

Marian Brożek, Agnieszka Surowiak**

EFEKTYWNOŚĆ PROCESU ROZDZIAŁU W OSADZARCE**

1. Wstęp

Na stopień rozluźnienia ziaren w łóżu osadzarki ma wpływ między innymi prędkość opadania swobodnego ziarna. Odcinek drogi, jaki przebędzie ziarno w czasie trwania jednego cyklu jest zależny od prędkości opadania swobodnego. Z tego względu po pewnym czasie trwania ruchu pulsacyjnego nastąpi rozsegregowanie ziaren wzdłuż osi pionowej według prędkości opadania. Można, więc powiedzieć, że prędkość opadania swobodnego ziaren stanowi argument rozdziału nadawy niejednorodnej pod względem właściwości fizycznych i geometrycznych w procesie rozdziału w osadzarce.

Prędkość opadania jest wyrażona przez liczbę Reynoldsa, której wartość jest zależna od prędkości ruchu ziarna. Ponadto większość prac dotyczy ziaren sferycznych. Tymczasem współczynnik oporu ruchu ziarna ψ_z jest zależny zarówno od liczby Reynoldsa Re , jak i kształtu ziarna: $\psi_z = f(Re, \text{kształt ziarna})$, co między innymi skutkuje zależnością prędkości opadania od kształtu ziarna.

Jak pokazuje doświadczenie dla liczb Reynoldsa, z którymi mamy do czynienia w przypadku ruchu ziaren w osadzarce, wartości współczynnika oporu są stałe i niezależne od liczby Reynoldsa [16].

Dla liczb Reynoldsa większych od około $5 \cdot 10^2$ wartość współczynnika oporu jest stała [16]. W tej sytuacji najwłaściwszą metodą określenia prędkości opadania swobodnego jest metoda wynikająca z rozwiązania równania ruchu ziarna, w którym można w sposób jawny uwzględnić wpływ kształtu ziarna na prędkość opadania [14].

* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

** Artykuł został opracowany w ramach projektu badawczego nr 4 T12A 006 29

2. Równanie ruchu ziarna opadającego w cieczy pod wpływem siły ciężkości i graniczna prędkość opadania

Na ziarna nieregularne poruszające się w wodzie pod wpływem siły ciężkości w zakresie liczb Reynoldsa $Re > 5 \cdot 10^2$ działają następujące siły:

— siła ciężkości

$$Q = \rho Vg \quad (1)$$

— siła wyporu

$$F_w = \rho_0 Vg \quad (2)$$

— siła oporu dynamicznego ośrodka określona wzorem Newtona

$$P = -\psi_z \frac{1}{2} \rho_0 v_t^2 S \quad (3)$$

gdzie:

$$Re = \frac{vd\rho_0}{\eta} \quad \text{— liczba Reynoldsa,}$$

ρ — gęstość ziarna,

ρ_0 — gęstość cieczy,

d — średnica ziarna,

v — graniczna prędkość opadania swobodnego,

η — współczynnik lepkości dynamicznej cieczy,

g — przyspieszenie ziemskie,

V — objętość ziarna,

v_t — prędkość chwilowa ruchu ziarna,

ψ_z — współczynnik oporu dla ziarna,

S — powierzchnia rzutowa ziarna na płaszczyznę prostopadłą do kierunku ruchu,

$\frac{1}{2} \rho_0 v_t^2$ — ciśnienie hydrodynamiczne cieczy.

W związku z tym równanie ruchu ziarna w kierunku pionowym będzie następujące

$$\rho V \frac{dv}{dt} = (\rho - \rho_0) Vg - \psi_z \frac{1}{2} \rho_0 v_t^2 S \quad (4)$$

