

Damian Krawczykowski, Kazimierz Trybalski**

MATEMATYCZNA IDENTYFIKACJA PRZEMYSŁOWEGO PROCESU MIELENIA I KLASYFIKACJI RUDY MIEDZI ZA POMOCĄ MODELI REGRESYJNYCH**

1. Wstęp

Warunkiem skutecznego sterowania i optymalizacji procesu wzbogacania rud miedzi jest możliwie pełna identyfikacja operacji technologicznych na drodze modelowania matematycznego. Uzyskane w ten sposób modele mogą być wykorzystane w kompleksowych systemach sterowania komputerowego poszczególnymi układami technologicznymi lub całym procesem produkcyjnym. Nie jest to proste zagadnienie zważywszy na złożoność, dużą liczbę etapów oraz różnorodność operacji wzbogacania wchodzących w skład procesu technologicznego przeróbki rud miedzi. Racjonalnym podejściem do zagadnienia optymalizacji jest traktowanie procesu jako ciągu autonomicznych bloków technologicznych grupujących w swojej strukturze — powiązane ze sobą, często pokrewne pod względem charakteru i skutków działania — operacje technologiczne wzbogacania rud miedzi [7].

W artykule poddano identyfikacji matematycznej blok operacji wstępnych, do którego należą procesy przygotowania rudy do flotacji — mielenie i klasyfikacja. Jest to najkosztowniejszy blok operacji technologicznych wzbogacania rudy miedzi [4]. Składnikiem generującym najwyższe koszty w bloku operacji wstępnych jest koszt energii elektrycznej [3, 4, 6]. Szczególnie energochłonnymi procesami przeróbczymi są procesy mielenia. Są również najdroższymi procesami jednostkowymi; dotyczy to zarówno kosztów inwestycyjnych, jak i eksploatacyjnych.

Obiekt badań poddano eksperymentom mającym na celu zbadanie charakteru oraz dynamiki zmian parametrów procesowych. W trakcie doświadczeń zmieniano w szerokim — dopuszczalnym technologicznie — zakresie, podstawowe — możliwe do ustalenia — parametry technologiczne badanego procesu. Wartości parametrów procesowych były mie-

* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

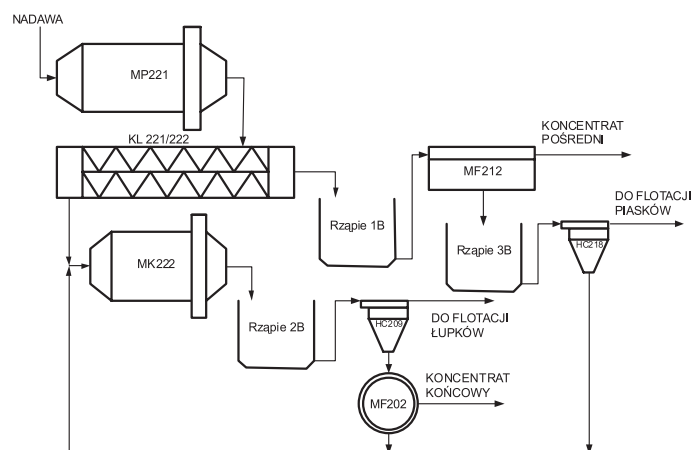
** Artykuł powstał w ramach Pracy Statutowej nr 11.11.100.238, zadanie 12

rzone i rejestrowane przez zainstalowane w badanym węźle technologicznym mielenia i klasyfikacji urządzenia kontrolno-pomiarowe współpracujące z systemem sterowania procesem.

Identyfikacja procesu mielenia i klasyfikacji polegała na określeniu efektywnych modeli matematycznych wskaźników oceny procesu, które wyjaśniałyby w możliwie pełny sposób zasady współzależności parametrów procesowych. Modelowaniu matematycznemu poddano wskaźniki energetyczne oceniające pracę węzła mielenia i klasyfikacji. Wskaźniki, ujmujące w swojej strukturze parametry technologiczno-energetyczne procesu mielenia i klasyfikacji rudy miedzi, obliczono na podstawie danych zebranych w trakcie trwania eksperymentów.

2. Obiekt badań

Obiektem badań był węzeł mielenia i klasyfikacji II ciągu technologicznego O/ZWR Rejon Lubin. Doświadczenia prowadzono w sekcji drugiej ciągu składającego się z trzech niemal identycznych sekcji technologicznych.



Rys. 1. Schemat technologiczny węzła mielenia i klasyfikacji w II ciągu technologicznym O/ZWR Rejon Lubin — tercja druga

Rysunek 1 przedstawia schemat technologiczny obiektu badań, który obejmuje następujące operacje technologiczne:

1. mielenie w młynie przętowym (MP 221),
2. mielenie w młynie kulowym (MK 222),
3. klasyfikację w klasyfikatorze zwojowym (KZ 221/222),
4. klasyfikację w hydrocyklonach ϕ 500 (HC 209/210, 217/218),
5. flotację wstępną (MF 212),
6. flotację szybką (MF202).

Układ mielenia i klasyfikacji wyposażony jest w szereg urządzeń kontrolno-pomiarowych współpracujących z zainstalowanym w węźle systemem MillStar, który steruje i optymalizuje pracę węzła. W tabeli 1 podano wykaz najistotniejszych parametrów procesu mierzonych przez system pomiarowy.

