

Włodzimierz Hałat\*

## ZASTOSOWANIE PROCEDUR OBLICZENIOWYCH DO ROZWIĄZYWANIA ZGINANYCH BELEK\*\*

---

### 1. Wprowadzenie

Aby można było skorzystać z programów systemów algebry komputerowej (w skrócie CAS), użytkownik musi tylko zdefiniować problemy w zrozumiałym formacie dla CAS, a wówczas komputer szybko wykona faktyczne obliczenia. Programy CAS są ogólnymi komputerowymi programami algebry, a nie gotowymi programami ukierunkowanymi na obliczenia związane na przykład z nauką o wytrzymałości materiałów, a w szczególności na rozwiązywanie zginanych belek. W konsekwencji, użytkownik — student nie tylko musi znać relacje zachodzące w rozwiązywanym problemie, ale jednocześnie musi poznać w odpowiednim zakresie CAS.

W zakresie obliczeń symbolicznych do światowej czołówki komercyjnych pakietów CAS, mających największe możliwości, zalicza się dwa programy: Mathematica i Maple. Dalsze rozważania zostaną przeprowadzone na przykładzie możliwości zastosowania programu Maple 8<sup>1)</sup>.

Równanie linii ugięcia ma postać:

$$y''(x) = \pm \frac{M_z(x)}{EJ_z} \quad (1)$$

Jednym ze sposobów rozwiązywania belek, rozwiązywania równania (1), jest metoda zaproponowana przez A. Clebscha<sup>2)</sup>.

---

\* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

\*\* Niniejszy artykuł oparty jest na badaniach statutowych AGH nr 11.11.100.588

1) Powstał on w 1981 na Uniwersytecie w Waterloo w Kanadzie, gdzie nadal jest rozwijany.

2) Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (ur. 19 stycznia 1832 w Królewcu, zm. 7 listopada 1872 w Getyndze) — niemiecki matematyk.

Podstawowym sensem stosowania tej metody jest odpowiednie zapisanie równania momentów  $M_z(x)$  w postaci jednej funkcji. Warunki, które muszą być spełnione, aby można było zastosować tę metodę, podano w przedmiotowej literaturze (m.in. w [1, 4, 8, 13, 15]). Metoda A. Clebscha, choć jest prostsza od innych metod, to przy większej liczbie przedziałów charakterystycznych obciążona jest długimi, żmudnymi i nudnym rachunkami.

Aby osiągnąć w CAS (nie tylko w Maple) to, co mamy w tradycyjnym zapisie za pomocą jednego równania, musimy włożyć znacznie więcej pracy — zapisać i wykonać więcej operacji symbolicznych (szczegółowo opisano to w pracy [5]).

Uproszczenie zapisu w CAS funkcji momentów oraz rozwiązanie równania (1) można uzyskać poprzez zastosowanie podejścia wynikającego z teorii dystrybucji [2, 4, 16, 17]. Wymaga ono jednak od użytkownika o wiele więcej informacji w zakresie zastosowania CAS (por. [5, 10–12, 14]). A przecież nie o to chodzi. Jednym z uproszczeń w korzystaniu z CAS może być stosowanie procedur obliczeniowych [10]. W procedurach będących samodzielnymi programami Maple'a są zakodowane odpowiednie operacje matematyczne.

W pracy podano 20 procedur upraszczających obliczenia związane z rozwiązywaniem belek. Wybór odpowiedniej procedury obliczeniowej uzależniony jest od schematu obciążenia działającego na belkę oraz od rozwiązywanej funkcji. Praktyczne sposoby zastosowania procedur zostały zobrazowane dwoma przykładami liczbowymi. W postaci arkuszy roboczych — worksheetów<sup>3)</sup>, w których zapisano rozwiązania. Otrzymane rozwiązania zilustrowane zostały wykresami opisującymi zginane belki.

Przedstawione w pracy procedury obliczeniowe są „gotowcami” ułatwiającymi i upraszczającymi korzystanie z rachunku dystrybucyjnego oraz z Maple'a.

## 2. Rachunek dystrybucyjny

Zapis funkcji momentów, wynikający z metody A. Clebscha, definiowanej przedziałami, w pełni uzasadnia wprowadzenie do rozwiązywanych belek rachunku dystrybucyjnego. Od lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku dzięki matematykom: Schwartzowi, Milusińskiemu, Königowi, Łojasiewiczowi powstała nowa gałąź matematyki zwana teorią dystrybucji [2, 9].

