

*Władysław Mikołajczyk\*, Krzysztof Filek\**

## ZASTOSOWANIE RÓWNANIA BILANSU DO WYBRANYCH ZJAWISK FIZYCZNYCH ZACHODZĄCYCH W WYROBISKACH GÓRNICZYCH\*\*

---

### 1. Równanie bilansu

Jak wiadomo, pewne wielkości fizyczne można bilansować, stąd też takie procesy, jak przewodzenie ciepła, filtracja gazów w ośrodku porowatym czy dyfuzja, opisać można jednym równaniem. W tym celu prowadzi się rozumowanie takie jak przy wyprowadzaniu równania ciągłości – zakłada się ośrodek ciągły, w którym wyodrębnia się dowolną objętość  $\Omega$  ograniczoną powierzchnią  $F$ , którą orientuje się wektorem normalnym na zewnątrz analizowanego obszaru.

Przyjmuje się następujące oznaczenia:

- $\bar{G}$  — natężenie strumienia wielkości fizycznej, czyli ilość transportowanej wielkości fizycznej przypadająca na jednostkową powierzchnię w jednostce czasu;
- $\Gamma$  — gęstość (koncentracja) analizowanej wielkości fizycznej, czyli jej ilość zawarta w jednostce objętości;
- $f$  — funkcja źródła, czyli funkcja określająca dopływ (lub odpływ) rozważanych jednostek fizycznych odniesiona do wyodrębnionej objętości; przedstawia ona ilość jednostek fizycznych dopływających (lub odpływających) do jednostki objętości w jednostce czasu.

W celu dokonania bilansu danych jednostek fizycznych określa się następujące wielkości:

- Ilość analizowanej wielkości fizycznej  $\Gamma$  zgromadzonej w objętości  $\Omega$  wynosi

$$\iiint_{\Omega} \Gamma \Omega \quad (1)$$

---

\* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

\*\* Publikacja wykonana w ramach prac statutowych nr 11.11.100.850

natomiast jej zmiana w czasie  $dt$  w całej objętości  $\Omega$  jest następująca

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} d\Omega dt \quad (2)$$

- Ilość wielkości fizycznych  $\bar{G}$  przepływających przez powierzchnię  $F$  w czasie  $dt$ ; po skorzystaniu z twierdzenia Greena zapisać można następująco

$$\iint_F \bar{G} dF dt = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \bar{G} d\Omega dt \quad (3)$$

- Wydajność źródeł jednostek fizycznych  $f$  w objętości  $\Omega$  w czasie  $dt$  wynosi

$$\iiint_{\Omega} f d\Omega dt \quad (4)$$

Korzystając z fizycznej zasady zachowania, można napisać

$$-\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \bar{G} d\Omega dt + \iiint_{\Omega} f d\Omega dt = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} d\Omega dt \quad (5)$$

Na obszar  $\Omega$  nie nałożono żadnych ograniczeń, a zatem z twierdzenia o sumie całek otrzymuje się następujące równanie

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{G} - f = 0 \quad (6)$$

Jeśli wielkością ekstensywną w równaniu (6) jest masa płynu, a wielkością intensywną jego gęstość, to przedstawia ono klasyczne równanie ciągłości. Jeśli natomiast przez  $\bar{G}$ ,  $\Gamma$  i  $f$  oznaczy się inne wielkości fizyczne, które można bilansować, to równaniem (6) opisać można wymienione wcześniej procesy fizyczne:

- przewodzenie ciepła,
- przepływ gazów przez ośrodek porowaty,
- dyfuzję gazów.

## 2. Przewodzenie ciepła

Jak wiadomo z termodynamiki, przewodzenie ciepła jest zjawiskiem polegającym na przenoszeniu energii wewnątrz ośrodka materialnego lub z jednego ośrodka do drugiego przy ich bezpośrednim zetknięciu. Ten sposób wymiany ciepła jest charakterystyczny przede wszystkim dla ciał stałych. W cieczach i gazach przewodzenie ciepła w czystej postaci, bez równoczesnego udziału innych sposobów wymiany ciepła, występuje rzadziej [3–5, 8].

Niech  $\bar{G}$  w równaniu (6) oznacza natężenie strumienia ciepła, które zgodnie z prawem Fouriera wynosi

$$\bar{G} = -\lambda \text{grad } T \quad (7)$$

gdzie:

$\lambda$  — współczynnik przewodzenia ciepła, którego wartość w zależności od rodzaju materiału zmienia się w bardzo szerokich granicach; należy pamiętać, że przewodność cieplna gazów na ogół w miarę wzrostu temperatury rośnie i jest mniejsza od przewodności cieplnej cieczy, natomiast przewodność cieplna cieczy w miarę wzrostu temperatury maleje;

$T$  — temperatura.

