



Rys. 6. Moment zginający



Rys. 7. Siła tnąca

TABELA 1

Wartości rzędnych do przykładu obliczeniowego

	$c_1 = 20$	$c_1 = 0$	$c_1 = 20$	$c_1 = 0$	$c_1 = 20$	$c_1 = 0$	$c_1 = 20$	$c_1 = 0$
x [m]	$w(x)$ [cm]	$w(x)$ [cm]	$r(x)$ [MPa]	$r(x)$ [MPa]	$M(x)$ [10^5 kNm]	$M(x)$ [10^5 kNm]	$Q(x)$ [10^4 kN]	$Q(x)$ [10^4 kN]
0	4,288	3,227	49,396	38,725	-1,040	-1,040	-5,200	-5,200
1	3,979	2,983	44,822	35,794	-1,475	-1,463	-3,567	-3,338
2	3,684	2,753	40,712	33,035	-1,765	-1,722	-2,276	-1,912
3	3,407	2,540	37,038	30,480	-1,940	-1,857	-1,267	-0,837
4	3,149	2,345	33,770	28,144	-2,026	-1,899	-0,489	-0,045
5	2,911	2,170	30,878	26,035	-2,044	-1,874	0,098	0,521
6	2,693	2,012	28,329	24,148	-2,011	-1,801	0,532	0,911
7	2,495	1,873	26,093	22,474	-1,942	-1,696	0,842	1,162
8	2,317	1,750	24,139	21,003	-1,846	-1,572	1,052	1,308
9	2,157	1,643	22,438	19,719	-1,734	-1,437	1,185	1,374
10	2,013	1,550	20,963	18,605	-1,611	-1,299	1,256	1,380
11	1,886	1,471	19,690	17,647	-1,484	-1,162	1,281	1,345
12	1,774	1,402	18,595	16,826	-1,356	-1,031	1,271	1,280
13	1,675	1,344	17,656	16,129	-1,231	-0,907	1,234	1,197
14	1,588	1,295	16,854	15,540	-1,110	-0,792	1,179	1,102
15	1,512	1,254	16,173	15,044	-0,995	-0,687	1,112	1,002
16	1,446	1,219	15,596	14,631	-0,888	-0,591	1,037	0,902
17	1,389	1,191	15,109	14,289	-0,788	-0,506	0,958	0,804
18	1,340	1,167	14,701	14,006	-0,696	-0,431	0,878	0,710
19	1,298	1,148	14,360	13,775	-0,613	-0,364	0,798	0,623
20	1,262	1,132	14,076	13,588	-0,537	-0,306	0,722	0,542
21	1,231	1,120	13,841	13,437	-0,468	-0,255	0,648	0,469
22	1,205	1,110	13,648	13,316	-0,407	-0,212	0,579	0,403
23	1,182	1,102	13,490	13,221	-0,352	-0,175	0,515	0,344
24	1,164	1,096	13,362	13,146	-0,304	-0,143	0,456	0,291
25	1,148	1,091	13,258	13,089	-0,261	-0,116	0,402	0,246
26	1,135	1,087	13,176	13,045	-0,223	-0,093	0,352	0,206

TABELA 1 cd.