Teoria dystrybucji znalazła szerokie zastosowanie w naukach technicznych. Za jej pomocą można w sposób pełniejszy i poprawny z punktu widzenia matematycznego zapisać cały szereg zjawisk fizycznych, w tym również zjawisk związanych ze zginaniem belek. Należy zaznaczyć, że istnieje kilka podejść do teorii dystrybucji. Bazują one na różnych definicjach pojęcia dystrybucji [9].

Do rachunku dystrybucyjnego należy m.in. dystrybucja Heaviside'a oraz jej pochodne. Dystrybucja Heaviside'a zwana jest również w literaturze funkcją skoku jednostkowego i jest definiowana w różny sposób [2, 4, 16, 17].

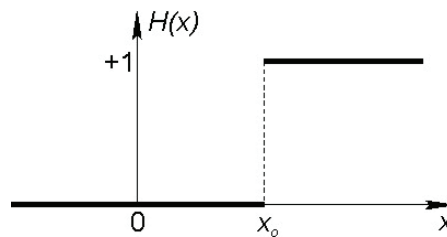
---

<sup>3)</sup> Tak nazywane są otwarte arkusze sesji Maple'a. Wiersze w arkuszu nie są numerowane.

Często możemy się spotkać z następującą jej definicją<sup>4)</sup>:

$$H(x-x_o) \stackrel{df}{=} \begin{cases} 0 & x < x_o \\ 1 & x \geq x_o \end{cases} \quad (2)$$

Wykres funkcji 2 przedstawiono na rysunku 1.



**Rys. 1.** Wykres funkcji Heaviside'a

Funkcja Heaviside'a definiowana jest również jako:

$$H(x-x_o) \stackrel{df}{=} \begin{cases} 0 & x < x_o \\ \frac{1}{2} & x = x_o \\ 1 & x > x_o \end{cases} \quad (3)$$

Natomiast funkcja Heaviside'a w Maple'u<sup>5)</sup> jest w postaci:

$$\text{Heaviside}(x-x_o) \stackrel{df}{=} \begin{cases} 0 & x < x_o \\ \text{undefined} & x = x_o \\ 1 & x > x_o \end{cases} \quad (4)$$

Zakładając, że sztywność zginania belki jest stała na całej jej długości (przypadki powszechnie spotykane w praktyce inżynierskiej) oraz korzystając z rachunku dystrybucyjnego (dystrybucja Heaviside'a), równanie różniczkowe linii ugięcia w Maple można przedstawić w postaci jednego równania.

Przykład takiego podejścia do rozwiązywanego problemu przedstawiono w pracy [5].

<sup>4)</sup> W programie Mathematica [3] funkcji Heaviside'a przypisana jest instrukcja UnitStep (funkcja skoku jednostkowego) zdefiniowana zależnością (2).

<sup>5)</sup> Copyright © 1992 by the University of Waterloo. All rights reserved. Została zdefiniowana ona na podstawie pracy Cohen C.-Tannoudji, Dieu B., Laloe F.: Quantum Mechanics, Appendix II, Hermann, Paris, 1977).

### 3. Procedury w Maple’u

Jedną z wielu zalet Maple’a jest możliwość definiowania dowolnych funkcji<sup>6)</sup>. Ogólniejszym i potężniejszym obiektem od funkcji jest procedura, która jest samodzielnym programem. Może ona zawierać wiele funkcji przypisania, wszelkiego rodzaju instrukcje warunkowe oraz różnorodne opcje odróżniające zmienne lokalne od zmiennych globalnych.

Deklaracja procedury w Maple’u jest następująca: `proc ( parametry formalne ) [local sekwencja zmiennych lokalnych;] [global sekwencja zmiennych globalnych;] [options sekwencja opcji;] [description napis;] treść procedury — zestaw instrukcji end; gdzie: blok nazw — to nazwy oddzielone przecinkami, zaś blok instrukcji — oznacza sekwencję instrukcji oddzielonych średnikami.`

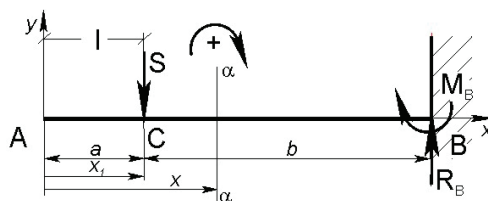
Części składowe procedury, takie jak: *local*, *global*, *options*, *description* są opcjonalne i mogą zostać pominięte. Podobnie jak funkcjom, procedurom można przypisywać nazwę. Należy jednak uściślić pojęcie procedura: procedury w Maple’a zwracają rezultat, więc tak naprawdę powinny się nazywać funkcjami [10].

