

Grzegorz Lenda\*

METODY TWORZENIA I MODYFIKACJI FUNKCJI SKLEJANYCH  
NA POTRZEBY OPISU KSZTAŁTU OBIEKTÓW OBSERWOWANYCH PUNKTOWO\*\*

---

## 1. Wprowadzenie

Funkcje sklepane stały się standardowym narzędziem, służącym do projektowania dowolnych kształtów o ciągłej krzywiznie. Coraz liczniej powstające metody zwiększania elastyczności modelowania tymi funkcjami wychodzą naprzeciw oczekiwaniom projektantów tworzących nieistniejące jeszcze kształty, a co za tym idzie – często niemuszających gwarantować ścisłego przechodzenia funkcji przez zadane z góry, liczne i gęste zbiory punktów przestrzennych. Inaczej sprawa ma się w przypadku budowy sklepanych modeli obiektów istniejących, co jest zasadniczym przedmiotem zainteresowania inżynierów dokonujących oceny stanu ich powierzchni. Pomiar budowli metodami geodezyjnymi dostarcza dyskretnego zbioru punktów, wymuszającego odpowiednie położenie generowanego splajnu. Jeżeli mierzone punkty będą rozmieszczone niekorzystnie (z małą równomiernością oraz nie będą dobrze odzwierciedlały zmian krzywizny w miejscach, gdzie zmienia się ona szybko), powstać mogą zafalowania funkcji sklepanej, niejednokrotnie zaburzające w bardzo dużym stopniu rzeczywisty kształt budowli. Na skutek tego odtwarzanie faktycznego stanu obiektu na podstawie jego obrazu punktowego jest procesem bardziej wymagającym i skomplikowanym niż projektowanie. Często metody zwiększające efektywność modelowania, skuteczne w przypadku projektowania, mogą zawieść przy odtwarzaniu kształtu obiektu. Dodatkowo w wielu przypadkach nie ma obiektywnego uzasadnienia dla stosowania niektórych metod, ponieważ sam postulat zwiększania elastyczności modelowania niekoniecznie musi iść w parze z lepszym odzwierciedleniem faktycznego kształtu obiektu. Aktualnie problemem nie jest jednak nadmiar różnego typu metod modyfikacyjnych i ich

---

\* Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Geodezji Górniczej i Inżynierii Środowiska

\*\* Pracę wykonano w ramach badań statutowych 11.11.150.312/06

mniejsza lub większa przydatność, lecz fakt, że funkcje sklepane nie są jak dotąd szczególnie popularne w różnego rodzaju analizach kształtu powierzchni. Skutkuje to często brakiem wiedzy o istnieniu metod modyfikacyjnych, a w efekcie funkcje sklepane stosowane są w najprostszej postaci, która w znacznym stopniu ogranicza zakres ich stosowania. Niniejszy artykuł ma na celu przedstawienie najefektywniejszych (z punktu widzenia odtwarzania kształtu mierzonego obiektu) metod modyfikacji najbardziej rozpowszechnionej i najprostszej postaci funkcji sklepanej [1, 3] – tak aby tworzone przy ich użyciu modele mogły odzwierciedlać faktyczny stan obiektu, wnosząc do jego opisu możliwie małe szkodliwe zafalowania. Zostaną również opisane metody modyfikacyjne wymagające sięgnięcia po bardziej skomplikowane algorytmy tworzenia funkcji sklepanych.

Oczywiście, jak wyżej wspomniano, krytyczne znaczenie dla zapewnienia precyzji opisu, a zarazem redukcji zafalowań ma odpowiedni rozkład punktów pomiarowych na obiekcie, zagadnienie to zostało jednak szczegółowo omówione w [3, 4]. Dopiero połączenie właściwego doboru punktów obserwowanych i odpowiednich metod modyfikacyjnych przyniesie pożądane efekty przybliżenia rzeczywistego kształtu.