Równanie (4) po przekształceniu przyjmuje postać

$$\frac{dv}{dt} = a - bv_t^2 \quad (5)$$

gdzie:

$$a = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} g,$$

$$b = \frac{\psi_z \rho_0 S}{2\rho V}.$$

Równanie (5) jest znane jako równanie Riccatiego [8]. Równanie to można rozwiązać przez kwadratury i jego rozwiązanie jest następujące [10]

$$v_t = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} h(\sqrt{abt}) = \sqrt{\frac{2(\rho - \rho_0)Vg}{\psi_z \rho_0 S}} \operatorname{tg} h\left(\sqrt{\frac{\psi_z \rho_0 (\rho - \rho_0) g S}{2\rho^2 V}} t\right) \quad (6)$$

Następująca granica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_t = \sqrt{\frac{2(\rho - \rho_0)Vg}{\psi_z \rho_0 S}} = v \quad (7)$$

przedstawia ogólny wzór na graniczną prędkość opadania swobodnego ziarna. Jego szczegółowa postać w odniesieniu do ziaren nieregularnych musi uwzględniać kształt ziarna, charakteryzowany współczynnikami kształtu oraz wartość współczynnika oporu.

3. Współczynnik oporu dla kuli

Dla wyliczenia współczynnika oporu Rittinger, a później Finkey [4] wyliczył siłę działającą na nieruchomą kulę ze strony jednorodnego strumienia cieczy poruszającego się z prędkością v . Otrzymał dla współczynnika oporu kuli wartość $\psi_k = 2/3$.

Rittinger w swoich obliczeniach przeprowadzonych według analogicznego schematu uzyskał wartość $\psi_k = 0,5$.

Zdaniem Finkeya, Rittinger popełnił błąd w swoich obliczeniach [4].

Dla ruchu kuli przy dużych liczbach Reynoldsa pole ruchu cieczy można podzielić na dwa obszary: zewnętrzny, w którym można założyć, że siły tarcia są pomijalnie małe ($\eta = 0$) oraz wewnętrzny blisko powierzchni, w którym siły tarcia muszą być uwzględnione [2]. Blisko powierzchni kuli, na skutek sił tarcia będzie miało miejsce przylepanie się cieczy

do powierzchni kuli. Efektem tego będzie powstawanie warstwy granicznej (przyściennej), w której prędkość cieczy zmienia się od wartości odpowiadającej warunkowi przylegania do powierzchni kuli do wartości odpowiadającej ruchowi bez tarcia [11].

Dla takiej sytuacji Abraham [1] wyliczył zależność współczynnika oporu dla kuli od liczby Reynoldsa. Zależność ta wyraża się wzorem

$$\psi_k = 0,284 \left(1 + \frac{9,06}{\sqrt{\text{Re}}} \right)^2 \quad (8)$$

Wyliczona według tej zależności wartość ψ_k ($\text{Re} = 1000$) = 0,46. Jest to więc wartość bliska wartości podanej przez Rittingera i znacznie odbiega od wartości podanej przez Finkeya.

Wielu autorów podało empiryczne wartości współczynnika oporu dla kuli. Flemmer i Banks [5] dla liczby Reynoldsa $\text{Re} = 1000$ podają $\psi_k = 0,442$.

Haider i Levenspiel [7] dla liczby Reynoldsa równej 1000 podają $\psi_k = 0,453$. Perry i Chilton ([9] za Flemmer i Banks [5]) dla liczb Reynoldsa z przedziału $1000 < \text{Re} < 2 \cdot 10^5$ podają stałą wartość współczynnika oporu dla kuli $\psi_k = 0,44$.

Analiza wartości współczynników oporu uzyskanych na podstawie wzorów analitycznych i empirycznych skłania do przyjęcia jako wartości najbardziej wiarygodnej $\psi_k = 0,46$.

Współczynnik oporu ziarna jest związany ze współczynnikiem oporu kuli w newtonowskim zakresie liczb Reynoldsa następującą zależnością [6, 15]

$$\psi_z = k_2 \cdot \psi_k \quad (9)$$

gdzie k_2 jest dynamicznym lub newtonowskim współczynnikiem kształtu ziarna. Ponieważ dla kuli $\psi_k = 0,46$, w związku, z czym

$$\psi_z = 0,46k_2 \quad (10)$$

Zatem współczynnik oporu ziarna jest zależny od kształtu ziarna. Im bardziej nieregularne jest ziarno tym większa jest siła oporu.

