GEODEZJA • TOM 12 • ZESZYT 2 • 2006

Jan Gmyrek*

WPŁYW OSNOWY NA DOKŁADNOŚCI TYCZENIA W KONSTRUKCJACH JEDNOZNACZNYCH**

W pomiarach realizacyjnych w większości przypadków mamy do czynienia z konstrukcjami jednoznacznymi. Oznacza to, że tyczenie wykonywane jest bez obserwacji nadliczbowych. Zakładamy pełną ocenę dokładności, tzn. ocenę z uwzględnieniem wpływu osnowy. W takich przypadkach zestawia się równania obserwacyjne bez wyrazów wolnych, czyli równania różniczek dla odłożonych kątów i długości przy założeniu zmienności czyli błędności wszystkich punktów osnowy z wyjątkiem tych, które przy wyrównywaniu osnowy były przyjęte za stałe. W równaniach tych występują współczynniki przy różniczkach współrzędnych punktów tyczonych A_1 oraz współczynniki przy różniczkach współrzędnych punktów osnowy A_2. Równania powyższe uzupełniane są równaniami na błędność punktów nawiązania, których współczynniki są jedynkami. Wymienione rodzaje równań można zapisać w postaci macierzy blokowej

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{1}$$

Następnie zestawiamy macierz wagową, w której wagi są odwrotnością kwadratów średnich błędów obserwacji. Dla równań na błędność punktów nawiązania wagę stanowi odwrotność macierzy wariancyjnej Q odnoszącej się do punktów, z których wykonano tyczenie wybranej z macierzy wariancyjnej osnowy. Równania normalne liczone według wzoru ATPA przyjmą postać:

$$\begin{bmatrix} A_1^T & 0 \\ A_2^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} A_1^T P A_1 & A_1^T P A_2 \\ A_2^T P A_1 & A_2^T P A_2 + Q^{-1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

* Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska

** Praca wykonana w ramach badań statutowych nr 11.11.150.312 finansowanych przez KBN w 2005 r.

Oznaczmy macierz blokową (3) jako

$$N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{4}$$

Zgodnie z regułą Frobeniusa [2] odwrotność macierzy N będzie

$$\begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

gdzie

$$H = D - CA^{-1}B \tag{6}$$

Odwrotność ta zachodzi, gdy A i H są macierzami nieosobliwymi. W naszym przypadku równań normalnych można napisać

$$C = B^T \tag{7}$$

Stąd

$$N = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \tag{8}$$

Zatem odwrotność będzie

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}B^T A^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}B^T A^{-1} & H^{-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

oraz

$$H = D - B^T A^{-1}B \tag{10}$$

Interesuje nas tylko pierwszy wyraz w macierzy blokowej. Oznaczmy go przez M. Zatem

$$H = A^{-1} - A^{-1}BH^{-1}B^T A^{-1} \tag{11}$$

zastępując H wyrażeniem (10), otrzymamy

$$H = A^{-1} - A^{-1}BH^{-1}B^T A^{-1} \tag{12}$$

Po podstawieniu zgodnie z (8) i (3) będzie

$$\begin{aligned} M = (A_1^T PA_1)^{-1} + (A_1^T PA_1)^{-1} A_1^T PA_2 [A_2^T PA_2 + Q^{-1} - \\ - A_2^T PA_1 (A_1^T PA_1)^{-1} A_1^T PA_2]^{-1} A_2^T PA_1 (A_1^T PA_1)^{-1} \end{aligned} \tag{13}$$

Ponieważ rozpatrujemy konstrukcje jednoznaczne A_1 jest macierzą kwadratową, nieosobliwą i ma inwers.

Stąd można napisać

$$M = A_1^T P^{-1} A_1^{-T} + A_1^{-1} P^{-1} A_1^{-T} A_1^T P A_2 [A_2^T P A_2 + Q^{-1} - \\ - A_2^T P A_1 A_1^{-1} P^{-1} A_1^{-T} A_1^T P A_2]^{-1} A_2^T P A_1 A_1^{-1} P^{-1} A_1^{-T} \tag{14}$$

Po przekształceniach otrzymamy

$$M = A_1^{-1} P^{-1} A_1^{-T} + A_1^{-1} A_2 (A_2^T P A_2 + Q^{-1} - A_2^T P A_2)^{-1} A_2^T A_1^{-T} \tag{15}$$

Ostatecznie

$$M = A_1^{-1} P^{-1} A_1^{-T} + A_1^{-1} A_2 Q A_2^T A_1^{-T} \tag{16}$$

Macierz P^{-1} jest macierzą przekątniową, której elementy są kwadratami średnich błędów obserwacji. Wzór ten określa macierz wariancyjną tyczonego obiektu z rozdzieleniem na dwa składniki: jeden to macierz ujmująca niedokładność tyczenia, a drugi – macierz zawierająca niedokładność osnowy. Przedstawiony sposób obliczania tych składników jest stosunkowo prosty i krótki, odnosi się jednak tylko do konstrukcji jednoznacznych, czyli bez obserwacji nadliczbowych.

Oczywiście istnieje ogólny sposób wyznaczania drugiego składnika wzoru (16) określającego macierz ujmującą wpływ niedokładności osnowy. Postępowanie jest następujące: na podstawie równań (3) liczymy macierz kowariancji ujmującą zarówno wpływ niedokładności osnowy, jak i wpływ niedokładności tyczenia, z której wybieramy macierz Q_c odnoszącą się tylko do punktów tyczonych. Następnie z zależności liczymy macierz kowariancji Q_r wynikającą z samego tyczenia. Różnica tych macierzy daje właśnie macierz Q_w ujmującą wpływ niedokładności osnowy na dokładność tyczenia obiektu.

Literatura

[1] Praca zbiorowa: *Geodezja inżynieryjna*. Warszawa, PPWK 1990

[2] Stolarska E.: *Zbiór zadań z algebry liniowej dla ekonometryków*. Warszawa, PWN 1986