

Henryk Gurgul\*, Robert Syrek\*\*

## Wykorzystanie kopul do konstrukcji portfeli inwestycyjnych

---

### 1. Wstęp

Podstawy analizy portfelowej sformułował w 1952 roku, późniejszy laureat Nagrody Nobla, Harry Markowitz [6], [7]. Jego głównym osiągnięciem było opracowanie teorii alokacji środków finansowych w warunkach niepewności. Teoria ta dotyczy optymalizacji inwestycji finansowych czyli maksymalizacji spodziewanego zysku i minimalizacji ryzyka. Teorię konstrukcji krzywych portfeli inwestycyjnych Markowitza uprościł i przystosował do praktycznych zastosowań jego uczeń – William Sharpe [13]. Badacz ten przedstawił w 1963 teorię modelu jednowskaźnikowego, nazywanego dziś modelem Sharpe’a. Za to osiągnięcie otrzymał Nagrodę Nobla.

Grupa metod analiz portfelowych jest zorientowana na zastosowania metod matematycznych. Wymaga ona zebrania dużej liczby danych nawet dla małej liczby papierów wartościowych w portfelu. Obecnie z pomocą inwestorom przychodzi technika komputerowa i liczne pakiety komputerowe ułatwiające obliczenia.

Inwestowanie w papiery wartościowe, potocznie zwane „grą na giełdzie”, jest specyficzną inwestycją. Niesie ona za sobą wysokie ryzyko, ale także niejednokrotnie wysokie zyski. Szereg teorii traktuje o inwestowaniu w akcje. Niestety, żadna z nich nie gwarantuje sukcesu, czyli osiągnięcia oczekiwanej przez inwestora stopy zwrotu z inwestycji. Różni inwestorzy będą preferowali różne metody gry na giełdzie. Przykładowo indywidualni inwestorzy preferujący grę spekulacyjną będą

---

\* Katedra Ekonomii i Ekonometrii, Wydział Zarządzania, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

\*\* Zakład Metod Ilościowych w Ekonomii, Wyższa Szkoła Ekonomii i Informatyki

opierali się głównie na analizie technicznej. Analiza fundamentalna stosowana jest przez inwestorów długoterminowych. Metody ekonometryczne, w tym m.in. metody portfelowe, stosują głównie duże instytucje finansowe: banki, fundusze inwestycyjne oraz fundusze emerytalne. Inwestując w akcje można także posługiwać się kombinacją wymienionych metod.

Inwestycja w akcje niesie ze sobą ryzyko. Papiery wartościowe o wysokiej stopie zwrotu charakteryzują się wysokim ryzykiem. Inwestor poszukuje takich możliwości lokowania kapitału, w których dla danego ryzyka można zmaksymalizować stopę zwrotu lub dla danej stopy zwrotu – można zminimalizować ryzyko. Możliwość zrealizowania tak sformułowanego celu zapewnia konstruowanie portfela papierów wartościowych, czyli optymalizowania inwestycji w zależności od spodziewanego zysku i ryzyka.

Wraz z rozwojem techniki komputerowej, poprawiła się znacznie jakość a przede wszystkim szybkość przeprowadzanych obliczeń. Z łatwością dokonuje się już, wykorzystując odpowiednie dane, estymacji parametrów modeli opisujących rynek kapitałowy. Badacze ciągle pracują nad nowymi modelami przede wszystkim dla najefektywniejszych portfeli papierów wartościowych. W latach 1964-1965, William Sharpe, John Lintner i Jan Mossin opracowali model wyceny dóbr kapitałowych CAPM (*ang. capital asset pricing model*). Model ten służył nie tylko wycenie papierów wartościowych, ale także ocenie efektywności zarządzania portfelem i analizie wielu innych działań uczestników rynku finansowego. Za jego zasadniczą wadę w chwili jego powstania uznano bardzo ograniczoną możliwość empirycznej weryfikacji. W 1984 roku powstał kolejny model, uwzględniający w dużo szerszym zakresie tę możliwość. Model ten powstał w ramach tzw. teorii arbitrażu cenowego APT (*ang. arbitrage pricing theory*). Obydwa te modele, mimo ich pewnych wad używane są także dzisiaj.

