

Piotr Banasik\*, Jacek Kudrys\*

## **Weryfikacja wyników przeliczenia współrzędnych z układu lokalnego miasta Krakowa (ULK) do układu „2000” z wykorzystaniem stacji permanentnej GPS „KRAW” \*\***

### **1. Wstęp**

W wyniku przeliczenia współrzędnych punktów osnowy szczegółowej III klasy uzyskano współrzędne w układzie „2000” [1]. Algorytm zastosowany do tego przeliczenia umożliwił wykrycie miejsc na obszarze Krakowa, w których pojawiło się podejrzenie niejednorodności tej osnowy. Na szeregu punktach uwidoczniły się znaczne, nawet przekraczające 20 cm różnice we współrzędnych uzyskanych z niezależnych przeliczeń z układu lokalnego Krakowa oraz układu „1965” do układu „2000”. Na niektórych punktach różnice te miały charakter błędów grubych, rzędu kilkudziesięciu lub kilkuset metrów. Tylko w części takich przypadków udało się wyjaśnić przyczyny i poprawić współrzędne na etapie przeliczenia. W pozostałych przypadkach jedynym sposobem ustalenia poprawnych współrzędnych pozostało wykonanie pomiarów terenowych. Przykładem większych skupisk punktów świadczących o niejednorodności osnowy jest m.in. rejon mostu Zwierzynieckiego oraz rejon nadbrzeżny Wisły na wysokości dzielnicy Kazimierz. Tego rodzaju punkty przeznaczone zostały do kontrolnego pomiaru GPS i wyznaczenia dokładnych współrzędnych w układzie „2000”.

### **2. Kwalifikacja punktów do pomiaru GPS**

Wykorzystując wnioski zawarte w [1], zakwalifikowano do pomiaru GPS punkty, dla których wspomniana wcześniej różnice w obliczonych współrzędnych przekraczały  $\pm 5$  cm. Ze względu na dodatkowy, kontrolny charakter pomiaru zde-

---

\* Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

\*\* Artykuł powstał w ramach badań statutowych 11.11.150.478

cydowano, aby pomiarem GPS objąć również kilka punktów, dla których opisane wyżej różnice były minimalne lub bliskie zeru. W sumie do wywiadu terenowego i ewentualnego pomiaru GPS zakwalifikowano 103 punkty. Wstępne wyniki wywiadu terenowego potwierdziły przypuszczenie, że w ciągu ponad 10 lat, które minęły od ostatniego pomiaru osnowy III klasy, szczegóły terenowe stanowiące podstawę do odszukania punktów uległy dość znacznym zmianom. Po tak długim okresie czasu konieczna jest aktualizacja opisów topograficznych. Stwierdzono również znaczne zniszczenie znaków geodezyjnych przekraczające 30% wszystkich objętych wywiadem punktów. Przyczyną tego jest postępująca urbanizacja miasta, np. w rejonie niedawno zbudowanego mostu Zwierzynieckiego spośród 12 punktów wstępnie przeznaczonych do pomiaru GPS aż 7 zostało zniszczonych.

Kolejną przeszkodą w wykonaniu pomiarów GPS była stabilizacja punktów realizowana na potrzeby pomiaru klasycznego, tj. w pobliżu drzew lub naroży budynków. Ze względu na zakryty horyzont bezpośrednio pomiary GPS na takich punktach nie gwarantowały uzyskania poprawnych współrzędnych lub wręcz były niemożliwe do wykonania. W takich przypadkach – jak również dla tzw. półpoligonów stabilizowanych w ścianach budynków – konieczny był dodatkowy pomiar tachimetryczny.

Wymienione wyżej niekorzystne czynniki spowodowały, że pomiarem GPS mogła być objęta jedynie połowa spośród punktów, które wstępnie zostały zakwalifikowane do tego pomiaru.