TABELA 1
Zmienne procesowe mierzone przez system w tereji drugiej

Symbol	Opis
Q_{RMP221}	Natężenie przepływu rudy do młyna prętowego MP221, Mg/h
Q_{wMP221}	Natężenie przepływu wody do młyna prętowego MP221, m ³ /h
$Q_{wKL221/222}$	Natężenie przepływu wody do klasyfikatora K221/222, m ³ /h
Q_{wMK222}	Natężenie przepływu wody do młyna kulowego MK 222, m ³ /h
Q_{wrz2B}	Natężenie przepływu wody do rząpia 2B, m ³ /h
Q_{wrz1B}	Natężenie przepływu wody do rząpia 1B, m ³ /h
Q_{nMP221}	Gęstość nadawy w młynie prętowym, g/dm ³
D_{nHC209}	Gęstość nadawy hydrocyklonów HC209 ciągu rudy węglanowej, g/dm ³
D_{nHC218}	Gęstość nadawy hydrocyklonów HC218 ciągu rudy piaskowcowej, g/dm ³
V_{nHC209}	Natężenie przepływu nadawy hydrocyklonów HC209, m ³ /h
P_{HC209}	Ciśnienie nadawy hydrocyklonów HC209, kPa
P_{HC218}	Ciśnienie nadawy hydrocyklonów HC218, kPa
D_{pHC209}	Gęstość przelewu hydrocyklonów HC209, g/dm ³
D_{pHC218}	Gęstość przelewu hydrocyklonów HC218, g/dm ³
$\gamma_{+200HC209}$	Wychód klasy +200 μ m w przelewie hydrocyklonów HC209, %
$\gamma_{+200HC218}$	Wychód klasy +200 μ m w przelewie hydrocyklonów HC218, %
L_{rz3B}	Poziom mętów w rząpiu 3B, %
L_{rz2B}	Poziom mętów w rząpiu 2B, %
L_{rz1B}	Poziom mętów w rząpiu 1B, %
M_{MP221}	Moc napędu młyna prętowego MP221, kW
M_{MK222}	Moc napędu młyna kulowego MK 222, kW
$M_{PM203,209,218}$	Moce napędów pomp PM203, PM209, PM218, kW
M_{MF212}	Moc napędu maszyny flotacji wstępnej MF212, kW
$M_{TM221,222,223}$	Moce napędów taśmociągów TM221, TM222, TM223, kW

3. Charakterystyka danych z eksperymentu

Dane procesowe pochodziły z okresu czterech dziennych zmian roboczych, w trakcie których prowadzono eksperymenty, dodatkowo rejestrowano również dane poza ekspery-

mentami. Rejestrowanie danych odbywało się z okresem próbkowania 10 s. W celu ustabilizowania chwilowych skoków ich wartości oraz odrzucenia błędnych wskazań, dane uśredniano za czas 1 minuty i poddawano filtracji.

Statystyki danych zebranych w trakcie trwania eksperymentów przedstawiono w tabeli 2.

TABELA 2

Statystyki opisowe danych procesowych z eksperymentów

Zmienne	<i>N</i> ważnych	Średnia	Minimum	Maksimum	Odchylenie standardowe
D_{nHC209}	1151	1349,04	1202,14	1419,74	43,72
P_{HC209}	1151	64,85	33,80	105,85	10,09
V_{nHC209}	1151	493,09	326,28	600,00	49,58
D_{pHC209}	1151	1174,86	1069,18	1295,65	37,73
$\gamma_{+200HC209}$	1151	13,93	1,56	37,64	4,92
D_{nHC218}	1151	1314,43	1221,58	1397,67	38,88
P_{HC218}	1151	99,98	35,27	145,41	35,67
D_{pHC218}	1151	1200,24	1091,24	1330,55	48,96
$\gamma_{+200HC218}$	1151	6,93	1,22	20,00	4,83
Q_{RMP221}	1151	155,96	85,91	230,82	21,07
Q_{wMP221}	1151	52,82	30,75	100,21	7,76
$Q_{wKL221/222}$	1151	136,38	109,33	202,15	24,22
Q_{wMK222}	1151	61,69	53,40	66,13	4,73
Q_{wrz2B}	1044	40,74	0,97	62,74	18,50
Q_{wrz1B}	1057	18,55	1,29	30,84	12,53
M_{MP221}	1151	230,01	182,61	272,63	15,31
M_{MK222}	1151	399,94	328,00	449,82	32,28
M_{TM222}	834	3,93	0,00	4,89	1,62
M_{TM223}	794	3,89	0,00	5,73	0,87
M_{MF212}	1151	32,64	31,22	34,05	0,60
M_{PM203}	1151	21,85	14,09	25,10	1,96
M_{PM209}	1151	75,94	52,77	96,38	6,92
M_{PM218}	1151	31,08	16,54	44,91	8,82
M_{TM221}	1151	5,77	5,27	6,92	0,26
L_{rz3B}	1151	54,55	16,06	92,69	12,63
L_{rz2B}	1151	53,56	27,39	81,88	7,07
L_{rz1B}	1151	29,67	0,09	99,81	31,09

4. Wskaźniki energetyczne oceny pracy wężła mielenia i klasyfikacji

Do oceny pracy badanego wężła mielenia i klasyfikacji zaproponowano wskaźniki energetyczne, które obok chwilowych mocy i zużycia energii ujmują także jej zużycie na jednostkę rozdrabnianej masy nadawy lub na jednostkę wytwarzanego produktu.

Podstawą wyboru postaci przyjętych wskaźników był rodzaj informacji (mierzone parametry procesu) dostarczanej przez system pomiarowy w badanym obiekcie.

Ponieważ w badanym wężle produkowane są dwa główne produkty końcowe — przelewy hydrocyklonów ciągu rudy piaskowcowej i rudy węglanowej, przyjęto wskaźniki dla wyżej wymienionych ciągów i dla całego wężła przygotowania nadawy, podano także ich jednostki.