## 2. Analiza portfelowa metodą Markowitza

Rozważmy w pewnym okresie rynek składający się z określonej liczby walorów np.  $N$ . Jeśli obserwowana cena pewnego waloru wynosi  $X_t$ , to stopę zwrotu tego waloru definiujemy wzorem

$$r_{X,t} = (X_{t+1} - X_t) / X_t$$

lub w postaci ciągłej

$$r_{X,t} = \ln(X_{t+1} / X_t).$$

Problem tworzenia portfela polega na maksymalizacji stopy zwrotu względem danego poziomu ryzyka albo równoważnie na minimalizacji ryzyka przy zadanej

stopie zwrotu z portfela. Model budowy portfela Markowitza posługuje się odchyleniem standardowym jako miarą jego ryzyka. Poza tym stopy zwrotu różnych walorów mogą być parami skorelowane, czyli poruszają się w tym samym kierunku. Wykorzystując odchylenie standardowe i korelację walorów można znaleźć złożoną miarę ryzyka portfela. Niech będą dane ceny dwóch walorów  $X$  i  $Y$ , oraz założmy, że średnie stopy zwrotu walorów są dane przez średnie arytmetyczne stóp zwrotu.

$$r_X = 1/M \sum_{t=1}^M (X_{t+1} - X_t) / X_t \quad (1)$$

$$r_Y = 1/M \sum_{t=1}^M (Y_{t+1} - Y_t) / Y_t, \quad (2)$$

gdzie  $M$  jest liczbą obserwacji. Odchylenia standardowe i współczynnik korelacji stóp zwrotu walorów wyrażają się wzorami:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (r_{X,t} - \bar{r}_X)^2} \quad (3)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (r_{Y,t} - \bar{r}_Y)^2} \quad (4)$$

$$\rho_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^M (r_{X,t} - \bar{r}_X)(r_{Y,t} - \bar{r}_Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (5)$$

Portfelem nazywamy zbiór liczb  $w_1, w_2, \dots, w_n$  reprezentujący proporcje (lub wagi) każdego z walorów zakupionych przez inwestora. Zwykle te wagi są unormowane, tak, że ich suma wynosi 1.

Dla przypadku tylko dwóch walorów ich portfel składa się tylko z wag  $w_X$  i  $w_Y$ , a stopa zwrotu z portfela wynosi  $\bar{r}_X w_X + \bar{r}_Y w_Y$ . Wagi powinny zostać tak dobrane, aby ryzyko było minimalne to znaczy, aby zachodziło

$$\min \sqrt{\sigma_X^2 w_X^2 + \sigma_Y^2 w_Y^2 + 2\rho_{XY} w_X w_Y \sigma_X \sigma_Y}$$

dla stóp zwrotu przy warunku

$$w_X + w_Y = 1, w_X \geq 0, w_Y \geq 0.$$

Ostatnie dwa ograniczenia implikują, że walory nie mogą przyjmować krótkiej pozycji. Uogólnienie portfela o dwóch walorach na  $N$  walorów jest bardzo proste.

Okazuje się, że istnieje zawsze portfel z minimalnym odchyleniem standardowym, portfel o minimalnym ryzyku i portfel z minimalnym odchyleniem standardowym i maksymalną stopą zwrotu, który składa się tylko z jednego waloru – waloru o maksymalnej stopie zwrotu. Można wyznaczać portfele o minimalnym ryzyku dla większej liczby walorów. Jest to zagadnienie optymalizacji nieliniowej. Rozwiązanie tego problemu stanowi zbiór punktów, których współrzędne reprezentują stopy zwrotu i ryzyko. Zbiór ten jest nazywany efektywną granicą (*ang. efficient frontier*) Markowitza. Jeśli walor nienarażony na ryzyko o stopie zwrotu  $r_f$  jest włączony do portfela, to wyższa stopa zwrotu portfela przy mniejszym poziomie ryzyka może być niekiedy osiągnięta przez zainwestowanie części środków w portfel dobrany na bazie modelu Markowitza oraz przeznaczenie pozostałych środków na zakup waloru wolnego od ryzyka.