### 3. Pomiar GPS w nawiązaniu do stacji KRAW

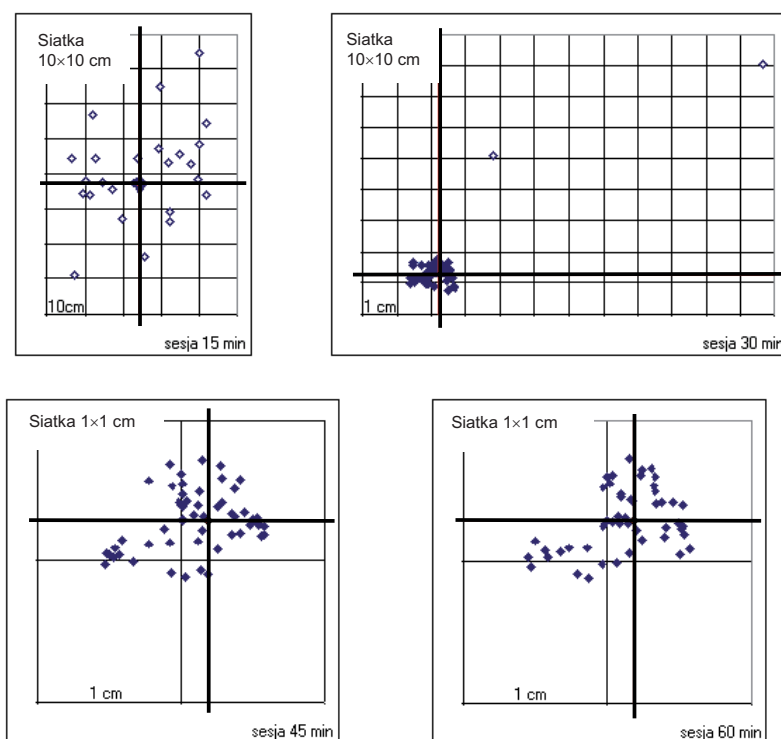
Pomiary sygnałów GPS wykonano metodą szybką statyczną w dniach od 11.11. do 10.12.2004 r. Obserwowano satelity od wysokości  $5^\circ$  nad horyzontem z interwałem 5 sekund. Do wykonania pomiarów wykorzystano odbiorniki Ashtech UZ-12 (Z-Surveyor) wraz z antenami ASH701008.01B. Współrzędne wszystkich wyznaczanych punktów wyznaczono w nawiązaniu do stacji permanentnej KRAW. Czas trwania sesji pomiarowej dla poszczególnych punktów był uzależniony od odległości wyznaczanego punktu od punktu nawiązania oraz od konfiguracji satelitów w trakcie pomiaru.

Na etapie przygotowań do właściwego pomiaru przeprowadzono analizę powtarzalności wyznaczeń współrzędnych punktów w zależności od czasu trwania sesji pomiarowej.

Do celów analizy wykorzystano wykonane wcześniej obserwacje na Kopcu Krakusa (KRAK) oraz na dwóch punktach osnowy poziomej II klasy: 0550 i 582. Powtarzalność wyznaczenia współrzędnych określono, porównując wartości współrzędnych wyznaczonych z sesji o przyjętej długości 15 min, 30 min, 45 min

i 60 min., wydzielonych z całej kilkogodzinnej sesji pomiarowej na danym punkcie. Jako współrzędne odniesienia przyjęto wartości wyznaczone z 5-godzinnej sesji na punkcie KRAK i 2-godzinnych sesji zrealizowanych na punktach 0550 i 0582.

Na rysunku 1 przedstawiono wyniki rozwiązań wektora testowego KRAW-KRAK w zależności od czasu trwania sesji obserwacyjnej. Podano położenie punktów otrzymane z kolejnych wyznaczeń, przy czym zaczernione punkty odpowiadają wyznaczeniom, w których uzyskano rozwiązanie typu *fixed* z początkową całkowitoliczbową nieoznaczonością fazy. Pozostałe punkty odpowiadają rozwiązaniom typu *float*.



**Rys. 1.** Powtarzalność wyznaczenia współrzędnych płaskich wektora KRAW-KRAK ( $d = 4,1$  km) z sesji 15 min, 30 min, 45 min, 60 min ( $L1$ ,  $\Delta t = 15$  s,  $h_c = 5^\circ$ )

Zaznaczono także położenie punktu obliczone na podstawie obserwacji wykonanych w ciągu całej sesji pomiarowej (5 h). W tabeli 1 przedstawiono procentowy rozkład rozwiązań typu *fixed* dla poszczególnych wektorów testowych w zależności od czasu trwania sesji.