Dla młyna prętowego określono względny wskaźnik zużycia energii elektrycznej przez młyn na tonę przerabianej rudy

$$W_1 = \frac{M_{MP221}}{Q_{RMP221}} \left[\frac{\text{kW}}{\text{Mg/h}} \right] \rightarrow \frac{E}{Q} = E_{jed.} \left[\frac{\text{kWh}}{\text{Mg}} \right] \quad (1)$$

Analogiczny wskaźnik, uwzględniający energię elektryczną zużywaną przez wszystkie napędy pracujące w wężle, określono dla całego wężła mielenia i klasyfikacji

$$W_2 = \frac{M}{Q_{RMP221}} \left[\frac{\text{kW}}{\text{Mg/h}} \right] \rightarrow \frac{E}{Q} = E_{jed.} \left[\frac{\text{kWh}}{\text{Mg}} \right] \quad (2)$$

gdzie:

M_{MP221} — moc chwilowa napędu młyna prętowego, kW,

M — moc chwilowa wszystkich napędów pracujących w wężle, kW,

Q_{RMP221} — masowe natężenie przepływu rudy w młynie prętowym, Mg/h,

E — energia elektryczna, kWh,

Q — masa, Mg.

Dla ciągu rudy piaskowcowej określono wskaźnik wyrażający chwilowy pobór mocy młyna prętowego w stosunku do udziału procentowego klasy ziarnowej powyżej 200 μm w przelewie hydrocyklonów tego ciągu

$$W_3 = \frac{M_{MP}}{\gamma_{+200,HC218}} \left[\frac{\text{kW}}{\%} \right] \quad (3)$$

gdzie $\gamma_{+200,HC218}$ oznacza wychód klasy $> 200 \mu\text{m}$ w przelewie hydrocyklonów ciągu rudy piaskowcowej.

Dla ciągu rudy węglanowej zaproponowano trzy wskaźniki oceny. Wskaźniki W_4 i W_5 ujmują moce pobierane przez napędy młyna kulowego lub obu młynów jako globalnej jednostki rozdrabniającej w odniesieniu do składu ziarnowego przelewu hydrocyklonów ciągu rudy węglanowej, natomiast wskaźnik W_6 uwzględnia moce pobierane przez napędy obu młynów w odniesieniu do masowego natężenia przepływu klasy ziarnowej powyżej 200 μm w przelewie hydrocyklonów:

$$W_4 = \frac{M_{MK222}}{\gamma_{+200,HC209}} \left[\frac{\text{kW}}{\%} \right] \quad (4)$$

$$W_5 = \frac{M_{MP221} + M_{MK222}}{\gamma_{+200,HC209}} \left[\frac{\text{kW}}{\%} \right] \quad (5)$$

$$W_6 = \frac{M_{MP221} + M_{MK222}}{\gamma_{+200,HC209} \cdot V_{nHC209} \cdot D_{nHC209}} \cdot 1000 \left[\frac{\text{kWh}}{\% \times \text{Mg}} \right] \quad (6)$$

gdzie:

M_{MK222} — moc chwilowa napędu młyna kulowego, kW,

$\gamma_{+200,HC209}$ — wychód klasy $> 200 \mu\text{m}$ w przelewie hydrocyklonów ciągu rudy węglanowej, %

V_{nHC209} — objęściowe natężenie przepływu mętów w hydrocyklonach $HC209$, m^3/h ,

D_{nHC209} — gęstość mętów nadawy hydrocyklonów $HC209$, g/dm^3 .

Oceniając cały węzeł mielenia i klasyfikacji zaproponowano wskaźnik uwzględniający moc pobieraną przez wszystkie istotne napędy tego węzła, jak również skład ziarnowy produktów końcowych węzła przygotowania nadawy

$$W_7 = \frac{M}{a \cdot \gamma_{+200,HC209} + b \cdot \gamma_{+200,HC218}} \left[\frac{\text{kW}}{\%} \right] \quad (7)$$

gdzie $a = 0,5$ i $b = 1,5$ oznaczają wagi związane z technologicznymi warunkami pracy urządzeń klasyfikujących [–].

5. Modele wskaźników

Do modelowania wskaźników energetycznych wykorzystano metodę regresji wielorakiej. Regresja w statystyce jest funkcją zależności, opisującą wpływ jednej lub kilku zmiennych tzw. objaśniających na zmienną, której przebiegu poszukuje się, a więc na zmienną

objaśnianą. Mówiąc o wpływie wielu zmiennych na zmienną objaśnianą, regresję nazywa się wieloraką lub wielowymiarową.

Analiza regresji polega na estymacji parametrów równania teoretycznego regresji, które w sposób najdokładniejszy odwzorowuje zachodzącą zależność.

Jeśli występuje N obserwacji zmiennych x_1, x_2, \dots, x_k , które mogą mieć wpływ na zmienną y , to liniowym modelem regresji wielorakiej będzie równanie postaci [1]

$$y = \beta_0 + \beta_{1x_1} + \beta_{2x_2} + \dots + \beta_{kx_k} + \varepsilon \quad (8)$$

gdzie:

β_i — parametry modelu (współczynniki regresji) opisujące wpływ i -tej zmiennej,

ε — składnik losowy.

Dla badanego węzła mielenia i klasyfikacji zmiennymi modelowanymi (zależnymi) są wskaźniki energetyczne obliczone na podstawie danych energetyczno-technologicznych procesu (tab. 2), zebranych podczas eksperymentów przeprowadzonych w O/ZWR Rejon Lubin [2].

Spośród danych, zmiennymi niezależnymi opisującymi modele są dane technologiczne, danych energetycznych natomiast nie wykorzystano w modelowaniu ze względu na brak możliwości ich regulacji i ograniczoną możliwość bezpośredniego wykorzystania w sterowaniu procesem.

Wstępną selekcję zmiennych niezależnych przeprowadzono na podstawie analizy macierzy korelacji. Modele uwzględniają zmienne silnie skorelowane ze zmiennymi zależnymi W , a jednocześnie słabo skorelowane między sobą, unikając tym samym zjawiska współliniowości zmiennych. Tak wytypowane zmienne niezależne posłużyły do budowy modeli metodą liniowej regresji krokowej — postępującej. Procedura ta sekwencyjnie tworzy efektywniejszy model poprzez dodawanie do zmiennych objaśniających uwzględnionych w modelu tych zmiennych, które mają najistotniejszy wpływ na zmienną zależną. Procedura trwa do momentu uzyskania najlepszego modelu.