Podobnie, gdy inwestor może pożyczyć pieniądze na procent przy stopie procentowej  $r_b$ , optymalny portfel może być osiągnięty także w zbiorze efektywnym (*ang. efficient frontier*).

### 3. Elementy teorii kopul

W ostatnich latach obserwujemy ogromne zainteresowanie kopulami jako narzędziami modelowania zależności między zmiennymi. Kopule są dystrybuantami wielowymiarowych rozkładów zmiennych losowych, których rozkłady brzegowe mają rozkład jednostajny na odcinku  $[0,1]$ . Istotnym elementem jest, iż kopule są niezmiennicze względem ściśle rosnących i ciągłych przekształceń. Poniżej przedstawiamy formalną definicję:

$d$ -wymiarową kopulą nazywamy funkcję  $C: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$  posiadającą następujące własności:

1. Dla każdego  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d$ ,  $C(\mathbf{u}) = 0$  jeżeli chociaż jedna składowa  $\mathbf{u}$  jest równa 0 oraz  $C(\mathbf{u}) = u_k$ , jeżeli wszystkie składowe  $\mathbf{u}$  są równe 1 z wyjątkiem  $u_k$ ,
2. Dla każdych  $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0,1]^d$ , takich, że  $a_j \leq b_j$  zachodzi

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0,$$

gdzie:  $u_{j1} = a_j$  oraz  $u_{j2} = b_j$  dla każdego  $j \in \{1, \dots, d\}$ .

Najważniejszym osiągnięciem w teorii kopul jest poniższy wynik, którego autorem jest Sklar.

Niech  $F$  będzie  $d$ -wymiarową dystrybuantą z brzegami  $F_1, F_2, \dots, F_d$ . Wtedy istnieje  $d$ -wymiarowa kopula  $C$  taka, że dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F(x_1), \dots, F(x_d)).$$

Jeżeli wszystkie  $F_1, F_2, \dots, F_d$  są ciągłe, to  $C$  jest jednoznacznie określona, w przeciwnym razie  $C$  jest jednoznacznie określona na  $\text{Ran}F_1 \times \dots \times \text{Ran}F_d$  (przez  $\text{Ran}F_i$  oznaczamy przeciwdziedzinę funkcji  $F_i$ ). Odwrotnie, jeśli  $C$  jest  $d$ -wymiarową kopulą i  $F_1, F_2, \dots, F_d$  są dystrybuantami, to funkcja  $F$  zdefiniowana powyżej jest  $d$ -wymiarową dystrybuantą z brzegami  $F_1, F_2, \dots, F_d$ .

Z powyższego rezultatu Sklara wynika, że kopule łączą dystrybuanty wielowymiarowych rozkładów zmiennych losowych z ich dystrybuantami brzegowymi.

Poniżej przedstawiamy ważny wniosek z twierdzenia Sklara (poprzedzamy go definicją uogólnionej odwrotności).

Niech  $F$  będzie jednowymiarową dystrybuantą pewnej zmiennej losowej. Uogólnioną odwrotnością  $F$  nazywamy funkcję:

$$F^{-1}(t) = \inf\{x \in R : F(x) \geq t\}, \quad t \in [0, 1].$$

Założmy, że  $\inf \emptyset = -\infty$ .

Biorąc pod uwagę wynik Sklara dochodzi się do wniosku, że o ile  $F$  jest  $d$ -wymiarową dystrybuantą z brzegami  $F_1, F_2, \dots, F_d$  i kopulą  $C$ , to dla każdego  $\mathbf{u} \in [0, 1]^d$

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)).$$

W literaturze zdefiniowano wiele klas kopul. Do najważniejszych należą kopule eliptyczne, a wśród nich kopula oparta na rozkładzie  $t$ -Studenta, którą będziemy nazywali  $t$ -kopulą. Formalnie dla  $t$ -kopuli musi zachodzić równość

$$C_{R, \nu}^t(u_1, \dots, u_d) = t_{R, \nu}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_d)),$$

gdzie:  $t_{R, \nu}$  jest dystrybuantą  $d$ -wymiarowego rozkładu  $t$ -Studenta o macierzy korelacji  $\Sigma$  oraz  $\nu$  stopniach swobody, natomiast  $t_{\nu}$  są dystrybuantami jednowymiarowych rozkładów  $t$ -Studenta z  $\nu$  stopniami swobody.