Niech ponadto  $\Gamma$  określa wielkość zdefiniowaną następująco

$$\Gamma = \frac{c\rho\Omega T}{\Omega} = c\rho T \quad (8)$$

gdzie  $c$  i  $\rho$  to odpowiednio ciepło właściwe i gęstość ośrodka przewodzącego ciepło.

Równanie (6), po uwzględnieniu (7) i (8), przyjmie postać

$$\text{div}(\lambda \text{grad } T) + f = \frac{\partial}{\partial t}(c\rho T) \quad (9)$$

Jest to ogólne równanie przewodzenia ciepła; prawa strona tej zależności wyraża przyrost entalpii ośrodka w analizowanym obszarze. Jeśli ponadto założymy, że  $\lambda$ ,  $c$  i  $\rho$  są stałe, to równanie (9) przyjmie postać

$$a\Delta T + \frac{f}{c\rho} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (10)$$

gdzie:

$$\Delta T = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

$a = \frac{\lambda}{c\rho}$  — współczynnik wyrównywania temperatury zwany również współczynnikiem przewodnictwa temperaturowego.

Jeżeli ponadto w analizowanym obszarze nie ma źródeł energii ( $f = 0$ ), to równanie (10) przyjmuje postać

$$a\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

Jest to równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu typu parabolicznego, nazywane równaniem Fouriera.

W przypadku ustalonego procesu przewodzenia ciepła otrzymamy równanie Laplace'a

$$\Delta T = 0 \quad (12)$$

a w przypadku ustalonego przewodzenia ciepła przy istnieniu wewnętrznych źródeł ciepła – znane w literaturze technicznej równanie Poissona

$$\Delta T + \frac{f}{\lambda} = 0 \quad (13)$$

Powyższe równania wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi są matematycznym opisem problemów przewodnictwa cieplnego.

### Przykład obliczeniowy

Obliczyć wpływ grubości ( $\delta_2$ ) warstwy pianki poliuretanowej nałożonej na zewnętrzną stronę tamy pożarowej wykonanej z cegły o grubości  $\delta_1 = 0,5$  m na wielkość przewodzonego przez nią strumienia ciepła oraz określić temperaturę ( $T_z$ ) zewnętrznej ścianki pianki poliuretanowej przy ustalonym przewodzeniu ciepła. Do obliczeń przyjąć następujące dane:

— pole powierzchni tamy pożarowej:

$$S = 14 \text{ m}^2,$$

— stała temperatura wewnętrznej ścianki tamy, równa temperaturze gazów pożarowych:

$$T_p = 403 \text{ K},$$

— współczynnik przewodzenia ciepła przez mur tamy pożarowej:

$$\lambda_1 = 0,8 \text{ W/(m}\cdot\text{K)},$$

— stała temperatura powietrza w wyrobisku od zewnętrznej strony tamy (czyli od strony pianki poliuretanowej):

$$T_w = 300 \text{ K},$$

— współczynnik przejmowania ciepła od strony zewnętrznej (wartość współczynnika  $\alpha_z$  określono według zależności podanych w pracach [4, 5, 8, 9]):

$$\alpha_z = 6,23 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)},$$

— współczynnik przewodzenia ciepła przez piankę poliuretanową, którą pokryto tamę pożarową:

$$\lambda_2 = 0,03 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}.$$

Wielkość strumienia ciepła  $Q$  oblicza się ze znanego wzoru Pecleta [4]:

$$Q = S k (T_p - T_w),$$

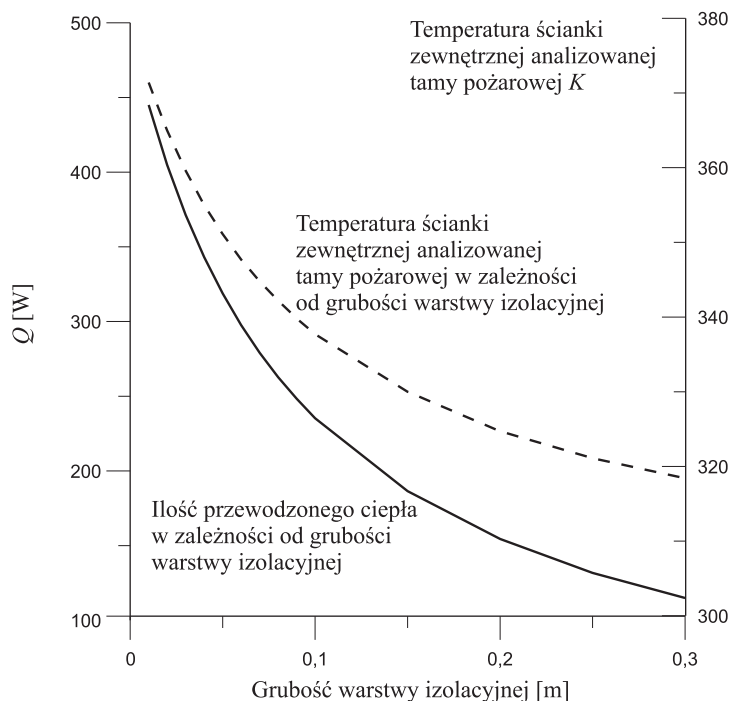
gdzie  $k$  – współczynnik przenikania ciepła dla dwuwarstwowej przegrody płaskiej przy znanej temperaturze ścianki wewnętrznej:

$$k = \frac{1}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_z}}.$$

Po wyliczeniu wartości strumienia  $Q$  temperaturę ścianki zewnętrznej  $T_z$  pianki poliuretanowej oblicza się z zależności:

$$T_z = T_p - \frac{Q}{S} \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right).$$

Na rysunku 1 przedstawiono otrzymane wyniki obliczeń strumienia ciepła ( $Q$ ) przewodzonego przez analizowaną tamę oraz temperaturę jej ścianki zewnętrznej ( $T_z$ ) w zależności od grubości warstwy izolacyjnej ( $\delta_2$ ).



**Rys. 1.** Ilość ciepła  $Q$  przewodzonego przez analizowaną tamę pożarową oraz temperatura jej ścianki zewnętrznej w zależności od grubości warstwy izolacyjnej

### 3. Przepływ gazu w ośrodku porowatym

Niech w zależności (6) poszczególne wielkości oznaczają:

$$\begin{aligned}\bar{G} = \rho \bar{w} & \text{ — strumień gazu przepływającego przez ośrodek porowaty,} \\ \Gamma = m\rho & \text{ — masa gazu zawarta w jednostce objętości ośrodka o porowatości } m, \\ f = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} & \text{ — zmiana gęstości sorpcji } \rho_s \text{ gazu w czasie } t.\end{aligned}$$

Wobec tego równanie (6) zapisać można w następującej postaci

$$-\operatorname{div}(\rho \bar{w}) = \frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \frac{\partial}{\partial t} \rho_s \quad (14)$$

Jeśli założymy izotermiczny przepływ gazu, czyli

$$\rho = c_o p \quad (15)$$

oraz przyjmiemy, że izotermę sorpcji  $\rho_s$  zgodnie z prawem Henry'ego wyraża zależność

$$\rho_s = \Theta p \quad (16)$$

a prędkość przepływu gazu w ośrodku porowatym określa prawo Darcy'ego

$$\bar{w} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p \quad (17)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\bar{w} & \text{ — prędkość filtracji gazu w ośrodku porowatym,} \\ \mu & \text{ — współczynnik lepkości dynamicznej gazu,} \\ k & \text{ — współczynnik przepuszczalności ośrodka,} \\ p & \text{ — ciśnienie gazu,} \\ c_o, \Theta & \text{ — stałe,}\end{aligned}$$

to równanie (14) można napisać w następującej postaci

$$\operatorname{div} \left[ c_o p \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} p \right] = \frac{\partial}{\partial t}(m c_o p) + \frac{\partial}{\partial t}(\Theta p) \quad (18)$$

Jeśli ponadto założymy, że  $\mu, m = \text{const}$ , to po prostych przekształceniach równanie (18) przyjmie następującą postać [3, 8]

$$\Delta p^2 = \left( \frac{2\mu}{k} (m + \Theta) \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (19)$$

gdzie:

$$\Delta p^2 = \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2}.$$

Natomiast jeśli zaniedbamy zmianę sorpcji, to z równania (19) otrzymamy [3, 8]

$$\Delta p^2 = \frac{2\mu m}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (20)$$

W przypadku osiowosymetrycznego procesu filtracji równanie (19) przyjmie znaną w literaturze technicznej postać [2, 3, 8, 9]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial p^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \left( \frac{2\mu}{k} (m + \theta) \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (21)$$