Do budowy modeli, ich weryfikacji oraz obliczeń statystycznych wykorzystano zintegrowany systemem statystycznej analizy danych Statistica firmy StatSoft.

Poniżej podano wyniki modelowania opisane równaniami regresji oraz tabele podsumowujące, które przedstawiają siłę, kształt i kierunek powiązań pomiędzy wskaźnikami energetycznymi W_i a danymi procesowymi. Modele opisują zależności w trakcie trwania doświadczeń oraz poza eksperymentami.

Kolejność zmiennych niezależnych zawartych w tabelach 3–9 jest hierarchiczna i wynika z realizacji procedury regresji krokowej postępującej:

$$W_1 = 1,17386 - 0,01880Q_{wMP221} + 0,00039L_{rz1B} - 0,02095\gamma_{+200HC218} + 0,02497Q_{wMK222} - 0,00131Q_{wz1B} - 0,00099L_{rz3B} \pm 0,14144; \quad (9)$$

$$R^2 = 67,24\%$$

$$W_2 = 9,06285 - 0,06435Q_{wMP221} + 0,05524Q_{wMK222} + 0,00346L_{rz1B} - 0,00302D_{nHC218} \pm 0,39830; \quad (10)$$

$$R^2 = 74,95\%$$

$$W_3 = 523,28335 - 0,41846D_{pHC218} - 0,42585P_{HC218} - 0,57460L_{rz2B} + 0,07837D_{nHC209} \pm 17,606; \quad (11)$$

$$R^2 = 76,31\%$$

$$W_4 = 707,76019 - 1,05699L_{rz2B} - 0,47692D_{nHC209} - 0,72106P_{HC209} - 0,07922L_{rz1B} + 0,12690D_{nHC218} - 1,27827Q_{wMK222} - 0,25778Q_{wrz2B} \pm 22,374; \quad (12)$$

$$R^2 = 59,98\%$$

$$W_5 = 1184,97648 - 1,10755L_{rz2B} - 0,69491D_{pHC209} + 3,33094\gamma_{+200HC218} - 0,69230L_{rz3B} - 0,46997Q_{wrz2B} + 1,15528Q_{wMP221} - 0,20018D_{nHC209} - 0,54869Q_{wrz1B} \pm 27,954; \quad (13)$$

$$R^2 = 73,43\%$$

$$W_6 = 2,06149 - 0,00443L_{rz2B} - 0,00125D_{pHC209} + 0,01017\gamma_{+200HC218} - 0,00148L_{rz3B} - 0,00113Q_{wrz2B} - 0,00332Q_{wMK222} \pm 0,06351; \quad (14)$$

$$R^2 = 73,71\%$$

$$W_7 = 436,13841 - 0,22113D_{pHC218} - 0,10774P_{HC218} - 0,15000D_{pHC209} - 0,14463Q_{wKL221/222} + 0,06699D_{nHC209} - 0,14642Q_{wrz1B} \pm 8,2107; \quad (15)$$

$$R^2 = 77,22\%$$

TABELA 3

Podsumowanie modelu wskaźnika W_1 — z eksperymentów

N = 1012	Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: W_1 $R = 0,81998098$ $R^2 = 0,67236880$ Skoryg. $R^2 = 0,67041280$ $F(6,1005) = 343,75$ $p < 0,0000$ Błąd std. estymacji: 0,14144					
	BETA	Błąd st. BETA	B	Błąd st. B	t(1005)	poziom p
W. wolny			1,17386	0,09851	11,917	0,00000
Q_{wMP221}	-0,57949	0,02042	-0,01880	0,00066	-28,375	0,00000
L_{rz1B}	0,04710	0,02238	0,00039	0,00018	2,104	0,03562
$\gamma_{+200HC218}$	-0,43565	0,02808	-0,02095	0,00135	-15,515	0,00000
Q_{wMK222}	0,49408	0,02965	0,02497	0,00150	16,666	0,00000
Q_{wrz1B}	-0,06651	0,02075	-0,00131	0,00041	-3,205	0,00139
L_{rz3B}	-0,05118	0,02023	-0,00099	0,00039	-2,529	0,01159

TABELA 4

Podsumowanie modelu wskaźnika W_2 — z eksperymentów

N = 1012	Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: W_2 $R = 0,86576578$ $R^2 = 0,74955039$ Skoryg. $R^2 = 0,74867622$ $F(4,1146) = 857,44$ $p < 0,0000$ Błąd std. estymacji: 0,39830					
	BETA	Błąd st. BETA	B	Błąd st. B	t(1146)	poziom p
W. wolny			9,06285	0,43143	21,007	0,00000
Q_{wMP221}	-0,62877	0,01961	-0,06435	0,00201	-32,057	0,00000
Q_{wMK222}	0,32914	0,01959	0,05524	0,00329	16,805	0,00000
L_{rz1B}	0,13544	0,01732	0,00346	0,00044	7,821	0,00000
D_{nHC218}	-0,14772	0,02007	-0,00302	0,00041	-7,361	0,00000

TABELA 5

Podsumowanie modelu wskaźnika W_3 — z eksperymentów

N = 1012	Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: W_3 $R = 0,87159095$ $R^2 = 0,76310260$ Skoryg. $R^2 = 0,76041810$ $F(4,1136) = 990,70$ $p < 0,0000$ Błąd std. estymacji: 17,606					
	BETA	Błąd st. BETA	B	Błąd st. B	$t(1136)$	poziom p
W. wolny			523,28335	26,18741	19,98225	0,00000
D_{pHC218}	-0,55099	0,02052	-0,41846	0,01559	-26,84573	0,00000
P_{HC218}	-0,40800	0,01970	-0,42585	0,02056	-20,71056	0,00000
L_{rz2B}	-0,10764	0,01674	-0,57460	0,08936	-6,43001	0,00000
D_{nHC209}	0,09070	0,01598	0,07837	0,01381	5,67502	0,00000