W wielu pracach pokazano, że  $t$ -kopula doskonale nadaje się do modelowania zależności pomiędzy zmiennymi. Ogromną zaletą tej kopuli jest także łatwość generowania scenariuszy. Metoda symulacji przebiega w dwóch krokach:

1. Symulujemy  $X = (X_1, \dots, X_d) \sim t_{R, \nu}$ ,
2.  $U = (t_{\nu}(X_1), \dots, t_{\nu}(X_d)) \sim C_{R, \nu}^t$ .

## 4. Optymalizacja portfela

Istnieje wiele metod poszukiwania optymalnego portfela akcji, do klasyki należy omówiony wyżej model Markowitza, jednak założenia o normalności rozkładów stóp zwrotu leżące u podstaw tego modelu są nierealistyczne. W naszej pracy wykorzystamy metodologię zaprezentowaną w pracy opublikowanej przez Rockafellar, Uryasev [11]. Niech  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  oznacza stratę portfela, w którym przez  $\mathbf{x}$  oznaczymy wektor udziałów w tym portfelu, a przez  $\mathbf{y}$  wektor stóp zwrotu wchodzących w jego skład, który posiada funkcję gęstości  $p(\mathbf{y})$  (w rzeczywistości znajomość postaci analitycznej  $p(\mathbf{y})$  nie jest konieczna, wystarczy, że potrafimy generować wartości o rozkładzie  $p(\mathbf{y})$  metodą Monte Carlo). Prawdopodobieństwo tego, że  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  nie przekroczy pewnego ustalonego poziomu  $\alpha$  definiujemy jako

$$\Psi(\mathbf{x}, \alpha) = \int_{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \alpha} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Dla ustalonego  $\mathbf{x}$ ,  $\Psi(\mathbf{x}, \alpha)$  jest funkcją  $\alpha$  i jest dystrybuantą straty związaną z  $\mathbf{x}$ .

Dla uproszczenia zakładamy, że  $\Psi(\mathbf{x}, \alpha)$  jest funkcją ciągłą i nie ma skoków (ogólnie jest funkcją prawostronnie ciągłą i niemalejącą). Definiujemy VaR oraz ES na poziomie  $\beta$  jako

$$\alpha_\beta(\mathbf{x}) = \min\{\alpha \in R : \Psi(\mathbf{x}, \alpha) \geq \beta\}$$

$$\Phi_\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{1-\beta} \int_{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \alpha_\beta(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (6)$$

odpowiednio.

$\Phi_\beta(\mathbf{x})$  możemy także przedstawić w postaci

$$\Phi_\beta(\mathbf{x}) = \alpha_\beta(\mathbf{x}) + \frac{1}{1-\beta} \int_{\mathbf{y} \in R^N} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha_\beta(\mathbf{x})]^+ p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (7)$$

gdzie:  $[t]^+ = \begin{cases} t & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$

Optymalizacja portfela opiera się na liniowym przybliżeniu (7) o postaci:

$$F_\beta(\mathbf{x}, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_{\mathbf{y} \in R^N} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha]^+ p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (8)$$

Prawdziwe są poniższe stwierdzenia, stanowiące podstawę prezentowanej metody optymalizacji.

Można pokazać, że funkcja  $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$  jest wypukła i różniczkowalna względem  $\alpha$  oraz, że

$$\Phi_\beta(\mathbf{x}) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta(\mathbf{x}, \alpha). \quad (9)$$

Wartość  $\alpha$ , dla którego wyrażenie (8) osiąga minimum jest równa  $\alpha_\beta(\mathbf{x})$ .