Nazwa procedura pochodzi przypuszczalnie od słowa kluczowego *proc*, występującego w deklaracji procedury. Wynikiem działania procedury jest rezultat ostatniej operacji wykonanej w ciele procedury.

W celu uproszczenia zapisu równań stosowanych do rozwiązywania belek, w zależności od schematu obciążenia działającego na belkę, w języku symbolicznym Maple’a napisano 20 procedur zastawionych w tabeli 1.

Należy zaznaczyć, że dodatnim wartościom odpowiadają zwroty przedstawione na schematach obciążeń podanych w tabeli 1.

Na przykładzie siły skupionej działającej na belkę (rys. 2.) zostanie przedstawiony sposób poprawnego korzystania z procedur.

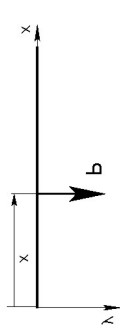
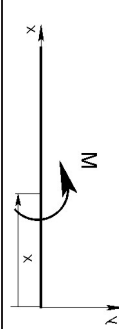
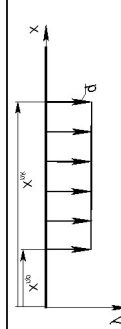
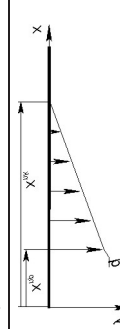
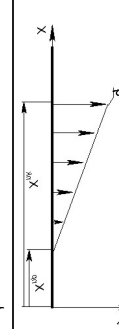


Rys. 2. Ilustracja do przykładu zastosowania procedur

Przyjmijmy, że na belkę działa siła  $S$  w odległości  $a$  od lewego końca belki (punkt  $A$ ). W punkcie  $A$  przyjmijmy początek układu współrzędnych. Odcięta końca pierwszego przedziału charakterystycznego oznaczmy jako  $x_1$ . Korzystając z procedur zapisanych w tabeli 1, moment zginający obliczamy wybierając odpowiednio: schemat obciążenia — pierwszy wiersz, druga kolumna, odpowiednią procedurę  $mHe\_P(x_1)$  — pierwszy wiersz, czwarta kolumna.

<sup>6)</sup> Funkcje w Maple’u mogą zostać zdefiniowane na trzy różne sposoby [11].

TABELA 1  
**Procedury obliczeniowe zastosowane w Maple'u do rozwiązywania belek**

| Schemat obciążenia  | Nazwy procedur zastosowanych do obliczeń: |                  |                 |                 |
|---|---|------------------|-----------------|-----------------|
|   | sił tnących                               | momentów gnących | kątów obrotu    | linii ugięcia   |
|    | tHe_P(xn)                                 | mHe_P(xn)        | kHe_P(xn)       | yHe_P(xn)       |
|    | tHe_M(xn)                                 | mHe_M(xn)        | kHe_M(xn)       | yHe_M(xn)       |
|    | tHe_q(xn)                                 | mHe_q(xn)        | kHe_q(xn)       | yHe_q(xn)       |
|   | tHe_q1(xnp,xnk)                           | mHe_q1(xnp,xnk)  | kHe_q1(xnp,xnk) | yHe_q1(xnp,xnk) |
|  | tHe_q1(xnp,xnk)                           | mHe_q1(xnp,xnk)  | kHe_q1(xnp,xnk) | yHe_q1(xnp,xnk) |

W przekroju  $\alpha - \alpha$  o odciętej  $x$  siła  $S$  powoduje ujemny moment zginający, a zatem z procedurą  $mHe\_P(xn)$  należy postąpić następująco: dopisać znak minus, pomnożyć przez  $S$  i zamiast  $xn$  wstawić  $x1$ .

W zapisie Maple'a zastosowana procedura przyjmie ostateczną postać:

>  $-S*mHe\_P(x1);$  # w wyniku otrzymujemy:

$$-S(x-x1)Heaviside(x-x1) \quad (5)$$

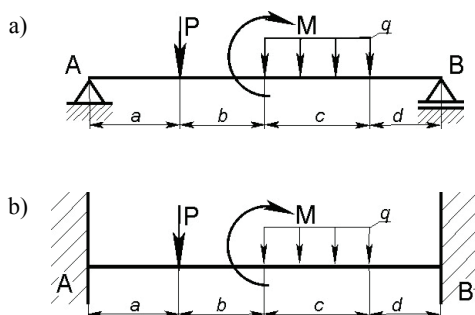
Jak widać z przedstawionego przykładu, stosowanie zaprojektowanych procedur obliczeniowych jest proste. Są one „gotowcami” ułatwiającymi i upraszczającymi korzystanie z Maple'a. Procedury w Maple'u pogrupowane i zapisane są w pakietach [10, 11]. Procedury podane w tabeli 1 zostały zapisane w pakiecie o nazwie Proc\_beam. Dostęp do procedur w pakiecie Proc\_beam oraz ich wykaz otrzymamy pisząc:

> with( Proc\_beam );

$$\begin{aligned} & [kHe\_M, kHe\_P, kHe\_q, kHe\_q1, kHe\_q2, \\ & mHe\_M, mHe\_P, mHe\_q, mHe\_q1, mHe\_q2, \\ & tHe\_M, tHe\_P, tHe\_q, tHe\_q1, tHe\_q2, \\ & yHe\_M, yHe\_P, yHe\_q, yHe\_q1, yHe\_q2] \end{aligned} \quad (6)$$

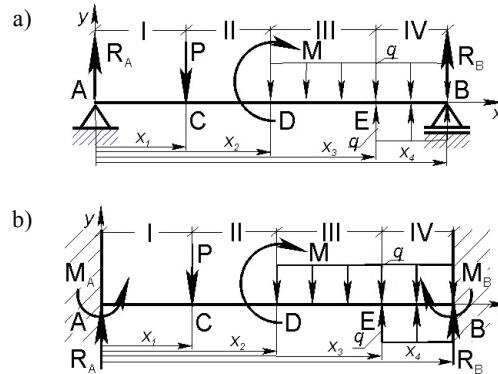
### 3.1. Przykłady zastosowania procedur do rozwiązywania zginanych belek

Praktyczne możliwości zastosowania procedur obliczeniowych do rozwiązywania belek zilustrowano dwoma przykładami belek pryzmatycznych przedstawionych na rysunku 3.



Rys. 3. Schematy statyczne belek

Schematy statyczne belek (rys. 3) uwzględniające warunki wynikające z zastosowania metody A. Clebscha przedstawia rysunek 4.



Rys. 4. Schematy statyczne belek uwzględniające warunki wynikające z metody A. Clebscha

W literaturze odnoszącej się do wytrzymałości materiałów panuje powszechne przekonanie, że początek układu współrzędnych musi zostać przyjęty na jednym z końców belki. W pracy [5] udowodniono, że przy wykorzystaniu procedur obliczeniowych tak wcale być nie musi.

#### WORKSHEET do przykładu I przedstawionego na rysunku 4a

Poniżej zapisano arkusz roboczy — worksheet rozwiązujący w Maple przykład belki statycznie wyznaczalnej przedstawionej na rysunku 4a<sup>7)</sup>.

```
> restart;
> libname := "C:\Program files\MAPLE 8\mylib\abc_beam", libname:# wczytanie
procedur
> with( Proc_beam ): # dołączenie do obliczeń pakietu zawierającego omawiane
procedury
> S_Mb:=Ra*x4-P*(x4-x1)+M-q*(x3-x2)*(x4-x3+(x3-x2)/2)=0: eqn1:=S_Mb:
> r1:=solve({eqn1},{Ra }):Ra; # wyznaczenie reakcji Ra
```

$$\frac{2qx^3x4 + 2Px4 - 2Px1 - 2M - qx^3^2 - 2qx2x4 + qx2^2}{2x4} \quad (7)$$

# zapisanie funkcji: sił tnących, momentów zginających, kątów obrotu przekrojów belki, linii ugięcia, w zapisie rachunku dystrybucyjnego z uwzględnieniem zastosowanych procedur

```
> t_sila:=x->RA*tHe_P(0)-P*tHe_P(x1)+M*tHe_M(x2)-q*tHe_q(x2)+q*tHe_q(x3):
> moment:=x->RA*mHe_P(0)-P*mHe_P(x1)+M*mHe_M(x2)-q*mHe_q(x2)+
q*mHe_q(x3):
```

<sup>7)</sup> Sposób obciążenia belki przyjęto w wyniku dyskusji z jednym z recenzentów pracy [7]. Przykład zaczerpnięto z pracy [16], gdzie zostało naszkicowane jego rozwiązanie.