Pomimo istnienia różnorodnych metod tworzenia i modyfikacji funkcji sklepanych [3], do niniejszego opracowania wybrano te z nich, które pozwalają najefektywniej i najdokładniej przybliżyć kształt obiektów reprezentowanych przez punktowy zbiór obserwacji. Dla prostoty i przejrzystości zostały przeanalizowane funkcje sklepane w postaci krzywych płaskich, jednak wszelkie prawa im towarzyszące, są aktualne zarówno dla krzywych przestrzennych, jak i powierzchni sklepanych.

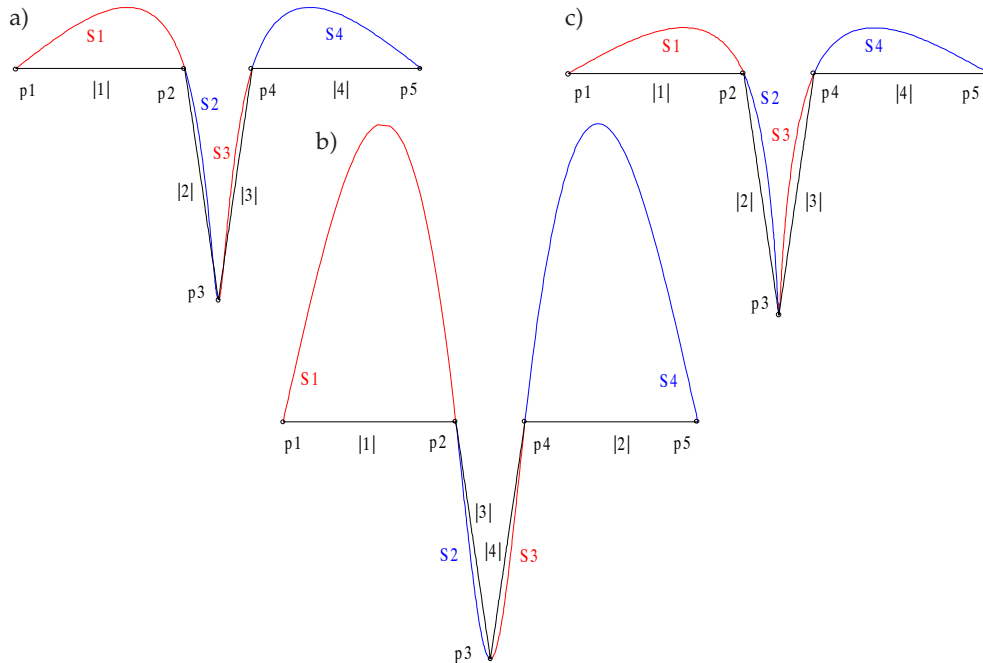
## 2. Parametryczny opis funkcji sklepanych

Pierwszorzędną czynnością będzie opisanie zmian, jakie należy zawsze wprowadzać do najprostszej i najbardziej rozpowszechnionej interpolacyjnej postaci splajnu, niezależnie od rodzaju opisywanego obiektu. Pozwolą one uniknąć zafalowań oraz kłopotów z kierunkiem kreślenia funkcji. W tym celu warto przytoczyć kilka elementów definiujących taką najprostszą postać funkcji sklepanej. Jest ona zestawem wielomianów 3. stopnia, które łączą się w węzłach z ciągłością klasy  $C^2$ , co pozwala na zachowanie ciągłości krzywizny w całej dziedzinie funkcji. Klasyczna definicja splajnu operuje na jego zapisie jawnym w postaci  $y = f(x)$ , przyjmującym jako węzły współrzędne  $x_i$  kolejnych punktów. Dla każdej funkcji sklepanej ciąg węzłów musi być monotoniczny w całej dziedzinie. Takie założenia generują ograniczenie kierunku kreślenia funkcji: jeżeli węzły tworzą ciąg monotoniczny, to współrzędne mierzonych punktów muszą tworzyć identyczny ciąg. Uniemożliwia to zmianę kierunku kreślenia krzywej wzdłuż osi  $X$ , a w szczególności tworzenie figur zamkniętych (np. w najlepszym wypadku da się utworzyć jedynie połowę łuku okręgu). Nie jest to jednak jedyna wada jawnego zapisu funkcji sklepanej. Wielkość zafalowań powstających podczas tworzenia tych funkcji bardzo silnie zależy od zachowania proporcji pomiędzy przestrzenną odległością kolejnych punktów a odległością pomiędzy odpowiadającymi tym punktom węzłami. Im te proporcje są bardziej zachwiane, tym w efekcie bardziej zdeformowana jest postać splajnu. Utożsamienie współrzędnych  $x_i$  punktów z węzłami funkcji sklepanej bar-