Powierzchnia rzutowa ziarna oraz jego objętość wyrażają się następującymi wzorami:

$$S = \frac{\pi d_p^2}{4} \quad (11)$$

$$V = k_1 \frac{\pi d_p^3}{6} \quad (12)$$

gdzie:

- d_p — średnica projekcyjna ziarna,
- k_1 — objętościowy współczynnik kształtu.

Po podstawieniu do wzoru (7) za ψ_z , S i V wyrażeń ze wzorów (11) – (12), na prędkość opadania ziarna nieregularnego uzyskuje się wzór

$$v = 5,33\sqrt{x}\sqrt{d_p}\sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)} \quad (13)$$

gdzie $x = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ zredukowana gęstość ziarna.

Wzór (13) zostanie zastosowany do wyliczenia prędkości opadania ziaren nieregularnych.

4. Część doświadczalna

Badania przeprowadzono na osadzarce przemysłowej dwuproduktowej firmy Allmineral, pracującej w jednym z zakładów przeróbki mechanicznej kopalń węgla kamiennego. Przy natężeniu dopływu nadawy 500 Mg/h i ustabilizowaniu procesu pobrano próbki nadawy, koncentratu i odpadów. Następnie każdy z produktów rozdziału podzielono na frakcje gęstościowe w roztworach chlorku cynku o gęstościach odpowiednio: 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 2,0 Mg/m³, a następnie każdą frakcję densymetryczną rozsiano na sitach o wielkości oczek: 2,0; 3,15; 5,0; 6,3; 8,0; 10,0; 12,5; 16,0; 20,0 mm. W ten sposób uzyskano 80 klasofrakcji. W każdej frakcji densymetrycznej oraz w próbce nadawy oznaczono zawartość popiołu. W tabeli 1 podano wychody masowe poszczególnych klasofrakcji w produktach rozdziału.

5. Analiza wyników

5.1. Empiryczne rozkłady gęstości i wielkości ziarna w produktach rozdziału

Na podstawie analiz chemicznych na zawartość popiołu we frakcjach densymetrycznych wyliczono średnie zawartości popiołu w koncentracie, odpadach i nadawie.

Zawartości te są następujące:

$\vartheta = 5,67\%$ (zawartość popiołu w koncentracie),

$\beta = 66,65\%$ (zawartość popiołu w odpadach),

$\alpha = 49,16\%$ (zawartość popiołu w nadawie).

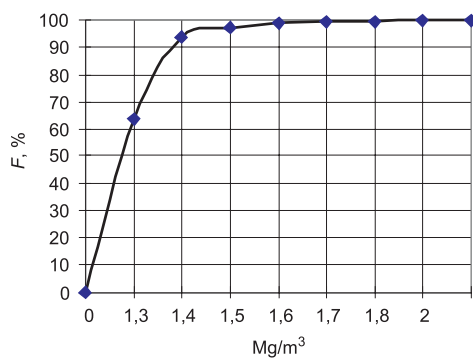
Wykorzystując równanie bilansu [13] wyliczono odpowiednio wychód koncentratu i odpadów $\gamma_k = 28,67\%$ oraz $\gamma_o = 71,33\%$.

Korzystając z danych zawartych w tabeli 1 wykreślono dystrybuanty rozkładu gęstości i wielkości sitowej ziarna w koncentracie, odpadach i nadawie, przy czym nadawa została odtworzona z koncentratu i odpadów.