TABELA 6

Podsumowanie modelu wskaźnika W_4 — z eksperymentów

N = 1012	Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: W_4 $R = 0,77448878$ $R^2 = 0,59983287$ Skoryg. $R^2 = 0,59704286$ $F(7,1004) = 214,99$ $p < 0,0000$ Błąd std. estymacji: 22,374					
	BETA	Błąd st. BETA	B	Błąd st. B	$t(1004)$	poziom p
W. wolny			707,76019	44,26484	15,98922	0,00000
L_{rz2B}	-0,20956	0,03280	-1,05699	0,16546	-6,38818	0,00000
D_{nHC209}	-0,61291	0,03484	-0,47692	0,02711	-17,59054	0,00000
P_{HC209}	-0,20095	0,03323	-0,72106	0,11925	-6,04653	0,00000
L_{rz1B}	-0,06712	0,02600	-0,07922	0,03068	-2,58181	0,00997
D_{nHC218}	0,14300	0,02502	0,12690	0,02221	5,71414	0,00000
Q_{wMK222}	-0,17678	0,03640	-1,27827	0,26318	-4,85695	0,00000
Q_{wrz2B}	-0,13357	0,02906	-0,25778	0,05609	-4,59620	0,00000

W tabelach 3–9 podsumowujących podano wartości estymowanych współczynników modeli (B) oraz ich wartości standaryzowane (BETA), średnie błędy szacowania współczynników regresji i poziomy ich istotności (p), a także parametry oceny dokładności dopasowania modeli wykorzystywane do weryfikacji wyznaczonych modeli, takie jak:

- współczynnik determinacji R^2 ,
- wartość testu Fishera–Snedecora F ,
- błąd standardowy estymacji (błąd predykcji).

TABELA 7

Podsumowanie modelu wskaźnika W_5 — z eksperymentów

N = 1012	Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: W_5 $R = 0,85692225$ $R^2 = 0,73431574$ Skoryg. $R^2 = 0,73219662$ $F(8,1003) = 346,52$ $p < 0,0000$ Błąd std. estymacji: 27,954					
	BETA	Błąd st. BETA	B	Błąd st. B	$t(1003)$	poziom p
W. wolny			1184,9764	39,3880	30,08470	0,00000
L_{rz2B}	-0,14328	0,02465	-1,10755	0,19050	-5,81378	0,00000
D_{pHC209}	-0,48781	0,02082	-0,69491	0,02966	-23,42926	0,00000
$\gamma_{+200HC218}$	0,31600	0,02259	3,33094	0,23811	13,98919	0,00000
L_{rz3B}	-0,16332	0,02030	-0,69230	0,08605	-8,04542	0,00000
Q_{wrz2B}	-0,15883	0,02081	-0,46977	0,06154	-7,63383	0,00000
Q_{wMP221}	0,16245	0,02110	1,15528	0,15009	7,69728	0,00000
D_{nHC209}	-0,16786	0,02364	-0,20018	0,02820	-7,09914	0,00000
Q_{wrz1B}	-0,12695	0,02107	-0,54869	0,09105	-6,02614	0,00000

TABELA 8

Podsumowanie modelu wskaźnika W_6 — z eksperymentów

N = 1012	Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: W_6 $R = 0,85857643$ $R^2 = 0,73715349$ Skoryg. $R^2 = 0,73558425$ $F(6,1005) = 469,75$ $p < 0,0000$ Błąd std. estymacji: 0,06351					
	BETA	Błąd st. BETA	B	Błąd st. B	$t(1005)$	poziom p
W. wolny			2,06149	0,07018	29,37419	0,00000
L_{rz2B}	-0,25072	0,02395	-0,00443	0,00042	-10,46689	0,00000
D_{pHC209}	-0,38416	0,01770	-0,00125	0,00006	-21,69923	0,00000
$\gamma_{+200HC218}$	0,42192	0,02371	0,01017	0,00057	17,79245	0,00000
L_{rz3B}	-0,15302	0,01986	-0,00148	0,00019	-7,70414	0,00000
Q_{wrz2B}	-0,16779	0,01883	-0,00113	0,00013	-8,91208	0,00000
Q_{wMK222}	-0,13108	0,02214	-0,00332	0,00056	-5,92083	0,00000

TABELA 9

Podsumowanie modelu wskaźnika W_7 — z eksperymentów

N = 1012	Podsumowanie regresji zmiennej zależnej: W_7 $R = 0,87876313$ $R^2 = 0,77222463$ Skoryg. $R^2 = 0,77091054$ $F(6,1040) = 587,65$ $p < 0,0000$ Błąd std. estymacji: 8,2107					
	BETA	Błąd st. BETA	B	Błąd st. B	t(1040)	poziom p
W. wolny			436,1384	14,89881	29,27337	0,00000
D_{pHC218}	-0,65343	0,02257	-0,22113	0,00764	-28,95716	0,00000
P_{HC218}	-0,23261	0,02192	-0,10774	0,01015	-10,61266	0,00000
D_{pHC209}	-0,32856	0,01901	-0,15000	0,00868	-17,28639	0,00000
$Q_{wKL221/222}$	-0,20495	0,01787	-0,14463	0,01261	-11,46609	0,00000
D_{nHC209}	0,17524	0,01955	0,06699	0,00748	8,96198	0,00000
Q_{wrz1B}	-0,10711	0,01828	-0,14642	0,02499	-5,85988	0,00000

W tabeli 10 zestawiono najważniejsze parametry charakteryzujące poszczególne modele wskaźników.