dzo często prowadzi do takich sytuacji, ponieważ odległościom między punktami na nieliniowym obiekcie rzadko kiedy odpowiadają odległości między współrzędnymi tych punktów. Opisane wyżej niekorzystne czynniki towarzyszące jawnemu zapisowi splajnu, dyskwalifikują go jako narzędzie do budowy skomplikowanych modeli punktowo mierzonych obiektów. Usunięcie tych niedogodności jest jednak wyjątkowo proste – wystarczy w tym celu wprowadzić parametryczny zapis funkcji typu:  $x = f(t)$ ,  $y = f(t)$ . Pozwala on na wyeliminowanie niedogodności związanych z koniecznością stosowania rosnącego ciągu współrzędnych  $x_i$  – rosnący musi być teraz tylko zbiór węzłów  $t_i$ , co nie nastrocza żadnych problemów, bo węzły mogą zostać wyznaczone zupełnie niezależnie. W ten sposób znika problem ograniczenia kierunków kreślenia splajnu. Dodatkowo węzły można dobrać tak, aby odległości między nimi odpowiadały proporcjom odległości między punktami mierzonymi, a to w znacznym stopniu przyczyni się do redukcji zafalowań otrzymanej funkcji. Monotoniczny ciąg węzłów ustalany jest w procesie parametryzacji – kolejne węzły wyznaczone zostają jako suma odległości między węzłami poprzednimi aż do aktualnego włącznie. Głównym zadaniem parametryzacji jest jednak taki dobór odległości między poszczególnymi węzłami, aby były one proporcjonalne do odległości między punktami obserwowanymi. Podczas wielu praktycznych analiz ustalono dwa najkorzystniejsze rodzaje parametryzacji, wprost proporcjonalne odpowiednio do: odległości między punktami pomiarowymi – dla opisu obiektów o wolnozmienniej krzywiźnie, pierwiastka odległości między punktami pomiarowymi – dla opisu obiektów o szybkozmienniej krzywiźnie. Ogólnie dla większości nieregularnych kształtów bezpieczniej używać drugiej z wymienionych parametryzacji – niesie ona mniejsze ryzyko powstania niekorzystnych zafalowań. Nic nie stoi na przeszkodzie, aby w pewnych wypadkach stosować parametryzację mieszaną, w zależności od zmian kształtu obiektu. W praktyce można jeszcze spotkać parametryzację stałą długością przedziału, jednak ponieważ, podobnie jak przy doborze węzłów dla opisu jawnego – nie odzwierciedla ona proporcji odległości między punktami – nie powinna być stosowana. Jej użycie ma na celu jedynie uproszczenie postaci funkcji sklepanej i przyspieszenie obliczeń numerycznych. Aby uzyskać spójny opis, należy oczywiście stosować identyczną parametryzację dla obydwu funkcji:  $x = f(t)$  i  $y = f(t)$ . Na rysunku 1 przedstawiono wyniki przybliżenia mierzonego kształtu za pomocą splajnów zbudowanych przy użyciu różnego rodzaju parametryzacji.