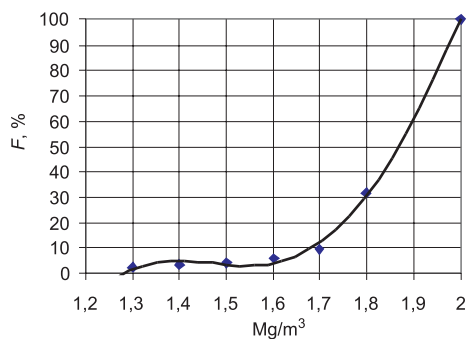
TABELA 1
Wychody masowe poszczególnych klasofrakcji produktów rozdziału, g

Klasa, mm	Fracje densymetryczne, Mg/m ³																	
	- 1,3		1,3+1,4		1,4+1,5		1,5+1,6		1,6+1,7		1,7+1,8		1,8+2,0		+ 2,0			
	K	O	K	O	K	O	K	O	K	O	K	O	K	O	K	O		
- 2,0	803,0	28,0	556,0	84,0	28,0	105,0	17,0	48,0	5,0	43,0	1,0	172,0	1,0	1321,0	15,0	2481,0		
2,0+3,15	979,0	50,0	634,0	92,0	25,0	78,0	13,0	31,0	4,0	24,0	2,0	96,0	4,0	533,0	1,0	1115,0		
3,15+5,0	2531,0	179,0	1463,0	251,0	78,0	143,0	50,0	68,0	16,0	38,0	10,0	204,0	11,0	1038,0	10,0	2941,0		
5,0+6,3	1160,0	71,0	559,0	129,0	53,0	54,0	24,0	38,0	10,0	8,0	9,0	106,0	11,0	602,0	2,0	1939,0		
6,3+8,0	1990,0	137,0	823,0	132,0	90,0	75,0	46,0	44,0	17,0	33,0	14,0	214,0	7,0	1196,0	3,0	4353,0		
8,0+10,0	1782,0	42,0	716,0	55,0	97,0	41,0	43,0	28,0	12,0	49,0	11,0	181,0	14,0	1463,0	3,0	4532,0		
10,0+12,5	2092,0	13,0	866,0	34,0	112,0	47,0	54,0	59,0	18,0	97,0	7,0	371,0	6,0	2196,0	2,0	7077,0		
12,5+16,0	2132,0	10,0	974,0	33,0	128,0	59,0	80,0	72,0	9,0	199,0	18,0	462,0	5,0	2255,0	0	8677,0		
16,0+20,0	1836,0	0	762,0	26,0	118,0	111,0	44,0	169,0	39,0	271,0	6,0	340,0	0	2101,0	0	7055,0		
+ 20,0	890,0	0	434,0	9,0	85,0	69,0	45,0	105,0	0	64,0	0	288,0	0	1472,0	0	3017,0		

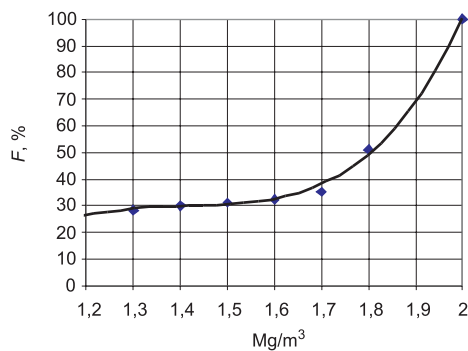
Na rysunkach 1–6 podane są rozkłady gęstości i wielkości ziarna w produktach rozdziału i nadawie. Jak widać w koncentracji ziaren o gęstości poniżej $1,35 \text{ Mg/m}^3$ jest ok. 94%, natomiast w odpadach ziaren o gęstości powyżej $1,75 \text{ Mg/m}^3$ jest ponad 90%. Rozkład wielkości ziaren w koncentracji jest rozkładem jednorodnym, natomiast w odpadach przeważają ziarna większe z przedziału $0 \div 20 \text{ mm}$.



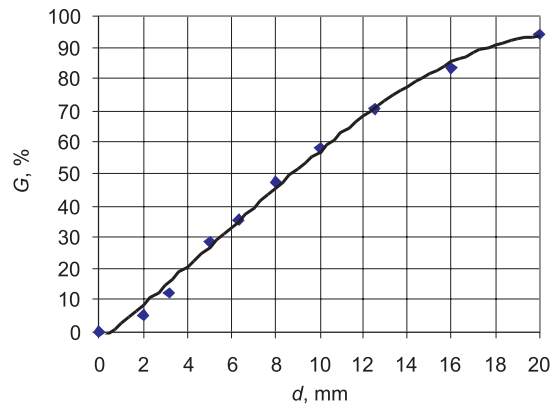
Rys. 1. Rozkład gęstości ziaren w koncentracji