Jeżeli zapiszemy zbiór  $q$  wygenerowanych scenariuszy z rozkładu (metodą Monte Carlo) jako wektory  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_q$ , wtedy (8) możemy zapisać jako

$$\tilde{F}_\beta(\mathbf{x}, \alpha) = \alpha + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{k=1}^q [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) - \alpha]^+.$$

Tak określona funkcja jest liniowa i wypukła względem  $\alpha$ . Jej minimalizacja polega na rozwiązaniu problemu programowania liniowego.

Określając funkcję straty jako  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ , funkcja, którą optymalizujemy daje się zapisać wzorem:

$$\tilde{F}_\beta(\mathbf{x}, \alpha) = \alpha + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{k=1}^q [-\mathbf{x}^T \mathbf{y}_k - \alpha]^+.$$

## 5. Konstrukcja i wyniki estymacji portfela optymalnego

Każdy z szeregów czasowych wchodzących w skład budowanego portfela składa się z 3001 obserwacji cen każdej ze spółek notowanych w DAX. Obejmuje okres notowań od 3 stycznia 1994 roku do 25 listopada 2005 roku. W tabeli 1 prezentujemy statystyki opisowe szeregów.

Każdy z szeregów logarytmicznych stóp zwrotu został opisany modelem ekonometrycznym. Wykorzystano modele klasy AR:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^R \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t.$$

Obserwacja funkcji autokorelacji oraz autokorelacji cząstkowej dla kwadratów reszt sygnalizowała występowanie heteroskedastyczności wariancji, co potwierdziły testy: Engla oraz Ljungu-Boxa (dla kwadratów reszt).

**Tabela 1**  
Statystyki opisowe szeregów czasowych

	<b>BMWG</b>	<b>CBKG</b>	<b>HNKG</b>	<b>RWEG</b>	<b>TUIG</b>
<b>średnia</b>	0,00041	0,00008	0,00031	0,00027	-0,00013
<b>odchyl. stand</b>	0,02154	0,02123	0,01803	0,01823	0,02184
<b>kurtoza</b>	6,12970	8,58526	6,32609	6,48302	8,79384
<b>skośność</b>	0,05285	0,15282	0,04361	0,25461	0,085794
<b>minimum</b>	-0,12067	-0,13298	-0,08176	-0,07735	-0,18449
<b>pierwszy kwartył</b>	-0,01014	-0,00995	-0,00862	-0,00902	-0,01074
<b>mediana</b>	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00052
<b>trzeci kwartył</b>	0,01100	0,00951	0,00909	0,00978	0,010201
<b>maksimum</b>	0,12835	0,15440	0,11999	0,11672	0,144599

W związku z tym wykorzystano model Glostena i in. [5] do opisu warunkowej wariancji:

$$-GJR\kappa(1,1): \sigma_t^2 = \kappa + G\sigma_{t-1}^2 + A\varepsilon_{t-1}^2 + LS_{t-1}^-\varepsilon_{t-1}^2,$$

gdzie:  $S_{t-1}^- = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{gdy } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \end{cases}$

oraz

$$\kappa > 0; \quad G, A \geq 0; \quad G + A + \frac{1}{2}L < 1; \quad A + L \geq 0.$$

W przypadku spółki RWEG modelem dla średniej była stała, a dla wariancji model GARCH(1,1), w pozostałych przypadkach model AR(1) wraz z GJR(1,1).

Tabela 2 zawiera szczegółowe informacje o parametrach modeli.

**Tabela 2**  
Modele szeregów czasowych logarytmicznych stóp zwrotu

	<b>BMWG</b>	<b>CBKG</b>	<b>HNKG</b>	<b>RWEG</b>	<b>TUIG</b>
$\hat{c}$	–	–	–	0.00050107	–
$\hat{\phi}$	0.040108	0.043645	-0.044333	–	0.040759
$\hat{\kappa}$	1.1697e-006	4.5198e-006	2.7361e-006	3.7958e-006	2.638e-006
$\hat{G}$	0.93636	0.89431	0.93272	0.9016	0.93262
$\hat{A}$	0.043498	0.079963	0.039422	0.09	0.050801
$\hat{L}$	0.040288	0.036268	0.044995	–	0.024483
<b>rozkład reszt</b>	$t$ -Studenta $\hat{v}=7.4069$	normalny	$t$ -Studenta $\hat{v}=5.5868$	$t$ -Studenta $\hat{v}=7.3129$	normalny



Zestandaryzowane reszty uzyskane z modeli szeregów czasowych modelujemy z wykorzystaniem uogólnionych rozkładów Pareto, które stosujemy do ogonów rozkładów.