W całym opracowaniu przyjęto następującą konwencję tworzenia rysunków: kolejne człony funkcji sklepanej są oznaczane symbolami  $S_i$ , natomiast odcinki kształtu przybliżonego numerami –  $|i|$ . Kształt ten tworzą w każdym przypadku linie łamane – połączone w wierzchołkach z ciągłością klasy  $C^0$ . Zbieżność splajnu do funkcji klasy  $C^0$  jest najsłabsza [3, 6] a to pozwala najlepiej ocenić zafalowania wnoszone do modelu przez różne metody modyfikacyjne.

Rysunki pozwalają łatwo ocenić, iż jawny opis funkcji sklepanej może powodować wręcz katastrofalne pogorszenie zbieżności do funkcji przybliżanej, w porównaniu z opisem parametrycznym zachowującym proporcje odległości między punktami. Parametryzacja pierwiastkiem odległości daje na pewnych odcinkach lepsze, a na innych nieco słabsze przybliżenie niż parametryzacja odległością, jednak globalnie oferuje bardziej zrównoważony opis obiektu.



**Rys. 1.** Wykresy funkcji sklejanej  $S$  (składowe  $S_1, \dots, S_4$ ) utworzone przy różnych rodzajach parametryzacji dla punktów interpolacyjnych  $p_1, \dots, p_5$ . Łamana linia przedstawia aproksymowany kształt złożony z odcinków  $|1|, \dots, |4|$ : a) parametryzacja odległością pomiędzy kolejnymi punktami; b) parametryzacja odpowiadająca jawnemu opisowi funkcji; c) parametryzacja pierwiastkiem odległości pomiędzy kolejnymi punktami

### 3. Dobór warunków brzegowych

Obok zastosowania opisu parametrycznego warto dodatkowo zwrócić uwagę na tzw. warunki brzegowe. Specyfika wyznaczania interpolacyjnej funkcji sklejanej polega na rozwiązaniu układu równań, z których każde zawiera trzy niewiadome. Występuje zatem niedobór dwóch równań, które należy dołączyć do układu, czyniąc pewne założenia. Te dwa równania – dołączane po jednym na obu końcach układu – noszą nazwę warunków brzegowych.

Istnieje cały szereg warunków brzegowych, jednak warto omówić tylko niektóre:

- a)  $S''(a) = S''(b) = 0$  – drugie pochodne na końcach rozważanej funkcji przyrównane zostają do zera. Jest to bardzo użyteczny i najchętniej stosowany warunek, którego zaletą oprócz prostoty, jest fakt, że nie wymaga posiadania żadnych wstępnych wiadomości o szukanej funkcji, a także zapewnia stosunkowo dobrą zbieżność do kształtu aproksymowanego.

- b)  $S^{(j)}(a) = S^{(j)}(b)$  dla  $j = 0, 1, 2$  – warunek okresowy, wykorzystywany do budowy krzywych zamkniętych.
- c)  $S'''(x_1^-) = S'''(x_1^+)$ ,  $S'''(x_{n-1}^-) = S'''(x_{n-1}^+)$  – żądanie ciągłości pochodnej trzeciego stopnia w węzłach  $x_1$  i  $x_{n-1}$  – tzw. warunek „nie węzeł”. Podobnie jak warunek 1) stosowany jest, gdy nic nie wiadomo o wartościach pochodnych na krańcach określoności całej funkcji. Dodatkową zaletą jest lepsza zbieżność do funkcji aproksymowanej niż w przypadku 1). Korzystanie z tego warunku zaburza trójdzielność macierzy współczynników, co wymaga przeprowadzenia pewnych dodatkowych obliczeń.
- d) Dodatkowe punkty interpolacyjne – aby uzyskać większy wpływ na kształtowanie splajnu na jego końcach, można wprowadzić dodatkowe punkty interpolacyjne – na zewnątrz obydwu krańców zbioru punktów mierzonych, otrzymując powiększony układ równań. Zastosowanie wówczas innych warunków, np. 1) lub 3), będzie miało wpływ głównie na utworzone z tych punktów człony znajdujące się poza interesującym zakresem funkcji. Takie nadliczbowe punkty interpolacyjne nie będące reprezentacją rozważanego obiektu można dowolnie przesuwać, dążąc do otrzymania jak najlepszego przybliżenia w obszarze utworzonym z punktów pomierzonych.