**Tabela 1.** Rozwiązania całkowitoliczbowe nieoznaczoności fazy w zależności od czasu trwania sesji, interwału pomiarowego i długości wektora

Czas trwania sesji	15 min	30 min	45 min	60 min
Liczba rozwiązań <i>fixed</i> nieoznaczoności fazy	KRAW-KRAK, $d = 4,1$ km; $\Delta t = 15$ s			
	59%	96%	100%	100%
	KRAW-0550, $d = 4,8$ km; $\Delta t = 15$ s			
	78%	100%	100%	100%
	KRAW-0582, $d = 1,7$ km; $\Delta t = 15$ s			
	100%	100%	100%	100%

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że w większości przypadków (59%) do wyznaczenia poziomych współrzędnych punktu z dokładnością ok. 1÷2 cm wystarczy już 15 minut pomiaru z interwałem 15 sekund. Należy podkreślić, że dla sesji 15-minutowych wszystkie rozwiązania typu *fixed* nie odbiegają więcej niż 1,5 cm od wartości otrzymanej z opracowania całej kilkugodzinnej sesji.

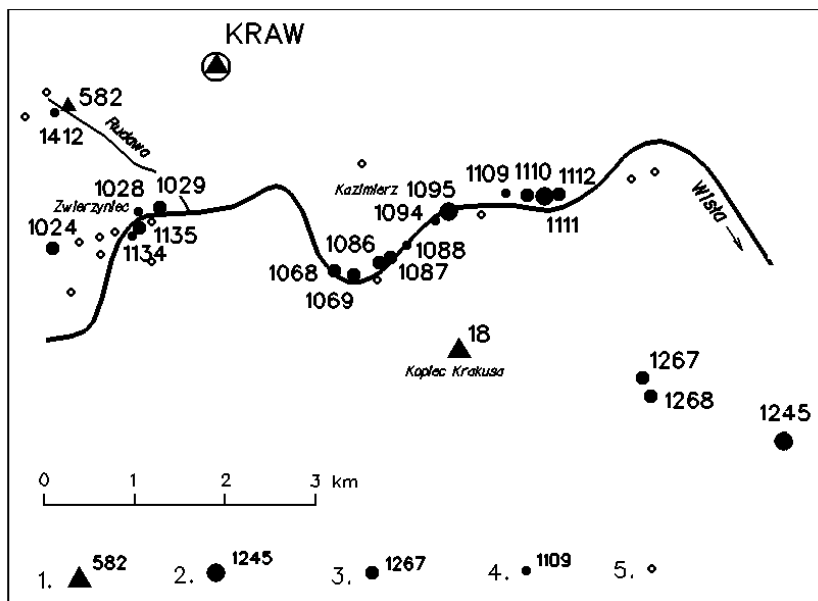
#### 4. Analiza różnic współrzędnych XY w układzie „2000”

Otrzymane w wyniku pomiaru GPS współrzędne (B,L)<sup>EUREF-89</sup> punktów kontrolnych przeliczono na współrzędne w układzie „2000”, a następnie porównano ze współrzędnymi obliczonymi w wyniku transformacji [1]. Różnice we współrzędnej X zawierały się w granicach od -11 cm (punkt 1242<sub>163.341</sub>) do +12 cm (punkt 1111<sub>163.334</sub>), a we współrzędnej Y od -7 cm (punkt 1111<sub>163.334</sub>) do +12 cm (punkt 1095<sub>163.334</sub> i 1245<sub>163.343</sub>). Średnia różnica w obu współrzędnych wyniosła 4 cm a średnia różnica w położeniu (odchyłka liniowa) 7 cm. Odchyłkę liniową powyżej 10 cm uzyskało 6 punktów. Największe wartości odchyłek wynoszące 14 cm otrzymały dwa punkty – 1111<sub>163.334</sub> i 1242<sub>163.341</sub>.