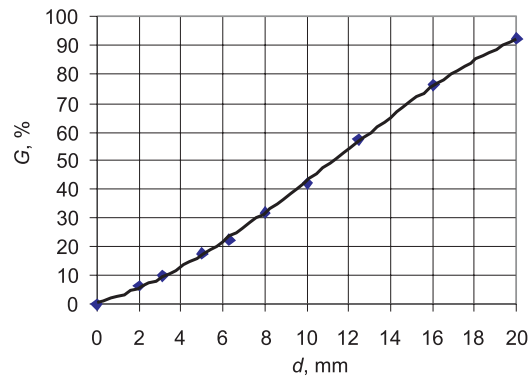
Rys. 2. Rozkład gęstości ziaren w odpadach



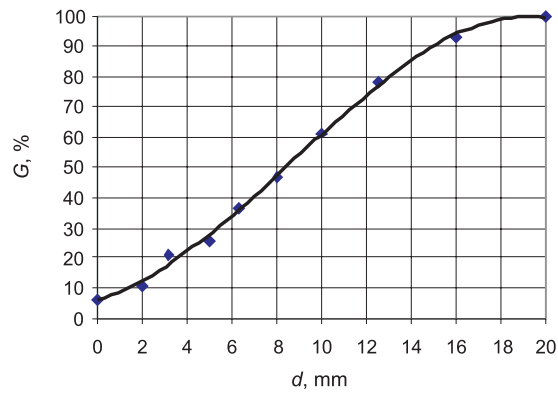
Rys. 3. Rozkład gęstości ziaren w nadawie



Rys. 4. Rozkład wielkości ziaren w koncentracie



Rys. 5. Rozkład wielkości ziaren w odpadach



Rys. 6. Rozkład wielkości ziaren w nadawie

6. Krzywe rozdziału

Współrzędne krzywych rozdziału wyliczono w dwóch wariantach: w wariantcie pierwszym przy założeniu, że argumentem rozdziału jest gęstość ziarna oraz w wariantcie drugim, gdzie argumentem rozdziału jest prędkość opadania swobodnego ziarna.

Współrzędne krzywych rozdziału wyliczono dla odpadów. Liczby rozdziału $T(\rho)$ wylicza się z następującego wzoru

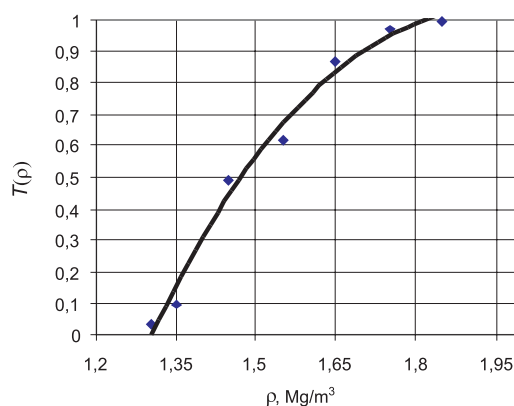
$$T(\rho) = \frac{m(\rho)}{M(\rho)} \quad (14)$$

gdzie:

$m(\rho)$ — masa ziaren o gęstości ρ w odpadach,

$M(\rho)$ — masa ziaren o gęstości ρ w nadawie.

Na rysunku 7 wykreślona jest krzywa rozdziału dla wariantu pierwszego. Na podstawie tej krzywej wyliczono rozproszenie prawdopodobne oraz gęstość rozdziału: $E_p = 0,1075 \text{ Mg/m}^3$, $\rho_r = 1,4875 \text{ Mg/m}^3$. Nachylenie krzywej rozdziału w punkcie ρ_r jest równe 2,22.