Jeśli założymy przepływ ustalony oraz przyjmiemy symetrię pola ciśnień względem kąta  $\varphi$ , to równanie (21) uprości się do postaci

$$\frac{\partial^2 p}{\partial p^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (22)$$

### Przykład obliczeniowy

Obliczyć natężenie przepływu powietrza przez określony pas zrobów ściany zawałowej prowadzonej do granic, przyjmując następujące dane:

— długość pasa zrobów, liczona wzdłuż chodników podścianowych:

$$l = 100 \text{ m},$$

— długość drogi przepływającego przez zroby powietrza (równa długości ściany):

$$L = 200 \text{ m},$$

— wysokość eksploatowanej warstwy (równa wysokości ściany):

$$h = 2 \text{ m},$$

— stała różnica ciśnień na analizowanym odcinku pomiędzy chodnikiem podścianowym i nadścianowym:

$$\Delta p = 100 \text{ Pa},$$

— współczynnik lepkości dynamicznej powietrza:

$$\mu = 18,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)},$$

— współczynnik przepuszczalności analizowanego odcinka zrobów:

$$k = 10^{-8} \text{ m}^2.$$

Wielkość powierzchni  $S$  przepływu powietrza przez zroby zawałowe jest trudna do ścisłego określenia. Wielu autorów zajmujących się tą problematyką zakłada, że zawał skał stropowych sięga do czterokrotnej grubości eksploatowanej warstwy [7]. W oparciu o dostępną literaturę z analizowanej problematyki, uwzględniając osiadanie warstw stropowych oraz przedstawione w pracy [6] pomiary kopalniane, można przyjąć, że wysokość, do jakiej sięga przepływ powietrza w zrobach, wynosi 3,5 grubości eksploatowanej warstwy [7]. Zatem powierzchnia  $S$ , przez którą przepływa powietrze, wyniesie  $S = 3,5 \cdot h \cdot l$ .

Przepływ powietrza przez strefę zawału o skończonych wymiarach po upływie dłuższego czasu, przy niezmiennych się wartościach ciśnień w chodnikach przyścianowych, można uważać za ustalony. Jeśli przyjmiemy ponadto przepływ jednowymiarowy, pole bezźródłowe, przemianę izotermiczną oraz stałe wartości  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $k$ , po podstawieniu równania (17) do (14) otrzymamy:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = 0.$$

Całka ogólna tego równania wynosi:

$$p = C_1 x + C_2.$$

Dla warunków:

$$x = 0, p = p_1 = p_o,$$

$$x = L, p = p_2 = p_o - \Delta p,$$

otrzymuje się:

$$p = p_o - \frac{\Delta p}{L} x.$$

Po zróźniczkowaniu powyższej zależności otrzymamy:

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{\Delta p}{L},$$

a zatem strumień powietrza przepływający przez jednostkę powierzchni jest równy:

$$q = \frac{k \Delta p}{\mu L},$$

a całkowita ilość powietrza przepływająca przez cały analizowany pas zrobów wynosi:

$$Q = 3,5 \cdot h \cdot l \cdot \frac{k \Delta p}{\mu L} = 3,5 \cdot 2,0 \cdot 100 \cdot \frac{10^{-8}}{18,1 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{100}{200} \text{ m}^3/\text{s} = 0,19 \text{ m}^3/\text{s}.$$



Wyliczone stosunkowo duże natężenie przepływu powietrza przez zroby ściany wynika stąd, że w założeniach do obliczeń nie uwzględniono ułożonych wzdłuż chodników podścianowych pasów podsadzkowych, których współczynnik przepuszczalności jest mniejszy niż zawału przynajmniej o rząd. Ponieważ ilość przepływającego przez ośrodek porowaty powietrza jest wprost proporcjonalna do współczynnika przepuszczalności, wobec tego zmniejszenie wartości  $k$  o rząd spowoduje również zmniejszenie ilości przepływającego przez zroby powietrza o rząd.

#### 4. Równanie dyfuzji

W płynach, w których istnieje gradient stężeń, przenoszenie masy odbywa się poprzez konwekcję oraz dyfuzję cząsteczkową. Pole stężeń w płynie kształtuje się w wyniku współdziałania obu wymienionych procesów. W takich przypadkach często stosuje się określenie „dyfuzja cząsteczkowa z nałożoną konwekcją” [1–3, 8, 9].