Warto przy tej okazji określić maksymalną rozbieżność w położeniu punktu, jaka może się pojawić między wynikami przeliczenia (transformacji) współrzędnych z układu lokalnego a wynikami otrzymanymi z pomiarów GPS. Osnowa pozioma III klasy na obszarze miasta Krakowa (rys. 2) jest klasyczną osnową poligonową, nawiązaną do punktów I i II klasy. Błąd położenia punktu takiej osnowy wynosi 10 cm względem osnowy poziomej klasy II. Chcąc określić błąd położenia takiego punktu względem stacji KRAW, należałoby uwzględnić błędy położenia punktów osnowy II i I klasy<sup>1</sup>. Dodać do tego należy również niewielkie błędy wynikające

<sup>1</sup> Współrzędne stacji KRAW (obliczone z 1,5-roczych, tygodniowych rozwiązań w nawiązaniu do kilku europejskich stacji EUREF) są na poziomie dokładności porównywalnej z dokładnością punktów sieci EUREF-POL.

z procesu przeliczenia współrzędnych z układu lokalnego do układu „2000” (około 3÷5 cm – punkty dostosowania z klasy I i II) oraz z pomiaru GPS (1÷2 cm)<sup>2</sup>. W sumie należy spodziewać się wartości wyżej wymienionych rozbieżności w położeniu punktu na poziomie ok. 14 cm. Podobną wartość podaje się w [2]. Można zatem uznać, że położenie wszystkich punktów osnowy poziomej klasy III objętych pomiarem GPS mieści się dopuszczalnych granicach dokładności.

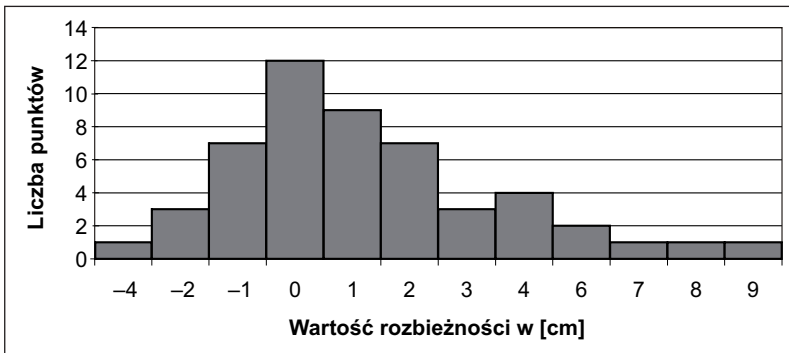


Rys. 2. Różnice między wartościami współrzędnych z przeliczenia układu lokalnego do układu „2000” a wartościami współrzędnych wyznaczonymi z pomiaru GPS na fragmencie obszaru Krakowa: 1 – punkt osnowy I lub II kl., 2–4 – punkty osnowy klasy III wykazujące różnice odpowiednio: 10÷12 cm, 5÷10 cm, 0÷5 cm; 5 – zniszczone punkty osnowy klasy III

Następnie porównano ze sobą wartości odchyłek położenia uzyskanych w wyniku transformacji [1] oraz wyżej wymienione różnice współrzędnych. Odchyłki wykazane w [1] wynikają z niejednorodności współrzędnych punktów osnowy poziomej klasy III w układzie lokalnym i „1965”, co zauważono podczas przeliczania współrzędnych do układu „2000”. Na ich podstawie wytypowano punkty do pomiaru GPS, traktując wartości odchyłek jako prognozy, dotyczące położenia punktu.

<sup>2</sup> Możliwe jest także fizyczne przesunięcie punktu, które mogło nastąpić w ciągu 10 lat funkcjonowania osnowy klasy III. Trudno jest jednak określić wartość takiego przesunięcia, tym bardziej że w większości przypadków stan stabilizacji punktów nie budził zastrzeżeń.

Na rysunku 3 przedstawiono wyniki porównania odchyłek położenia uzyskanych z przeliczenia [1] oraz z pomiaru GPS. Wynika z niego, że prognozy z opracowania [1] w zakresie  $\pm 2$  cm sprawdziły się w ponad 70%, a w zakresie  $\pm 5$  cm w 85% przypadków. Można zatem stwierdzić, że algorytm przeliczenia współrzędnych podany w [1] dość skutecznie wykrył lokalne niejednorodności osnowy poziomej klasy III.