27	1,124	1,084	13,111	13,012	-0,190	-0,075	0,308	0,171
28	1,115	1,082	13,060	12,989	-0,161	-0,059	0,268	0,142
29	1,108	1,081	13,021	12,972	-0,136	-0,046	0,232	0,116
30	1,102	1,080	12,992	12,961	-0,115	-0,036	0,200	0,095
31	1,097	1,080	12,970	12,955	-0,096	-0,027	0,172	0,077
32	1,093	1,079	12,955	12,951	-0,080	-0,020	0,148	0,062
33	1,090	1,079	12,944	12,950	-0,067	-0,015	0,126	0,049
34	1,087	1,079	12,938	12,951	-0,055	-0,010	0,107	0,039
35	1,085	1,079	12,934	12,953	-0,045	-0,007	0,091	0,030
36	1,084	1,080	12,933	12,956	-0,037	-0,004	0,076	0,023
37	1,083	1,080	12,934	12,959	-0,030	-0,002	0,064	0,017
38	1,082	1,080	12,936	12,962	-0,024	-0,001	0,054	0,013
39	1,081	1,081	12,939	12,966	-0,019	0,000	0,045	0,009
40	1,081	1,081	12,943	12,970	-0,015	0,001	0,037	0,006
41	1,081	1,081	12,947	12,973	-0,012	0,002	0,030	0,004
42	1,081	1,081	12,951	12,976	-0,009	0,002	0,025	0,002
43	1,081	1,082	12,955	12,979	-0,007	0,002	0,020	0,001
44	1,081	1,082	12,959	12,982	-0,005	0,002	0,016	0,000
45	1,081	1,082	12,963	12,985	-0,003	0,002	0,013	-0,001
46	1,081	1,082	12,967	12,987	-0,002	0,002	0,010	-0,001
47	1,081	1,082	12,970	12,989	-0,001	0,002	0,008	-0,001
48	1,081	1,083	12,974	12,990	-0,001	0,002	0,006	-0,002
49	1,081	1,083	12,977	12,992	0,000	0,002	0,005	-0,002
50	1,082	1,083	12,979	12,993	0,000	0,002	0,003	-0,002

6. Podsumowanie

Przytoczone w pracy rozwiązania pozwalają na podanie kilku uwag końcowych. Okazało się, że nieklasyczny problem belki spoczywającej na podłożu dwuparametrowym typu Wieghardta ma ściśle zamknięte rozwiązanie wyrażone w klasie funkcji elementarnych. Jak widać, ugięcie stropu jest większe dla podłoża dwuparametrowego, co wynika z krzywizny dla $x = 0$ m. Wiąże się to z większym odporem podłoża (por. rys. 5). Również moment zgi-

nający jest większy dla podłoża dwuparametrowego. Siła tnąca w przedziale od 0 do 12 m jest mniejsza niż w podłożu jednoparametrowym, zaś w przedziale $x > 12$ m jest większa. Przejście do podłoża Winklera jest natychmiastowe ($c_1 = 0$). Uwzględnienie wpływu sił tnących na ugięcie jest możliwe.

Praca może znaleźć zastosowanie w mechanice górotworu przy analizie naprężeń w filarach ochronnych i ociosach w sąsiedztwie frontu eksploatacji, a także w budownictwie przy analizie belek na terenach objętych wpływami szkód górniczych, przy wymiarowaniu łąw fundamentowych, nadproży itp.

LITERATURA

- [1] *Cala M., Flisiak J., Tajduś A.*: Mechanizm współpracy kotwi z górotworem o zróżnicowanej budowie. Kraków, Biblioteka Szkoły Eksploatacji Podziemnej. Seria z lampką górniczą, nr 8, 2001
- [2] *Derski W., Izbiński R., Kisiel I., Mróz Z.*: Mechanika skał i gruntów. Warszawa, PWN 1982
- [3] *Galczyński S.*: Podstawy budownictwa podziemnego. Oficyna Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej 2001
- [4] *Gryczmański M., Jurczyk P.*: Modele podłoża gruntowego. Inżynieria i Budownictwo, nr 2, 1995
- [5] *Korman S.*: Wartości współczynników sprężystości w górotworze. Archiwum Górniczo-Hutnicze, 1955
- [6] *Krzyś W., Życzkowski M.*: Sprężystość i plastyczność. Warszawa, PWN 1962
- [7] *Ozog T.*: Ugięcie stropu przy uwzględnieniu sił ścinających. Zeszyty Problemowe Górniczo-Hutnicze. PAN, vol. 3, nr 1
- [8] *Paluch M.*: Podstawy teorii sprężystości i plastyczności z przykładami. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej 2006
- [9] *Piechnik S.*: Mechanika techniczna ciała stałego. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej 2007
- [10] *Sałustowicz A.*: Zarys mechaniki górotworu. Katowice, Wyd. „Śląsk” 1968