Rys. 7. Krzywa rozdziału dla wariantu pierwszego

Dla wykreślenia krzywej rozdziału w wariantcie drugim wyliczono prędkości opadania swobodnego ziaren nieregularnych w poszczególnych klasofrakcjach wg wzoru (13). Jako współczynniki kształtu przyjęto wartości najbardziej prawdopodobne rozkładów współczynników kształtu wyznaczonych dla klasy ziarnowej 35÷40 mm [3]. Tkwi tutaj milczące założenie, że ziarna są geometrycznie podobne niezależnie od ich wielkości i gęstości. Wartości tych współczynników kształtu są następujące: $k_1 = 0,7$; $k_2 = 5,0$. W związku z tym prędkość opadania ziarna będzie wyrażona następującym wzorem

$$v = 1,99\sqrt{x \cdot d} \quad (15)$$

przy czym za wielkość ziarna przyjęto średnicę sitową.

W tabeli 2 przedstawione są wartości prędkości opadania poszczególnych klasofrakcji. Przy obliczaniu gęstości zredukowanej uwzględniono obecność drobnych cząstek fazy stałej w wodzie podsitowej. Z tego względu gęstość cieczy jest równa 1,093 Mg/m³.

TABELA 2

Wartości granicznej prędkości opadania poszczególnych klasofrakcji

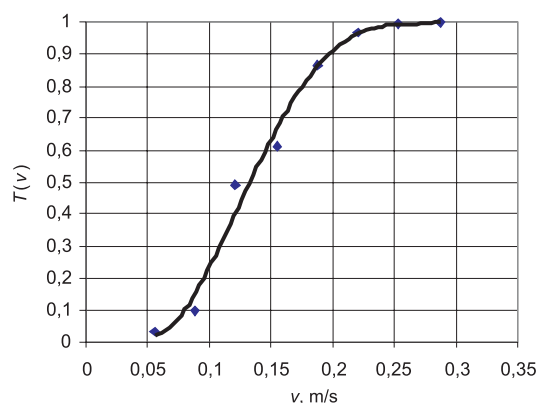
$d, m \backslash x$	0,194	0,2845	0,327	0,418	0,5096	0,601	0,738	1,157
0,002	0,039	0,048	0,051	0,058	0,064	0,069	0,077	0,096
0,003	0,048	0,058	0,062	0,071	0,078	0,085	0,094	0,117
0,004	0,056	0,067	0,072	0,082	0,090	0,098	0,108	0,136
0,006	0,068	0,082	0,088	0,100	0,110	0,120	0,133	0,166
0,007	0,073	0,089	0,095	0,108	0,119	0,129	0,143	0,179
0,009	0,083	0,101	0,108	0,122	0,135	0,147	0,163	0,204
0,011	0,092	0,112	0,120	0,135	0,149	0,162	0,180	0,225
0,014	0,104	0,126	0,135	0,153	0,168	0,183	0,203	0,254
0,018	0,118	0,143	0,153	0,173	0,191	0,207	0,230	0,288
0,020	0,124	0,150	0,161	0,182	0,201	0,219	0,242	0,303

Postępując się tabelami 1 i 2 wyliczono liczby rozdziału opierając się na wzorze analogicznym do wzoru (14).

Na rysunku 8 przedstawiona jest krzywa rozdziału dla wariantu drugiego. Postać krzywej rozdziału przypomina dystrybuantę rozkładu normalnego. Można, więc przyjąć hipotezę, że rozkład prędkości ziaren w osadzarce jest rozkładem Maxwella składowej pionowej prędkości, który jest rozkładem normalnym [12].

Wyliczone wartości rozproszenia prawdopodobnego i prędkości podziałowej są następujące: $E_p = 0,0315$ m/s, $v_r = 0,1355$ m/s. Nachylenie krzywej rozdziału w punkcie v_r jest równe 8,33. Porównując wartości nachylenia krzywych rozdziału odpowiednio w punktach ρ_r i v_r widać, że dokładność rozdziału oceniana na podstawie argumentu rozdziału, którym jest prędkość opadania jest większa niż w przypadku, gdy argumentem rozdziału jest gęstość ziarna, gdyż w tym pierwszym wariantcie nachylenie krzywej jest mniejsze.