Dla każdego  $i=1,\dots,d$  mamy

$$F_i(z) = \begin{cases} 0,05 \left( 1 + \xi_i^L \frac{|z - u_i^L|}{\beta_i^L} \right)^{-1/\xi_i^L} & z < u_i^L \\ \hat{F}_i & u_i^L \leq z < u_i^P, \\ 1 - 0,05 \left( 1 + \xi_i^P \frac{z - u_i^P}{\beta_i^P} \right)^{-1/\xi_i^P} & z \geq u_i^P \end{cases}$$

$\hat{F}_i$  oznacza dystrybuantę empiryczną, dla której stosujemy interpolację wielomianową, przy czym wymienione wyżej symbole oznaczają:

$u_i^L, u_i^P$  – kwantyle 5% i 95%,

$\xi_i^L, \xi_i^P$  – parametry kształtu,

$\beta_i^L, \beta_i^P$  – parametry skali.

Parametry powyższych rozkładów są przedstawione w tabeli 3.

Zależność między zestandaryzowanymi resztami modelujemy z wykorzystaniem  $t$ -kopuli. Parametry kopuli estymujemy z wykorzystaniem metody CML [8]. Podstawy tej wyjaśniamy w dalszej części naszego artykułu.

**Tabela 3**

Parametry rozkładów zestanadaryzowanych reszt

	<b>BMWG</b>	<b>CBKG</b>	<b>HNKG</b>	<b>RWEG</b>	<b>TUIG</b>
$\xi_i^L$	0,591015	0,445688	0,651175	0,513165	0,634893
$\beta_i^L$	-0,04542	0,268236	0,029684	0,058211	0,083944
$u_i^L$	-1,62997	-1,58328	-1,55429	-1,62163	-1,53632
$\xi_i^P$	0,489769	0,558327	0,597498	0,524373	0,49816
$\beta_i^P$	0,132809	0,122166	-0,03246	0,072129	0,015771
$u_i^P$	1,642986	1,582281	1,632356	1,628161	1,690526

W pierwszym kroku procedury CML dla każdej pary  $(z_i, z_j)$  obliczamy współczynniki korelacji Kendalla  $\hat{\tau}_{ij}$  ( $i, j=1, \dots, d$ ), a następnie wykorzystujemy związek

$$\hat{R}_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \hat{\tau}_{ij}\right).$$

Oryginalne dane  $(z_1^t, \dots, z_d^t)$  przekształcamy w pseudo-próbkę

$$(u_1^t, \dots, u_d^t) = (\hat{F}_1(z_1^t), \dots, \hat{F}_d(z_d^t)),$$

gdzie:  $\hat{F}_i$  są dystrybuantami empirycznymi oraz  $t=1, \dots, N$ .

Następnie stosujemy metodę największej wiarygodności ze względu na liczbę stopni swobody  $t$ -kopuli

$$\hat{v} = \arg \max_{v \in (2, \infty)} \sum_{t=1}^N \ln(c(u_1^t, \dots, u_d^t; v, \hat{R})),$$

gdzie:  $c(u_1, \dots, u_d; v, R)$  jest gęstością  $t$ -kopuli zdefiniowaną następująco:

$$c(u_1, \dots, u_d; v, R) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{d-1} \left(1 + \frac{y' R^{-1} y}{v}\right)^{-\frac{v+d}{2}}}{|R|^{1/2} \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)^d \prod_{j=1}^d \left(1 + \frac{y_j^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}},$$

gdzie:  $\mathbf{y} = (t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d))$ .