TABELA 10

Podsumowanie najważniejszych parametrów oceny modeli

Model	n	$R^2, \%$	F, p	S_e	$\delta = \frac{S_e}{\bar{W}_i}, \%$	d
W_1	6	67,24	$F = 343,75, p < 0,0000$	0,1414	9,43	1,07
W_2	4	74,95	$F = 857,44, p < 0,0000$	0,3983	7,64	0,95
W_3	4	76,31	$F = 462,09, p < 0,0000$	17,6060	32,88	0,71
W_4	7	59,98	$F = 214,99, p < 0,0000$	22,3740	62,32	0,27
W_5	8	73,43	$F = 346,52, p < 0,0000$	27,9540	49,66	0,28
W_6	6	73,71	$F = 469,75, p < 0,0000$	0,0635	68,81	0,19
W_7	6	77,22	$F = 587,65, p < 0,0000$	8,2107	15,72	0,57

gdzie:

- n — liczba zmiennych niezależnych w modelu,
- S_e — błąd standardowy estymacji modelu,
- p — poziom istotności modelu,
- δ — błąd względny estymacji modelu, %,
- d — statystyka Durбина–Watsona,
- \bar{W}_i — średnie wartości wskaźników obliczone z danych empirycznych, %.

W celu określenia poprawności budowy oraz efektywności otrzymanych modeli wskaźników przeprowadzono następujące badania i obliczenia:

- zweryfikowano istotność statystyczną modeli testem Fishera–Snedecora;
- zbadano stopień wyjaśnienia zmienności wskaźników przez zmienne wchodzące do modelu wyrażony współczynnikiem R^2 ;
- określono błędy standardowe estymacji współczynników (B) oraz błędy predykcji S_e modeli;
- przeanalizowano znak wartości współczynników występujących przy zmiennych dla poszczególnych wskaźników oceny, który decyduje o kierunku oddziaływań pomiędzy wskaźnikami a danymi procesowymi;
- przeanalizowano kolejność wprowadzania zmiennych do modeli (regresja krokowa);
- określono wpływ poszczególnych zmiennych na wartość wskaźników oceny wyrażony standaryzowanym współczynnikiem regresji BETA.

Analizując przedstawione powyżej modele, należy stwierdzić bardzo wysoką istotność statystyczną współczynników przy większości zmiennych niezależnych ($p = 0,0000(..) < p_{\text{zat.}} = 0,05$), a tym samym istotność parametrów technologicznych wpływających na szacowane wskaźniki. Wartość testu Fishera–Snedecora, służącego m.in. do weryfikacji hipotezy istotności całego modelu poprzez weryfikację równocześnie istotności współczynnika kierunkowego, współczynnika determinacji R^2 oraz istotności liniowego związku między analizowanymi zmiennymi, rozstrzyga o istotności statystycznej wszystkich powyższych modeli z bardzo wysokim prawdopodobieństwem (odrzućcie hipotezy odwrotnej przy bardzo niskim poziomie istotności $p < 0,0000..0$).

Stopień wyjaśnienia ogólnej zmienności wskaźników przez poszczególne modele, wyrażony współczynnikiem determinacji R^2 , jest zróżnicowany. Najwyższą wartość osiąga dla modelu wskaźnika W_7 (77,22%) i jest to wysoka wartość zważywszy na technologiczny charakter modelu.

Błędy standardowe estymacji S_e , δ , informujące o przeciętnej wielkości odchyłeń empirycznych wartości zmiennych zależnych od wartości wyliczonych z modeli, czyli o stopniu „dopasowania” modeli do danych empirycznych, charakteryzują się dużymi rozbieżnościami. Dla modeli wskaźników W_1 , W_2 , W_7 , wartości błędów mieszczą się w przedziale od 7,64 do 15,72%, natomiast dla modeli W_3 , W_4 , W_5 , W_6 osiągają dużo wyższe wartości do ok. 69%, co wskazuje na bardzo złą identyfikację procesu przez te modele i ograniczone ich możliwości prognostyczne.

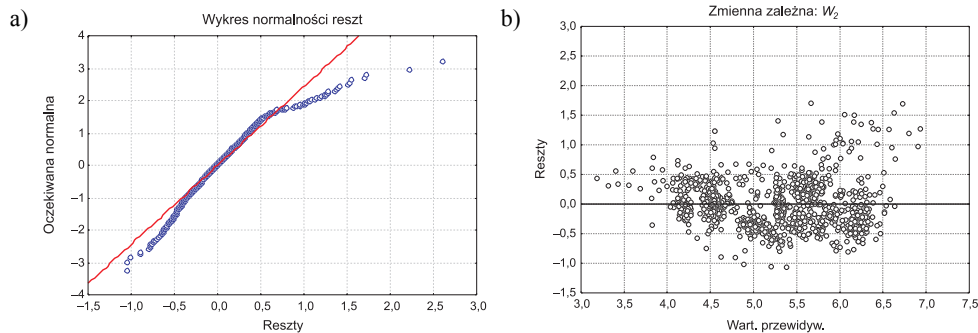
Dokonując porównania najistotniejszych parametrów charakteryzujących modele (tab. 10), uwzględniając siłę i kierunek wpływu zmiennych na wartość wskaźników oceny, a także biorąc pod uwagę technologiczny charakter zmiennych uwzględnionych w modelach, wytypowano dwa najkorzystniejsze modele wskaźników: W_2 — oceniający proces w początkowym jego etapie oraz W_7 — oceniający końcowy efekt mielenia i klasyfikacji rudy.