Wymienione warunki (oprócz b) nie muszą występować parami, lecz mogą tworzyć dowolne konfiguracje. Podobnie każdy z nich (oprócz b) wnosi nieobiektywne informacje do budowanego modelu, skutkujące zazwyczaj powstaniem zafalowań w pobliżu krańców funkcji. Wpływ warunków brzegowych na poszczególne fragmenty splajnu jest lokalny i wraz z oddalaniem się od jego końców (w sensie liczby kolejnych przedziałów) szybko zanika. Dysponując stosunkowo gęstym zbiorem punktów pomiarowych (a do tego należy dążyć, jeśli chce się zobrazować dokładnie badany kształt), można uważać wpływ tych warunków na całość krzywej za niewielki. Niemniej jednak należy mieć świadomość, że najbardziej zewnętrzne człony splajnu są obciążone dodatkowymi zniekształceniami, a więc w przypadku prowadzenia szczegółowych analiz kształtu obiektu, może zająć konieczność odrzucenia tych członów z wygenerowanego modelu.

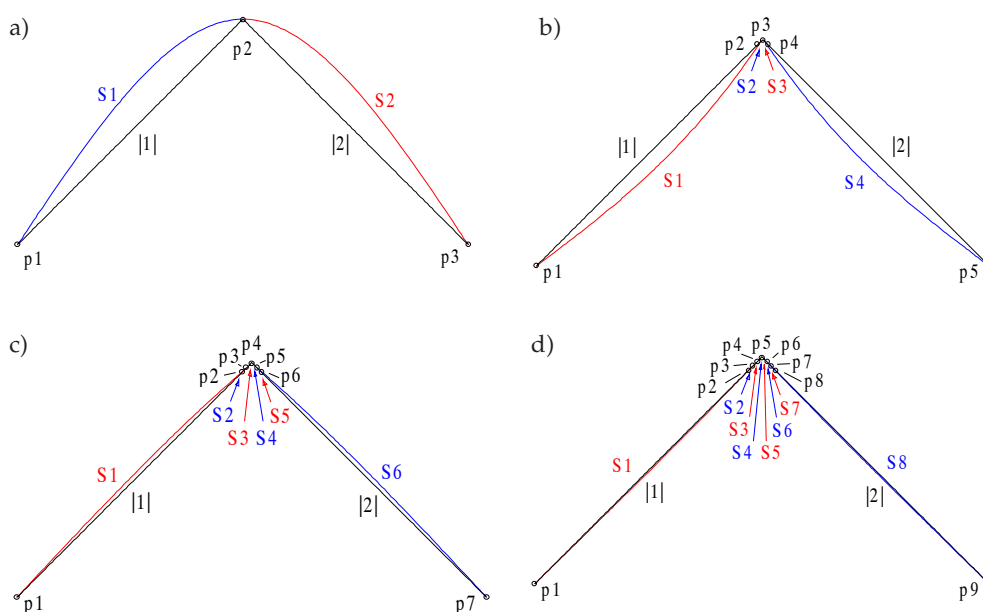
#### 4. Wstawianie dodatkowych punktów interpolacyjnych

Omówione do tej pory zagadnienia powinny być uwzględniane zawsze, podczas konstruowania każdej funkcji sklepanej. Istnieją jednak metody modyfikacyjne, których stosowanie może wymusić konkretny kształt powierzchni, albo które są korzystne z punktu widzenia redukcji błędów pomiarowych. W pierwszym wypadku mowa jest głównie o sytuacjach, gdy dany obiekt składa się z kilku gładkich powierzchni, połączonych ze sobą z ciągłością tylko klasy  $C^0$  w postaci linii krawędziowych. Dotyczy to również wszelkich pęknięć zaistniałych w obrębie jednolitej gładkiej powierzchni. Jak nadmieniono powyżej,