Otrzymujemy kopule z 16 stopniami swobody i macierzą korelacji

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,43915 & 0,35106 & 0,42894 & 0,40650 \\ & 1 & 0,34603 & 0,41403 & 0,39474 \\ & & 1 & 0,36801 & 0,31426 \\ & & & 1 & 0,37423 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Następnie generujemy 50000 zmiennych z otrzymanej kopuli. Uzyskane w ten sposób reszty służą do symulacji logarytmicznych stóp zwrotu z modeli szeregów czasowych dla jednego dnia (jednodniowy VaR i ES). Wygenerowane scenariusze służą do optymalizacji portfela poprzez minimalizację ES dla ustalonych stóp zwrotu (od  $-0,002$  do  $0,005$ ). Otrzymano wyniki zebrane w tabeli 4.

**Tabela 4**

Portfel zbudowany za pomocą kopul

oczekiwana stopa zwrotu	Udziały w portfelu					VaR	ES
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		
<b>-0,002</b>	1,528612	-0,11653	-0,69504	0,131325	0,15163	0,134601	0,179614
<b>-0,001</b>	1,382612	-0,08948	-0,46053	0,082027	0,085371	0,092283	0,122929
<b>0</b>	1,234301	-0,05815	-0,22679	0,021246	0,029393	0,05446	0,072068
<b>0,001</b>	1,086464	-0,03376	0,009548	-0,03099	-0,03126	0,035976	0,048987
<b>0,002</b>	0,946076	-0,00204	0,241471	-0,08155	-0,10396	0,058009	0,079158
<b>0,003</b>	0,809915	0,023774	0,47691	-0,13766	-0,17294	0,094314	0,131861
<b>0,004</b>	0,678723	0,050571	0,71153	-0,19338	-0,24744	0,134088	0,188992
<b>0,005</b>	0,543166	0,079589	0,944105	-0,23959	-0,32727	0,175527	0,247548

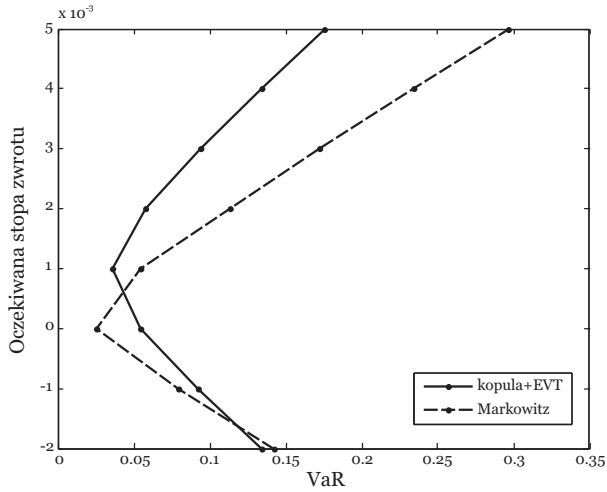
Natomiast korzystając z klasycznego podejścia Markowitza (minimalizacja wariancji stóp zwrotu przy ustalonej oczekiwanej stopie zwrotu) otrzymujemy wyniki (jak wyżej dopuszczamy możliwość zajęcia krótkiej pozycji) zebrane w tabeli 5.