Większe jest, zatem rozproszenie ziaren o danej gęstości do niewłaściwych sobie frakcji. Wynika to z faktu, że argumentem przy rozdziale w osadzarce jest prędkość opadania ziaren, której zróżnicowanie jest tym większe im większy jest przedział wielkości ziaren przy tej samej gęstości. Zróżnicowanie to będzie jeszcze większe, jeżeli uwzględni się rozkłady współczynników kształtu. Badanie rozkładów współczynników kształtu jest przedmiotem aktualnych badań. Zatem można powiedzieć, że dokładność rozdziału w osadzarce jest funkcją rozkładu własności fizycznych i geometrycznych ziarna.



Rys. 8. Krzywa rozdziału dla wariantu drugiego

7. Wnioski

- 1) Argumentem rozdziału w procesie wzbogacania w osadzarce jest graniczna prędkość opadania swobodnego ziarna, która jest funkcją właściwości fizycznych i geometrycznych ziarna. Świadczy o tym wartość rozproszenia prawdopodobnego będącego miarą dokładności rozdziału. Rozproszenie prawdopodobne, gdy argumentem rozdziału jest prędkość opadania ma mniejszą wartość niż w przypadku, gdy argumentem rozdziału jest gęstość ziarna.
- 2) Krzywa rozdziału, gdy argumentem rozdziału jest graniczna prędkość opadania ziarna ma postać dystrybuanty rozkładu normalnego. Pozwala to na przyjęcie hipotezy, że rozkład prędkości ziarna w osadzarce wokół wartości najbardziej prawdopodobnej jest rozkładem Maxwella składowej pionowej prędkości, który jest rozkładem normalnym.

LITERATURA

- [1] *Abraham F.F.*: Functional dependence of drag coefficient of a sphere on Reynolds number. *Phys. Fluids*, 13, 1970, 2194–2195
- [2] *Bathelor G. K.*: An introduction to fluid dynamic. Cambridge University Press, London 1967
- [3] *Brożek M., Turno A.*: Wpływ własności geometrycznych ziarn na dokładność rozdziału w cieczach ciężkich zawiesinowych. *Gosp. Sur. Min.*, 20, 2004, 85–99
- [4] *Finkey J.*: Die wissenschaftlichen Grundlagen der nassen Erzaufbereitung. Berlin, Verlag-Springer 1924
- [5] *Flemmer R.L.C., Banks L.C.*: On the drag coefficient of a sphere. *Powder Technology*, 48, 1986, 217–221
- [6] *Ganser G.H.*: A rational approach to drag prediction of spherical and nonspherical particles. *Powder Technology*, 77, 1993, 143–152
- [7] *Haider A., Levenspiel O.*: Drag coefficient and terminal velocity of spherical and non-spherical particles. *Powder Technology*, 58, 1989, 63–70
- [8] *Leja F.*: Rachunek różniczkowy i całkowy. Warszawa, PWN 1971
- [9] *Perry R.H., Chilton C.H.*: Chemical Engineers Handbook, International Student edn., MacGraw – Hill – Kogakusha, Tokyo 1973, 5th edn.
- [10] *Ponomariew K.K.*: Sostavlenie differencjalnych uravnenij. Izd. Minsk, Vyszejszaja Szkoła 1973

- [11] *Prandtl L.*: Dynamika przepływów. Warszawa, PWN 1956
- [12] *Smirnova N.A.*: Metody termodynamiki statystycznej w chemii fizycznej. Warszawa, PWN 1980
- [13] *Stępiński W.*: Wzbogacanie grawitacyjne. Łódź–Warszawa–Kraków, PWN 1964
- [14] *Sztaba K.*: Influence of grain size upon falling velocity. Physicochemical Problems of Mineral Processing, 38, 2004, 207–220
- [15] *Thompson T.L., Clark N.N.*: A holistic approach to particle drag prediction. Powder Technology, 67, 1991, 57–66
- [16] *Tsakalakis K.G., Stamboltzis G.A.*: Prediction of the settling velocity of irregularly shaped particles. Minerals Engineering, 14, 2001, 349–357