zbieżność funkcji sklejaney klasy  $C^2$  do funkcji przybliżanej jest w takich miejscach bardzo słaba, co zresztą wyraźnie pokazuje rysunek 1, niezależnie od przyjętej parametryzacji. Skutkuje to niemożnością utworzenia jednolitego, a przy tym precyzyjnego sklejanego modelu całego obiektu posiadającego załamania lub pęknięcia. Rozwiązaniem tego problemu są metody pozwalające na zmniejszenie klasy połączenia splajnu w węzle odpowiadającym punktowi załamania. Zazwyczaj wymagają one ingerencji w algorytm obliczeniowy [3], co może być niemożliwe, jeżeli korzysta się z gotowych programów do wyznaczania funkcji sklejaných. Można jednak wykorzystać pewną własność tych funkcji, która bez jakiegokolwiek zmiany algorytmu da efekt analogiczny jak zmniejszenie klasy ciągłości połączenia. Otóż funkcje sklepane cechuje dość duża autonomiczność opisu – zmiana przebiegu splajnu klasy  $C^2$  pomiędzy dwoma węzłami będzie miała teoretycznie wpływ jedynie na sześć członów sąsiednich: po trzy z każdej strony rozważanego przedziału wyznaczonego przez te węzły [3]. Praktycznie na skutek niedokładności obliczeń numerycznych wpływ ten zostaje przeniesiony na dalsze człony, jednak w bardzo nieznacznym zakresie. Powyższa własność decyduje też o lokalnym znaczeniu opisanych wcześniej warunków brzegowych. Można oczekiwać, że jeżeli w pobliżu miejsca załamania (rys. 2) wstawi się dodatkowy punkt, to przebieg krzywych w okolicy załamania ulegnie wygładzeniu. Stanie się tak, ponieważ zostanie przez to dodany nowy odcinek splajnu, oddalający od siebie wcześniej połączone krzywe – a więc wzajemny wpływ tych krzywych zostanie przez to rozdzielone zredukowane. Jeżeli wstawionych punktów będzie więcej, zostanie pomiędzy nimi skonstruowanych kilka odcinków splajnu, co spowoduje zniwelowanie wzajemnej zależności krzywej początkowo wchodzącej w załamanie i krzywej z niego wychodzącej, a więc można osiągnąć w ten sposób dowolnie dobre wygładzenie. Wprowadzając zatem kilka dodatkowych punktów położonych po obu stronach newralgicznego punktu, wokół którego występują zafalowania, można zdecydowanie je zredukować (rys. 2). Wstawiane punkty mogą leżeć bardzo blisko punktu, wokół którego występuje deformacja, ponieważ o zależności przebiegu funkcji sklejaney w kolejnych przedziałach nie decyduje ich wzajemna odległość, a jedynie liczba przedziałów rozdzielających. Najlepiej zatem umiejscowić je w odległościach znacznie mniejszych od wartości średniego błędu położenia mierzonego punktu, co nie spowoduje praktycznie żadnych zmian w ich rozkładzie na obiekcie (nie zdeformuje wyników pomiarów). Widoczne na rysunku 2a zafalowanie po wstawieniu dodatkowych punktów przeniesie się na nowo utworzone człony – ponieważ jednak ich długości będą znikomo małe, znikomo małe będzie również towarzyszące im zniekształcenie.

W ten sposób, bez jakiegokolwiek zmiany w algorytmie wyznaczającym funkcję sklejaną, można uzyskać model analogiczny do modelu, w którym zastosowano redukcję klasy połączenia, a wszystko to odbywa się przy zachowaniu ciągłości  $C^2$  dla całego splajnu. Metodę tę można zastosować nie tylko do uzyskania jednolitego opisu obiektów posiadających krawędzie lub pęknięcia, ale także do redukcji ponadnormatywnych zafalowań funkcji sklejaney powstałych na skutek niewłaściwego doboru rozkładu punktów obserwowanych. Jest to jednak działanie subiektywne, ponieważ nigdy nie wiadomo, jaka część zafalowania wynika ze złego rozkładu punktów, a jaka jest właściwie przez nie odzwierciedloną fizycz-