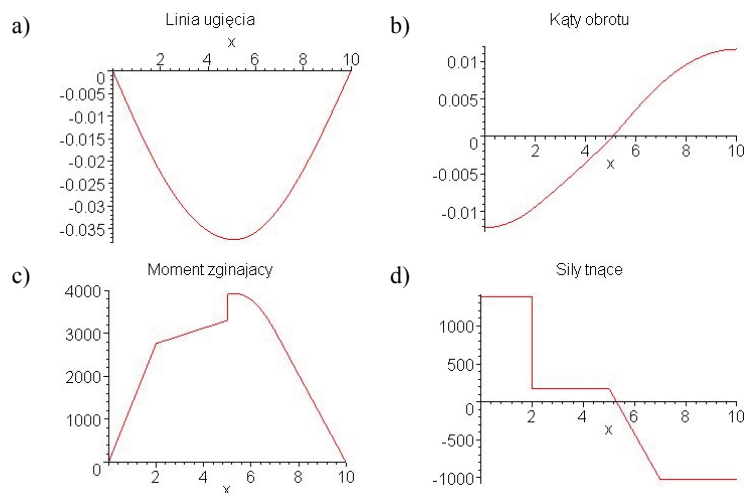
```

>theta:=x->1/EJ*(RA*kHe_P(0)-P*kHe_P(x1)+M*kHe_M(x2)-q*kHe_q(x2)
+q*kHe_q(x3)+_C1):
> y:=x->1/EJ*(RA*yHe_P(0)-P*yHe_P(x1)+M*yHe_M(x2)-q*yHe_q(x2)+
q*yHe_q(x3) + _C1*x + _C2): # należy pamiętać o dodaniu stałych całkowania
> eqn2:=subs(x=0,y(x))=0: eqn3:=subs(x=x4,y(x))=0: # kinematyczne warunki
brzegowe
> r2:=solve({eqn2,eqn3},{_C1,_C2}): # wyznaczenie warunków brzegowych
> P:=1200.:M:=600.:a:=2.:b:=3.:c:=2.:d:=3.:q:=600.:EJ:=10^6: # przykładowe dane
> x1:=a:x2:=a+b:x3:=a+b+c:x4:=a+b+c+d:
> y(x); # funkcja linii ugięcia w zapisie rachunku dystrybucyjnego

0.0002300000000x^3Heaviside(x)
- 0.0002000000000(x-2.)^3 Heaviside(x-2.)
- 0.0003000000000(x-5.)^2 Heaviside(x-5.)
- 0.00002500000000(x-5.)^4 Heaviside(x-5.)
+0.00002500000000(x-7.)^4 Heaviside(x-7.)-0.01215000000x

# komendy Maple'a rysujące obliczone funkcje (rys. 5):
> plot(y(x),x=0..x4,title='Linia ugięcia'); # wykres linii ugięcia
> plot(theta(x),x=0..x4,title='Kąty obrotu'); # wykres kątów obrotu przekrojów belki
> plot(moment(x),x=0..x4,title='Moment zginający'); #wykres momentów zginających
> plot(t_sila(x),x=0..x4,title='Siła tnąca'); # wykres sił tnących

```



Rys. 5. Wykresy: a) linii ugięcia, b) kątów obrotu, c) momentów zginających, d) sił tnących




```
> x_teta:=fsolve(theta(x)=0, x ): ymax:=eval(y(x),[x=x_teta]); # strzałka ugięcia
y max := -0.03741152571
```

(9)

```
> x_t:=fsolve({t_sila(x)},{x},{x=0..x4}):Mmax:=eval(moment(x),[x_t[1]]); #
maksymalny moment
```

```
M max := 3927.000000
```

(10)

 wyznaczenie wartości sił tnących na granicach przedziałów

```
> evalm(war_T); # wydrukowanie wartości sił tnących na granicach przedziałów
```

$$\begin{bmatrix} 1380. & 1380. \\ 180. & 180. \\ 180. & -1020. \\ -1020 & -1020. \end{bmatrix}$$

(11)

Możliwości zastosowania abstrakcyjnego operatora  $D$  do rozwiązywania belek jedno-przęsłowych i zarazem jednoprzęsłowych przedstawiono w pracy [7].