Model wskaźnika W_2 uzależniony jest od małej ilości zmiennych. Jego struktura jest prosta, co wiąże się z większymi możliwościami wykorzystania go w zadaniach sterowania. Cztery zmienne objaśniające wykazują wysoki poziom istotności statystycznej. Najsilniejszy wpływ na modelowany wskaźnik ma ilość wody kierowanej do młyna prętowego (Q_{wMP221}), o czym świadczy najwyższa bezwzględna wartość standaryzowanego współczynnika BETA przy zmiennej Q_{wMP221} oraz kolejność jej wprowadzenia do modelu (w pierwszym kroku). Siła oddziaływania parametru Q_{wMP221} na wartość szacowanego wskaźnika jest ujemna, co oznacza, że zwiększenie ilości wody do młyna prętowego o $1 \text{ m}^3/\text{h}$ powoduje korzystne zmniejszenie się wartości wskaźnika o ok. $0,064 \text{ kWh/Mg}$ rudy. Równie istotny wpływ na zmienność tego wskaźnika ma ilość wody dostarczanej do młyna kulowego (Q_{wMK222}). Siła oddziaływań pomiędzy wartością wskaźnika a ilością wody jest w tym przypadku dodatnia. Wraz ze wzrostem ilości wody w młynie kulowym rośnie wartość rozpatrywanego wskaźnika. Odmienny kierunek zależności ilości wody w młynie prętowym i kulowym może być związany z miejscem zabudowania młynów (młyn prętowy — ciąg rudy piaskowcowej, młyn kulowy — ciąg rudy węglanowej) oraz przeznaczeniem technologicznym obu młynów (młyn prętowy — mielenie wstępne, młyn kulowy — domielanie). Błąd standardowy estymacji modelu równy jest $0,3983$ i jest interpretowany jako przeciętne odchylenie wskaźnika w próbie od wskaźnika teoretycznego — wyznaczonego z modelu. Wartość współczynnika determinacji $R^2 = 0,7495$ oznacza, że ok. 75% zmienności szacowanego wskaźnika jest wyjaśnione przez model. Wysoki stopień wyjaśnienia wskaźnika oraz niskie błędy estymacji świadczą o dobrym dopasowaniu modelu do rzeczywistych danych procesowych i zadowalającej identyfikacji procesu przez model.

W analogiczny sposób można interpretować wyniki modelowania wskaźnika W_7 . Wskaźnik ten, uwzględniający różne właściwości przerabianej w układzie mielenia i klasyfikacji rudy (ciągi rudy piaskowcowej i węglanowej), oceniający proces na jego końcowym etapie, najsilniej zależy od ujemnie skorelowanej z nim wartości gęstości przelewu hydrocyklonów ciągu rudy piaskowcowej (D_{pHC218}) oraz ciśnienia nadawy (P_{HC218}) na hydrocyklony $HC218$. Zmniejszenie wartości tych dwu parametrów korzystnie wpływa na wzrost wartości wskaźnika oceny W_7 . Wartość współczynnika determinacji $R^2 = 0,7722$ jest wyższa w stosunku do modelu wskaźnika W_2 , co świadczy o lepszym wyjaśnieniu zmienności wskaźnika W_7 przez opisujący go model. Natomiast zdolności predykcyjne modelu wskaźnika W_7 są gorsze. Model przewiduje wartości wskaźnika W_7 z błędem średnim ponad 15% , wobec $7,64\%$ dla modelu wskaźnika W_2 .

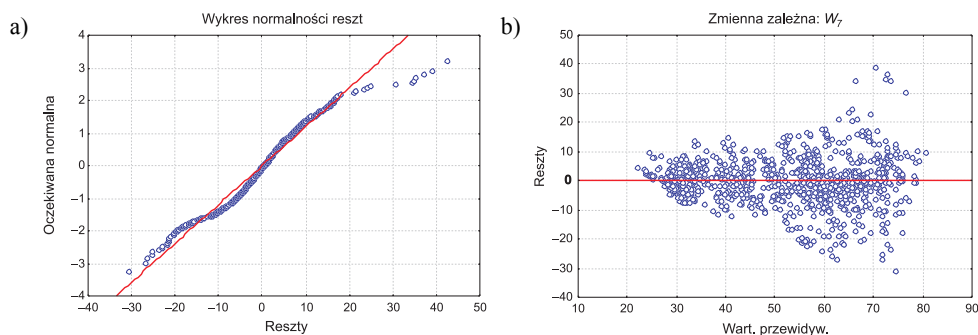
W celu ostatecznej oceny i weryfikacji wytypowanych dwu modeli przeprowadzono analizę ich reszt na podstawie wartości statystyki Durбина–Watsona oraz interpretacji wykresów (rys. 2 i 3).

Analiza wartości resztowych modeli pozwala wykryć istotne odstępstwa od poprawnej analizy regresji, prawidłowo skonstruowany model powinien charakteryzować się odpowiednimi właściwościami reszt (normalność reszt, stałość wariancji, brak autokorelacji). Należy więc sprawdzić spełnienie założeń klasycznej metody najmniejszych sumy kwadratów, którą to metodą szacowane są współczynniki modeli.



Rys. 2. Dla modelu wskaźnika W_2 :

a) wykres normalności reszt, b) wykres wartości przewidywanych względem wartości resztowych



Rys. 3. Dla modelu wskaźnika W_7 :

a) wykres normalności reszt; b) wykres wartości przewidywanych względem wartości resztowych

Najważniejszymi założeniami tej metody są [5]:

1) Normalność rozkładu reszt modelu

Założenie to nie jest konieczne dla dopasowania modelu metodą najmniejszej sumy kwadratów, lecz dla weryfikacji istotności otrzymanych parametrów. Jeśli założenie o normalności jest zdecydowanie naruszone, to oceny istotności współczynników regresji mogą być zaburzone. Procedury analizy regresji są jednak odporne na niewielkie odstępstwa od tego założenia. Analizując wykresy normalności reszt wytypowanych dwu modeli (rys. 2a i 3a) można uznać, że każdy z nich spełnia założenie o normalności rozkładu reszt.