ną deformacją obiektu. Wymaga zatem podkreślenia, że najważniejsze dla uzyskania dobrego przybliżenia funkcjami sklejanymi jest takie rozplanowanie obserwacji na obiekcie, aby odwzorowały one wszystkie lokalne deformacje i nie wносиły poprzez swoją dużą nieregularność dodatkowych zniekształceń do opisu. Szczegółowe wskazówki, jak dobierać punkty w zależności od geometrii obiektu, zawarto w [3, 4].



**Rys. 2.** Wpływ wstawiania różnej liczby punktów interpolacyjnych w bezpośrednim otoczeniu załamania: a) funkcja sklejana interpolująca punkty  $p_1$ – $p_3$  z załamaniem w punkcie  $p_2$ ; b) wstawienie jednego bliskiego punktu interpolacyjnego po obu stronach załamania; c) wstawienie dwóch bliskich punktów interpolacyjnych po obu stronach załamania; d) wstawienie trzech bliskich punktów interpolacyjnych po obu stronach załamania

## 5. Aproksymacja przy użyciu funkcji sklepanych

Współczesne metody pomiarowe pozwalają z dużą precyzją wyznaczać dowolne kształty, niemniej jednak każda obserwacja obarczona jest błędem, uniemożliwiającym dokładne umiejscowienie punktów na obiekcie. Dysponując współrzędnymi obliczonymi w oparciu o wyniki pomiarów oraz odpowiednimi ich błędami średnimi  $\sigma$ , można poprowadzić funkcję sklejaną niekoniecznie przez dane punkty  $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ , a przez ich odpowiedniki  $\{p'_0, p'_1, \dots, p'_n\}$  tak wyznaczone, aby spełniały warunki metody najmniejszych kwadratów i jednocześnie pozwalały określić możliwie gładką funkcję. Uzyskuje się dzięki

temu redukcję zafalowań krzywej, stosownie do wielkości błędu pomiarowego, oraz przyjętego parametru aproksymacji  $r$ . Zagadnienie rozwiązuje się, minimalizując funkcjonal

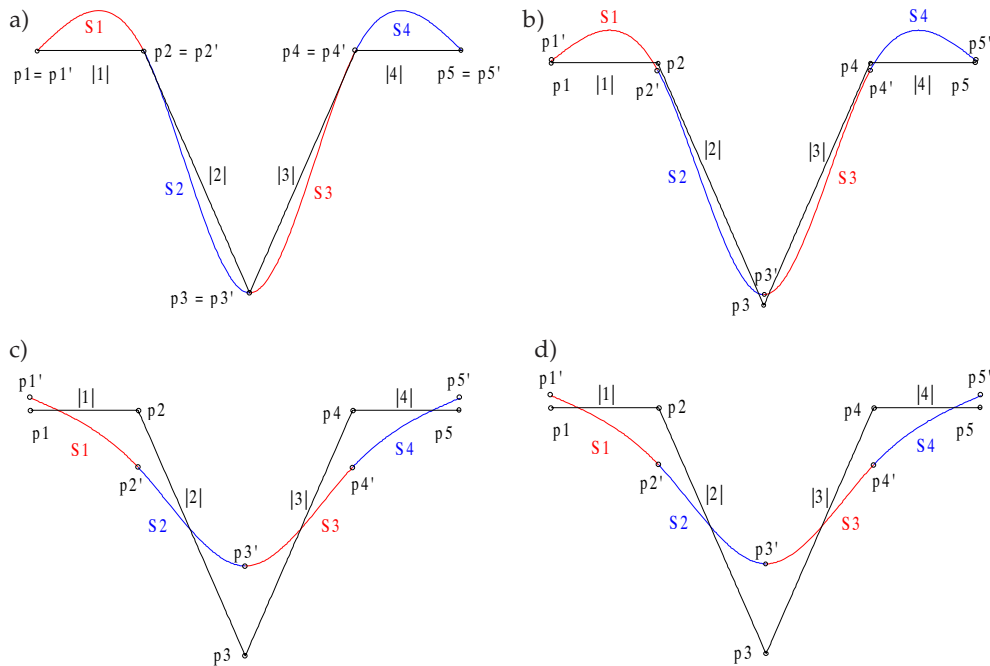
$$r \sum_{i=1}^n \left( \frac{p_i - S(t_i)}{\sigma_{p_i}} \right)^2 + (1-r) \int_{t_1}^{t_n} (S''(t))^2 dt \quad (1)$$