Rys. 3. Rozbieżności między wartościami odchyłek położenia punktu uzyskanymi z transformacji oraz pomiaru GPS

Poszukując źródła największych uzyskanych rozbieżności w położeniu kilku punktów, wykonano analizę długości odcinków między tymi punktami. Istotą tej analizy było porównanie długości odpowiednio dobranych odcinków w układzie lokalnym i w układzie „2000”. Do analizy wybrano pary punktów tworzące odcinki w przybliżeniu na kierunkach osi X i osi Y. Dzięki temu rozbieżności we współrzędnych X lub Y przekładały się bezpośrednio na zmianę długości odcinka. Długości obliczone ze współrzędnych w układzie „2000”, wyznaczonych na podstawie pomiaru GPS, zredukowano na średnią wysokość punktów, tj. na poziom odpowiadający położeniu płaszczyzny układu lokalnego. W redukcji uwzględniono także zniekształcenie długości w odwzorowaniu układu „2000”. Ze względu na zmianę zniekształcenia w kierunku osi Y starano się, aby długości na tym kierunku były niezbyt długie. Dzięki temu wpływ przybliżonej wartości zniekształcenia, czyli średniej ze zniekształceń na końcach odcinka był minimalny. Starano się również dobrać w pary takie punkty, aby odchyłki dla poszczególnych współrzędnych (ze względu na swój znak) nie redukowały się, lecz sumowały.

Uwzględniając powyższe czynniki, poddano analizie 8 odcinków między punktami, których współrzędne miały maksymalne odchyłki (tab. 2). Dla porównania przeanalizowano również 4 odcinki między punktami charakteryzującymi się minimalnymi odchyłkami.

**Tabela 2.** Analiza długości odcinków między wybranymi punktami w układzie „2000”

Bok	$D_{ULK}$	$\Delta X^{P-K}$	$\Delta Y^{P-K}$	Az	$D_2$	$Zn_{sr}$	$D_{WGS84}$	$h_{sr}$	$D_{2-ULK}$	$\Delta D$
	[m]	[m]	[m]	[°]	[m]	[cm/km]	[m]	[m]	[m]	[m]
Odcinki charakteryzujące się maksymalnymi różnicami współrzędnych										
1109-1111	430,15	0,08	-0,08	95	430,21	-1,00	430,21	243,7	430,23	0,07
1029-1124	3149,90	0,09	0,00	149	3149,69	-0,09	31469,69	249,9	3149,82	-0,08
1095-1111	1067,88	0,10	-0,19	161	1068,00	-0,94	1068,01	243,3	1068,05	0,17
1112-1267	2229,88	-0,16	0,03	156	2229,58	-1,15	2229,61	242,0	2229,69	-0,18
1094-1095	179,26	-0,01	0,09	237	179,19	-0,83	179,19	243,3	179,20	-0,06
1245-1267	1705,10	-0,08	-0,09	114	1704,97	-0,80	1704,99	239,5	1705,05	-0,05
1245-1110	6667,41	-0,02	-0,11	244	6666,92	-0,69	6666,96	259,4	6667,24	-0,17
1242-1003	4259,88	0,12	-0,14	206	4259,50	-2,72	4259,61	260,6	4259,79	-0,09
Odcinki charakteryzujące się minimalnymi różnicami współrzędnych										
1172-1127	5765,96	0,01	-0,06	176	5765,77	1,31	5765,70	263,7	5765,94	-0,02
1172-1412	6847,78	0,04	-0,04	98	6847,52	0,66	6847,47	260,0	6847,75	-0,03
1019-1412	4554,41	0,03	0,00	195	4554,23	-0,13	4554,24	256,2	4554,42	0,01
1172-1112	3686,24	0,00	-0,04	249	3686,13	0,66	3686,11	264,5	3686,26	0,02