### WORKSHEET do przykładu II przedstawionego na rysunku 4b

Poniżej w arkuszu roboczym — worksheet — zapisano niezbędne instrukcje (komentary) Maple'a potrzebne do rozwiązywania belki statycznie niewyznaczalnej (rys. 4b).

```
> restart;
> libname := "C:\Program files\MAPLE 8\mylib\abc_beam", libname:# wczytanie
procedur
> with( Proc_beam ): # dołączenie do obliczeń pakietu zawierającego omawiane
procedury
```

# zapisanie funkcji: kątów obrotu przekrojów belki i linii ugięcia, w zapisie rachunku dystrybucyjnego z uwzględnieniem zastosowanych procedur

```
>theta:=(x)->1/EJ*(-MA*kHe_M(0)+RA*kHe_P(0)-P*kHe_P(x1)+M*kHe_M(x2)-
q*kHe_q(x2)+ q*kHe_q(x3) +_C1):
>y:=(x)->1/EJ*(-MA*yHe_M(0)+RA*yHe_P(0)-P*yHe_P(x1)+M*yHe_M(x2)-
q*yHe_q(x2)+ q*yHe_q(x3) +_C1*x+_C2):
```

# warunki brzegowe

```
> eqn1:=subs(x=0,theta(x))=0:eqn2:=subs(x=x4,theta(x))=0:
> eqn3:=subs(x=0,y(x))=0:eqn4:=subs(x=x4,y(x))=0:
```

> r1:=solve({eqn1,eqn2,eqn3,eqn4},{RA,MA,\_C1,\_C2}):# rozwiązanie układu równań  
 > RA;# przykładowy zapis funkcji reakcji RA w notacji rachunku dystrybucyjnego

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-4Px^3 \text{ Heaviside}(-x1) + 2P \text{ Heaviside}(x4 - x1)x4^3 \\ & + 4P \text{ Heaviside}(x4 - x1)x1^3 - 6P \text{ Heaviside}(x4 - x1)x4x1^2 \\ & - 12M \text{ Heaviside}(x4 - x2)x4x2 - 2q \text{ Heaviside}(x4 - x2)x4^3x2 \\ & + 2q \text{ Heaviside}(x4 - x2)x4x2^3 + 12M \text{ Heaviside}(x4 - x2)x2^2 \\ & + q \text{ Heaviside}(x4 - x2)x4^4 - q \text{ Heaviside}(x4 - x2)x2^4 \\ & - q \text{ Heaviside}(x4 - x3)x4^4 + q \text{ Heaviside}(x4 - x3)x3^4 \\ & + 2q \text{ Heaviside}(x4 - x3)x4^3x3 - 2q \text{ Heaviside}(x4 - x3)x4x3^3 \\ & + 6x4Px1^2 \text{ Heaviside}(-x1) - 12Mx2^2 \text{ Heaviside}(-x2) \\ & + qx2^4 \text{ Heaviside}(-x2) + 12x4Mx2 \text{ Heaviside}(-x2) \\ & - 2x4qx2^3 \text{ Heaviside}(-x2) + 2x4qx3^3 \text{ Heaviside}(-x3) \\ & - qx3^4 \text{ Heaviside}(-x3)) / (x4^3 \text{ Heaviside}(x4)) \end{aligned} \quad (12)$$

Korzystając z rachunku dystrybucyjnego powinniśmy się przyzwyczaić do innego „wyglądu” zapisywanych funkcji. W wyrażeniu (12) opisującym funkcję reakcji  $R_A$  jest ona zapisana za pomocą funkcji Heaviside’a występującej w siedmiu postaciach. Po wykonaniu odpowiednich przekształceń wyrażenie (12) upraszcza się do postaci:

$$\begin{aligned} & (-6Px4x1^2 + 2Px4^3 + 4Px1^3 - 12Mx4x2 - 2qx4^3x2 + 2qx4x2^3 \\ & + 12Mx2^2 - qx2^4 + 2qx4^3x3 - 2qx4x3^3 + qx3^4) / x4^3 \end{aligned} \quad (12a)$$

> P:=1200.:M:=600.:a:=2.:b:=3.:c:=2.:d:=3.:q:=600.:EJ:=10^6: # przykładowe dane  
 > x1:=a:x2:=a+b:x3:=a+b+c:x4:=a+b+c+d:  
 > eqn5:=-MA+RA\*x4-P\*(x4-x1)+M-q\*(x3-x2)\*(x4-x2-(x3-x2)/2)+MB=0:  
 > eqn6:=MB-RB\*x4+q\*(x3-x2)\*((x3-x2)/2+x2)+M+P\*x1-MA=0:  
 > r2:=solve({eqn5,eqn6},{RB,MB}):# obliczenie wartości reakcji  
 > y(x); # funkcja linii ugięcia w zapisie rachunku dystrybucyjnego