2) Brak korelacji składników losowych (reszt)

Wystąpienie autokorelacji powoduje, że estymatory otrzymane metodą najmniejszej sumy kwadratów przestają być najefektywniejszymi estymatorami. Mogą więc być obciążone dodatkowym błędem. Często jednak założenie o braku autokorelacji w równaniach regresji nie jest spełnione. Najczęściej występującą autokorelacją jest autokorelacja pierwszego rzędu.

Oznacza to, że składnik resztowy e_t zależy od:

- składnika e_{t-1} dla pomiaru poprzedniego,
- nowego składnika losowego ε_t .

Należy więc sprawdzić, czy reszty modeli podlegają autokorelacji pierwszego rzędu. Do tego celu służy test Durбина–Watsona. Wartości testu zawierają się w przedziale (0–4). Wartości zbliżone do 0 informują o autokorelacji dodatniej, z kolei wartości bliskie 4 wskazują na autokorelację ujemną. Jeśli autokorelacja reszt nie występuje, wówczas wartości bliskie są 2. Analizując wartości d testu Durбина–Watsona (tab. 10) można stwierdzić, szczególnie dla modeli wskaźników W_4 , W_5 , W_6 , dodatnią tendencję autokorelacji wartości resztowych wszystkich modeli.

3) Stałość wariancji składnika losowego dla wszystkich obserwacji (założenie homoscedastyczności)

Warunek ten zakłada, że czynniki nie ujęte w modelu mają taką samą zmienność (rozrzut) niezależnie od numeru obserwacji. Założenie to powinno być spełnione, by estymatory modeli (współczynniki) charakteryzowały się pożądanymi właściwościami BLUE (*Best Linear Unbiased Estimators*), czyli najmniejszą wariancją, liniowością względem średnich wartości zmiennych niezależnych oraz brakiem obciążenia błędem.

Aby sprawdzić spełnienie założenia o homoscedastyczności, należy przeanalizować wykresy rozrzutu reszt względem wartości przewidywanych (rys. 2b i 3b). Dla modelu wskaźnika W_7 wariancja reszt wzrasta wraz ze wzrostem wartości przewidywanych, natomiast dla modelu wskaźnika W_2 widoczna jest chmura punktów bez wyraźnej tendencji wzrostu (lub spadku) wariancji reszt przy wzroście wartości przewidywanych. Można więc przyjąć, że założenie o stałości wariancji składnika losowego najbardziej zachowane jest dla modelu wskaźnika W_2 .

Diagnostyka modeli przy pomocy analizy reszt wykazuje, że pomimo niewielkich odstępstw od powyższych założeń modele wskaźników W_2 i W_7 są prawidłowo skonstruowane.

6. Podsumowanie

Na podstawie informacji dostarczanych przez system kontrolno-pomiarowy zainstalowany w zakładzie można określić modele matematyczne procesu uwzględniające pełny zakres zależności pomiędzy zmiennymi na poszczególnych etapach procesu. Modele mogą wykazywać właściwości mniej lub bardziej użytkowe w zależności od rodzaju opisujących je zmiennych procesowych (sterujących, objaśniających).

Określono modele regresyjne w postaci równań liniowych, identyfikujące pracę różnych elementów (składników) procesu (młynów, ciągów technologicznych) oraz całego procesu mielenia i klasyfikacji.

Łatwa konstrukcja zbudowanych modeli oraz prosta ich interpretacja czyni modele regresji liniowej bardzo popularnymi i chętnie wykorzystywanymi do celów identyfikacji modelowanych obiektów. Modele regresyjne są również praktycznymi i uniwersalnymi narzędziami oceny obiektu badań z możliwością bezpośredniego ich wykorzystania w optymalizacji i sterowaniu obiektem, ponieważ podają funkcję krzywej regresji.

W celu efektywnego modelowania procesów przemysłowych należy weryfikować jakość danych procesowych. Dane do obliczeń powinny być uśredniane w krótkich okresach czasu w celu filtracji chwilowych wahań parametrów. Brak jednej ze zmiennych powinien skutkować eliminacją z obliczeń wartości wszystkich zmiennych z tego okresu pomiarowego. Dane fałszywe, wynikające z błędów pomiarowych, awarii aparatury pomiarowej lub zakłóceń procesu powinny, być usuwane.

LITERATURA

- [1] *Draper N.R., Smith H.*: Analiza regresji stosowana. Warszawa, PWN 1973
- [2] *Krawczykowski D.*: Zużycie energii elektrycznej jako składnik wskaźników oceny i optymalizacji pracy węzła mielenia i klasyfikacji rudy miedzi. Praca doktorska, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii AGH, Kraków, 2007 (praca niepublikowana)
- [3] *Saramak D., Tumidajski T., Gawenda T.*: Dekompozycja układów wzbogacania rud miedzi i jej efekty na przykładzie Oddziału Zakłady Wzbogacania Rud KGHM „Polska Miedź” SA, *Wiśnik Technologicznego Uniwersytetu Podilla*, 6, 1, 1, 2003, 206–212
- [4] *Saramak D.*: Optymalizacja uzysku metali w Zakładach Wzbogacania Rud w KGHM „Polska Miedź” SA., Kraków, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii AGH 2004 (praca doktorska, niepublikowana)
- [5] *Stanisz A.*: Przystępny kurs statystyki z wykorzystaniem programu STATISTICA PL na przykładach z medycyny. Kraków, Wydane przez StatSoft Polska Sp. z o.o. 2000
- [6] *Trybalski K., Krawczykowski D.*: Energetyczne wskaźniki oceny procesu mielenia rudy miedzi i ich modelowanie. *UWND AGH, Górnictwo i Geoinżynieria*, 4, 2005
- [7] *Trybalski K., Krawczykowski D.*: Modelowanie przemysłowego procesu mielenia rudy z wykorzystaniem energetycznych wskaźników oceny. *UWND AGH, Górnictwo i Geoinżynieria*, 3/1, 2006, 327–345