**Tabela 5**

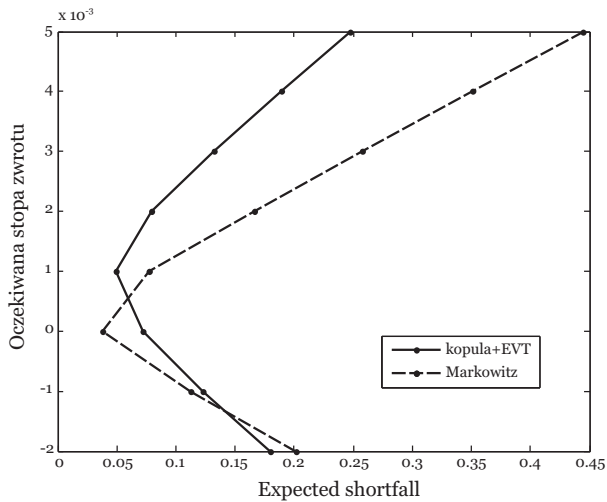
Portfel zbudowany metodą Markowitza

oczekiwana stopa zwrotu	Udziały w portfelu					VaR	ES
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		
<b>-0,002</b>	-2,85592	1,531145	-0,82748	-0,66825	3,820498	0,142569	0,201249
<b>-0,001</b>	-1,52557	0,896333	-0,2976	-0,23454	2,161378	0,079833	0,112733
<b>0</b>	-0,19521	0,261521	0,232272	0,199163	0,502259	0,025696	0,037389
<b>0,001</b>	1,135139	-0,37329	0,762145	0,632869	-1,15686	0,054543	0,076894
<b>0,002</b>	2,465491	-1,0081	1,292019	1,066575	-2,81598	0,113186	0,165986
<b>0,003</b>	3,795844	-1,64292	1,821893	1,50028	-4,4751	0,172501	0,258144
<b>0,004</b>	5,126196	-2,27773	2,351766	1,933986	-6,13422	0,234119	0,350831
<b>0,005</b>	6,456549	-2,91254	2,88164	2,367692	-7,79334	0,296123	0,443845

Na rysunkach 1 i 2 przedstawiamy zbiory możliwości dla obu metod konstrukcji portfela (jako ryzyko przyjmujemy VaR oraz ES).



**Rys. 1.** Zbiory możliwości w przypadku ryzyka określonego przez VaR



**Rys. 2.** Zbiory możliwości w przypadku ryzyka określonego przez ES

## 7. Podsumowanie

Porównując metodę Markowitza z metodą opartą na zastosowaniu kopul i teorii wartości ekstremalnej można wyciągnąć wniosek, że druga metoda prowadzi do bardziej realistycznych wyników rozumianych jako udziały w portfelu. Na podstawie analizy rysunków można wnioskować, że poczynając od pewnego poziomu oczekiwanej stopy zwrotu portfela (dodatkowo) ryzyka (przyjmowane jako VaR i ES) są mniejsze, co oznacza, że konstrukcja portfela metodą kopul w połączeniu z EVT daje w wyniku efektywniejsze portfele.

### Literatura

- [1] Bouyé E. i inni, *Copulas for finance – a reading guide and some application*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais 2000 (Working Paper).
- [2] Di Clemente A., Romano C., *Beyond Markovitz: Building Optimal Portfolio Using Non-Elliptical Asset Return Distribution*, University of Rome, 2003 (Research Paper).
- [3] Embrechts P., McNeil A.J., Straumann D., *Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls*. Risk Management [w:] *Value at Risk and Beyond*. Cambridge University Press 1999, s. 176-223.
- [4] Embrechts P., Lindskog F., McNeil, A.J., *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management [w:] Handbook of Heavy-tailed Distributions in Finance*, North Holland 2003, s. 329-384.
- [5] Glosten L.R., Jagannathan R., Runkle D.E. *On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks*, „Journal of Finance” 1993, nr 48(5), s. 1779-1801.
- [6] Markowitz H., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* 1959.
- [7] Markowitz, H., *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and capital Markets*. New York, Blackwell, 1987.
- [8] Mashal R., Zeevi A., *Beyond Correlation: Extreme Co-movements Between Financial Assets*, Columbia University, 2002 [Working Paper].
- [9] McNeil A.J., Frey R., *Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach* „Journal of Empirical Finance” 2000, nr 7, s. 271-300.
- [10] Nelsen, R.B., *An Introduction to Copulas*. New York, Springer Verlag, 1999.
- [11] Rockafellar R.T., Uryasev S., *Optimization and Conditional Value-at-Risk* Center for Applied Optimization, University of Florida, 1999 (Research Report, nr 99-4).

- [12] Romano C., *Calibrating and simulating copula functions: An application to the Italian stock market*, CIDEM, 2002 (Working Paper, nr 12) .
- [13] Sharpe W., *A Simplified Model for Portfolio Analysis*, „Management Science” 1963, nr 9, s. 277-293.