Jeśli przyjmiemy, że w analizowanym obszarze występuje przenoszenie masy tylko przez konwekcję, to po przyjęciu w równaniu (6) oznaczeń:

$$\begin{aligned} \Gamma &= c && \text{stężenie analizowanego gazu,} \\ \bar{G} &= \bar{w}c && \text{strumień danego gazu przenieszonego przez konwekcję,} \end{aligned}$$

równanie (6) przyjmie postać:

$$\frac{\partial(w_x c)}{\partial x} + \frac{\partial(w_y c)}{\partial y} + \frac{\partial(w_z c)}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t} - f = 0 \quad (23)$$

Jeśli ponadto uwzględnimy przenoszenie gazu  $A$  przez dyfuzję cząsteczkową o strumieniu równym  $q_A$ , to równanie (23) przyjmie postać:

$$\frac{\partial(w_x c + q_{Ax})}{\partial x} + \frac{\partial(w_y c + q_{Ay})}{\partial y} + \frac{\partial(w_z c + q_{Az})}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t} - f = 0.$$

Wobec tego równanie ciągłości dla dyfuzji nieustalanej zapisać można następująco:

$$\frac{\partial(w_x c)}{\partial x} + \frac{\partial(w_y c)}{\partial y} + \frac{\partial(w_z c)}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial q_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial q_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial q_{Az}}{\partial z} - f = 0 \quad (24)$$

gdzie:

- $f$  — źródło emisji gazu  $A$ , np. dopływ metanu z otaczającego górotworu,
- $c$  — stężenie analizowanego gazu,
- $q_A$  — strumień dyfundującego gazu,
- $w_x, w_y, w_z$  — składowe prędkości konwekcyjnej.

Po rozpisaniu trzech pierwszych członów lewej strony równania (24) oraz uwzględnieniu pochodnej substancjonalnej

$$\frac{Dc}{Dt} = w_x \frac{\partial c}{\partial x} + w_y \frac{\partial c}{\partial y} + w_z \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t} \quad (25)$$

otrzymamy równanie w postaci

$$c \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \frac{Dc}{Dt} + \frac{\partial q_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial q_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial q_{Az}}{\partial z} - f = 0 \quad (26)$$

Równanie (26) można traktować jako ogólne równanie dyfuzji cząsteczkowej przebiegającej jednocześnie z konwekcją. Równanie to można łatwo dostosować do innych rodzajów dyfuzji, np. termodyfuzji, wstawiając w miejsce  $q_A$  strumień dyfuzji termicznej  $q_T$ .

Ponieważ dla każdego z kierunków układu współrzędnych dla danego składnika można napisać

$$q_{Ax} = -D \frac{\partial c}{\partial x}, \quad q_{Ay} = -D \frac{\partial c}{\partial y}, \quad q_{Az} = -D \frac{\partial c}{\partial z} \quad (27)$$

gdzie  $D$  – współczynnik dyfuzji, to wprowadzając zależności (27) do równania (26), otrzymamy

$$c \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \frac{Dc}{Dt} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) + f \quad (28)$$

Równanie (28) opisuje nieustaloną dyfuzję cząsteczkową z nałożoną konwekcją, zachodzącą w trzech kierunkach w dwuskładnikowym płynie ściślimym. Równanie to znane jest w literaturze jako drugie prawo Ficka [2].

#### LITERATURA

- [1] *Hobler T.*: Dyfuzyjny ruch masy i absorbery. Warszawa, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 1976
- [2] *Kawala Z., Pająk M., Ziółkowski Z.*: Przenoszenie pędu i masy. Wrocław, Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej 1978
- [3] *Pawiński J., Roszkowski J., Strzeмиński J.*: Przewietrzanie kopalń. Katowice, Śląskie Wydawnictwo Techniczne 1995
- [4] *Skoczylas A.*: Przenoszenie ciepła. Wrocław, 1999
- [5] *Michiejew M.*: Zasady wymiany ciepła. Warszawa, PWN 1953
- [6] *Szlązak J.*: Przepływ powietrza przez strefę zawalu w świetle badań teoretycznych i eksperymentalnych. Rozprawy i Monografie, Kraków, UWND AGH 2000
- [7] *Mileicz A.F.*: Utieczki wozducha w szachtach. Moskwa, Niedra 1962
- [8] *Wacławik J., Cygankiewicz J., Knechtel J.*: Warunki klimatyczne w kopalniach głębokich. Kraków, 1995
- [9] *Szczerbań A.N., Kremniew O.A.*: Naucznyje osnovy rasczota i regulirowanije tiepłowego režima głubokich szacht. Kijów, Wyd. UAN 1959–1960