$$\begin{aligned} & 0.001265000000x^2 \text{ Heaviside}(x) + 0.0002350000000x^3 \text{ Heaviside}(x) \\ & - 0.0002000000000(x - 2.)^3 \text{ Heaviside}(x - 2.) \\ & - 0.0003000000000(x - 5.)^2 \text{ Heaviside}(x - 5.) \\ & - 0.00002500000000(x - 5.)^4 \text{ Heaviside}(x - 5.) \\ & + 0.00002500000000(x - 7.)^4 \text{ Heaviside}(x - 7.) \end{aligned} \quad (13)$$

```

>moment:=(x)->(-MA*mHe_M(0)+RA*mHe_P(0)-P*mHe_P(x1)+M*mHe_M(x2)-
q*mHe_q(x2)+q*mHe_q(x3)):
> t_sila:=(x)->(RA*tHe_P(0)-P*tHe_P(x1)+M*tHe_M(x2)-
q*tHe_q(x2)+q*tHe_q(x3)):

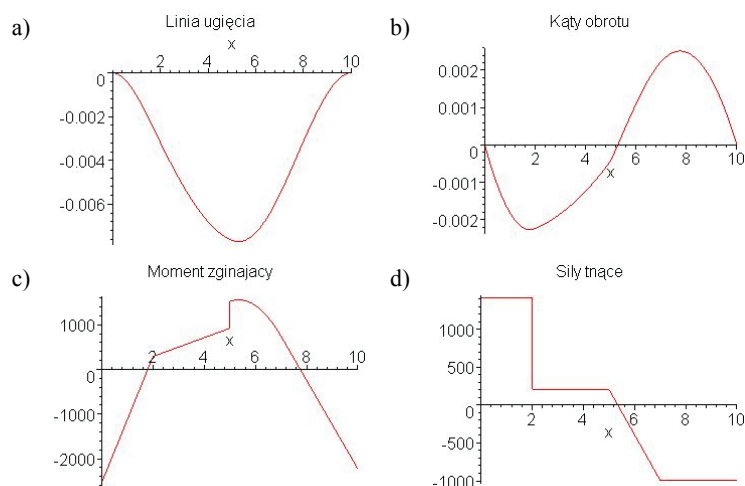
```

# komendy Maple'a rysujące obliczone funkcje (rys. 6):

```

> plot(y(x),x=0..x4,title=`Linia ugięcia`); # wykres linii ugięcia
> plot(theta(x),x=0..x4,title=`Kąty obrotu`); # wykres kątów obrotu przekrojów belki
> plot(moment(x),x=0..x4,title=`Moment zginający`); #wykres momentów zginających
> plot(t_sila(x),x=0..x4,title=`Siły tnące`); # wykres sił tnących

```



Rys. 6. Wykresy: a) linii ugięcia, b) kątów obrotu, c) momentów zginających, d) sił tnących

Z rozwiązania powyższego przykładu wynika, że proponowane procedury obliczeniowe można również bez problemu stosować do rozwiązywania belek statycznie niewyznaczalnych.

#### 4. Konkluzje

Studenci zwykle mierzą wagność danego przedmiotu ilością czasu poświęconego na ten przedmiot, biorąc pod uwagę ilość godzin wykładów i ćwiczeń oraz wyznaczone egzaminy. W nowych standardach kształcenia<sup>8)</sup> dla kierunku studiów Górnictwo i Geologia liczba godzin poświęconych mechanice i wytrzymałości materiałów jest ponad dwukrotnie

<sup>8)</sup> Opracowanie Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego dostępne w Internecie, 2007.

mniejsza niż to miało miejsce dotychczas. Czy zatem ważność tych przedmiotów obniżyła dwukrotnie swoją rangę? Zmniejszenie liczby godzin zajęć tworzy problem: „uczyć mniej, czy może uczyć szybciej, a może uczyć inaczej”. W mechanice, a przede wszystkim w wytrzymałości materiałów<sup>9)</sup>, zarówno na ćwiczeniach, jak i w pracach domowych znaczna część wysiłku skoncentrowana jest na obliczeniach algorytmicznych. Nie powinno zatem dziwić, że studenci postrzegają te przedmioty poprzez matematykę.

Przekazanie rutynowych obliczeń algorytmicznych komputerowi, za pomocą przedstawionych w pracy procedur obliczeniowych, opartych na rachunku dystrybucyjnym, może przynieść wiele korzyści. Najważniejszą z nich jest zyskanie czasu. Przy założeniu, że CAS eliminuje błędy rachunkowe, obliczenia mogą zostać postrzegane jako środek, a nie cel ostateczny.