Dla pierwszego odcinka między punktami 1109 i 1111 przebiegającego w przybliżeniu w kierunku równoleżnikowym ( $Az = 95^\circ$ ) analizowano różnicę odchyłki na współrzędnej Y wynoszącą  $\Delta Y^{P-K} = -8$  cm (+1 cm na punkcie 1109 i -7 cm na punkcie 1111). Długość odcinka w układzie lokalnym wyniosła  $D_{LOK} = 430,15$  m. Ta sama długość w układzie „2000” (ze współrzędnych z pomiaru GPS) wyniosła  $D_2 = 430,21$  m. Średnie zniekształcenie długości odcinka wyniosło  $Zn_{sr} = -1,0$  cm/km, w związku z czym wartość redukcji z płaszczyzny układu „2000” na elipsoidę WGS-84 była poniżej 1 cm. Zredukowanie odcinka z elipsoidy na poziom terenu odpowiadający płaszczyźnie układu lokalnego (średnia wysokość  $h_{sr} = 243,7$  m) zmieniło jego długość do wartości  $D_{2-LOK} = 430,23$  m. Różnica tak obliczonej długości z długością ze współrzędnych w układzie lokalnym wyniosła zatem 7 cm. Wartość ta dobrze koresponduje z sumaryczną odchyłką we współrzędnej Y wynoszącą  $\Delta Y^{P-K} = -8$  cm. Dla pozostałych odcinków można zauważyć podobną korelację: odcinek 1029–1124 sumaryczna odchyłka wzdłuż X wyniosła  $\Delta X^{P-K} = 9$  cm – z porównania długości uzyskano 8 cm, odcinek 1094–1095 sumaryczna odchyłka wzdłuż Y wyniosła  $\Delta Y^{P-K} = 9$  cm – z porównania długości uzyskano 6 cm, itd. W przypadku odcinków między punktami o minimalnych odchyłkach we współrzędnych zaobserwowano również podobną korelację.

## 5. Podsumowanie

Na podstawie wyników przeprowadzonych analiz można sformułować następujące wnioski:

- 1) Wykorzystanie obserwacji sygnałów GPS ze stacji permanentnej KRAW oraz pomiarów GPS na punktach osnowy poziomej III klasy niezależnia wyznaczone współrzędne od wpływu błędów osnowy klasy I lub II.
- 2) Rozbieżności we współrzędnych w układzie „2000” uzyskanych z przeliczenia z układu lokalnego [1] i z pomiaru GPS wystąpiły na punktach, których współrzędne w transformacji [1] były obarczone większym błędem. Dzięki wnioskowi zawartemu w [1] wytypowano punkty do pomiaru GPS.
- 3) Wartości tych rozbieżności mieszczą się w granicach dopuszczalnego błędu określonego z wielu błędów cząstkowych na poziomie 14 cm.
- 4) Zauważono korelację między wartościami odchyłek wykazanych w opracowaniu [1] a wartościami rozbieżności uzyskanych w wyniku pomiaru GPS. Traktując odchyłki jako prognozy dokładności współrzędnych punktów, można stwierdzić, że w zakresie  $\pm 2$  cm sprawdziły się w ponad 70%, a w zakresie  $\pm 5$  cm w 85% przypadków. Można zatem uznać, że algorytm przeliczenia współrzędnych opracowany w [1] dość skutecznie wykrył lokalne niejednorodności osnowy poziomej klasy III.



- 5) W związku powyższym należałoby zwrócić szczególną uwagę na pozostałe punkty nieobjęte pomiarem GPS, na których w wyniku przeliczenia z układu lokalnego do układu „2000” pojawiły się także znaczące odchyłki we współrzędnych.
- 6) Badanie długości odpowiednio dobranych odcinków wykazało, że przyczyną stwierdzonych rozbieżności mogą być błędy współrzędnych w układzie lokalnym, które przeniosły się w wyniku transformację przeliczenia z układu lokalnego do układu „2000”.

## Literatura

- [1] Banasik P.: *Wykonanie analizy punktów osnowy geodezyjnej III klasy i ich przeliczenie z Układu Lokalnego miasta Krakowa (ULK) do Układu 2000*. Kraków 2003 (prace niepublikowane, w archiwum Miejskiego Zarządu Baz Danych Urzędu Miasta Krakowa).
- [2] *Wytyczne do przeliczeń osnów poziomych i granic administracyjnych oraz przekształceń map katastralnych do Układu 2000*. GUGiK, Warszawa 2003.