Zrobić więcej, zrobić lepiej, zrobić szybciej i mieć pewność co do otrzymywanych wyników obliczeń — to cele każdego z użytkowników CAS. Maple i Mathematica to wyjątkowo potężne aplikacje o bogatych zestawach funkcji. Ich złożoność i wszechstronność często działa przeciwko osiągnięciu wymienionych celów. Jeśli jednak posiadziemy wiedzę zawartą w przedstawionych w pracy worksheetach, to będziemy mogli pracować sprawnie i efektywnie, co pozwoli nam kreatywnie wykorzystać Maple’a bez żmudnego odkrywania, jak uzyskać zamierzony efekt. W pracy [6] oraz w przedstawionych rozwiązaniach zawarto wiele praktycznych wskazówek, które będą cenne także przy rozwiązywaniu innych zadań. Należy nauczyć się panować nad możliwościami CAS, inaczej one zapanują nad nami, a wówczas frustracja zwycięży. Patrząc na zamieszczony w opracowaniu [5] worksheet, odnoszący się do zapisu tradycyjnego, nie korzystającego z rachunku dystrybucyjnego i proponowanych procedur obliczeniowych, można czuć się sfrustrowanym, że należało włożyć aż tyle pracy, aby osiągnąć rozwiązanie problemu.

Gdybym miał udzielić jednej krótkiej rady, jak szybko i praktycznie nauczyć się korzystać, Maple’a w zakresie rozwiązywania zginanych belek, to powiedziałbym, że należy dokładnie przestudiować zamieszczone w pracy worksheety — zapoznać się dokładnie z tymi funkcjami programu, które są niezbędne do rozwiązywania belek i pominąć całą resztę. Wyniki otrzymywane z Maple’a są teoretycznie i praktycznie bezbłędnie. Stworzone na potrzeby rozwiązywania belek procedury obliczeniowe zawierają różne operacje matematyczne, których wielokrotne wypisywanie byłoby uciążliwe i niewygodne. Wiemy, że wykonywanie rachunków za pomocą kalkulatorów staje się anachroniczne, może się okazać, że korzystanie z Maple’a oraz proponowanych procedur obliczeniowych wykonujących rutynowe obliczenia oznaczać będzie „uczyć inaczej”.

#### LITERATURA

- [1] Bodnar A.: Wytrzymałość materiałów. Kraków, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, 2003
- [2] Bronsztajn I.N., [et al.]: Nowoczesne kompendium matematyki. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004

---

<sup>9)</sup> W nowych standardach kształcenia połączono mechanikę z wytrzymałością materiałów w jeden przedmiot.

- [3] *Drwal G., [et al.]*: Mathematica 5, Gliwice, Wydawnictwo Pracowni komputerowej Jacka Skalmierskiego, 2004
- [4] *Gawęcki A.*: Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych. Tom 2, wyd. 3 zmienione i poprawione, Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej 1998
- [5] *Halat W.*: Zastosowanie komputerowego rachunku symbolicznego do zagadnień zginania belek. Badania statutowe — AGH 11.11.100.588), Kraków, 2007
- [6] *Halat W.*: Zastosowanie komputerowego rachunku symbolicznego do zagadnień zginania belek. Górnictwo i Geoinżynieria Kwartalnik AGH, r. 31, z. 3, 2007, 171–182
- [7] *Halat W.*: Rozwiązywanie belek z wykorzystaniem funkcji Heaviside'a i Diraca. Górnictwo i Geoinżynieria Kwartalnik AGH, r. 31, z. 3, 2007, 161–169
- [8] *Jakubowicz A., Orłoś Z.*: Wytrzymałość materiałów. Warszawa, WNT 1970
- [9] *Korpal E.*: Modelowanie dynamiczne w ujęciu teorii dystrybucji. Kraków, AKAPIT 1999
- [10] *Maple Advanced Programming Guide*. Waterloo Maple Inc. 2002
- [11] *Maple Learning Guide*. Waterloo Maple Inc. 2002
- [12] *Ombach J.*: Wykłady z równań różniczkowych: wspomagane komputerowo — Maple, Kraków, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego 1999
- [13] *Orłowski W., Słowański L.*: Wytrzymałość materiałów, przykłady obliczeń. Warszawa, Arkady 1963
- [14] *Palczewski A.*: Równania różniczkowe zwyczajne: teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych. Wyd. 2., Warszawa Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 2004
- [15] *Piechnik S.*: Wytrzymałość materiałów. Warszawa, PWN 1978
- [16] *Piechnik S.*: Mechanika techniczna ciała stałego. Kraków, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej 2007
- [17] *Skalmierski B.*: Mechanika, Podstawy mechaniki klasycznej. Częstochowa, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej 1998