Pierwszy jego człon odpowiada za aproksymację średniokwadratową, natomiast drugi wiąże się z krzywizną całkowitą funkcji  $S$ . Dobierając odpowiednią wartość parametru  $r$ ,  $0 \leq r \leq 1$ , uzyskuje się krzywą możliwie gładką na przemian z krzywą najlepiej wpasowaną w zbiór punktów. Metoda ta znana jest już od dłuższego czasu, stosowana jest jednak najczęściej w połączeniu z jawnym opisem funkcji sklejanych, co w tym wypadku przynosi jeszcze większe szkody niż dla interpolacji. Współrzędne punktów nie są bowiem traktowane jednakowo – aproksymowane są tylko wartości funkcji  $y_i$  przy ciągu węzłów pokrywających się z odciętymi  $x_i$ . W efekcie następuje jedynie „połowiczna” aproksymacja, nowe punkty  $p'_i$ , przez które przejdzie wygładzona krzywa, nie mogą się przemieszczać dowolnie, a jedynie wzdłuż osi rzędnych, pozostawiając współrzędne  $x_i$  niezmiennione względem punktów interpolacyjnych. Rozwiązanie problemu przynosi zastosowanie parametrycznego opisu funkcji, gdzie przy ustalonych parametrach  $t_i$ , w aproksymacji uczestniczą w niezależnych procesach wszystkie grupy współrzędnych  $(x_i, y_i, z_i)$ , jeśli istnieje  $z_i$ .

Zasadniczy wpływ na przebieg funkcji aproksymacyjnej mają: wielkość błędu średniego współrzędnych –  $\sigma$  oraz parametr aproksymacji –  $r$ . Przy  $r = 1$  niezależnie od przyjętych błędów otrzymuje się funkcję interpolacyjną (rys. 3a). Zmniejszanie tego współczynnika powoduje coraz mocniejsze wygładzanie krzywej, przy czym wielkość  $\sigma$  decyduje o zakresie możliwych do uzyskania zmian przy ustalonym  $r$  (por. rys. 3b i 3c). Opisana metoda aproksymacji nie ma bezpośredniego mechanizmu utrzymującego przebieg krzywej w granicach zadanych wartości błędów  $\sigma$ , tak więc zawsze można znaleźć dostatecznie małe  $r$  zapewniające dowolne wygładzenie krzywej (por. rys. 3c i 3d). W skrajnym przypadku dla bardzo małego parametru  $r$  cała funkcja sklejana przyjmie postać prostej. Właściwy dobór  $r$  można osiągnąć, wyznaczając go w sposób iteracyjny, zakładając określoną dopuszczalną wielkość odstepu funkcji sklejanej od przybliżanej. Aproksymacyjnego modelowania krzywych warto dokonywać przy wstępnym założeniu  $r = 1$ , co pozwoli wyselekcjonować miejsca zafalowań. Następnie przeprowadzać można ich redukcję głównie przez zwiększanie w tych miejscach tolerancji  $\sigma$  przy stosunkowo niewielkich zmianach współczynnika  $r$ , gdyż w odróżnieniu od  $\sigma$  wpływa on na wszystkie odcinki konstruowanej krzywej. Aproksymacja funkcjami sklejanych jest szczególnie przydatna podczas przybliżania gęstego zbioru punktów. Rośnie wówczas stosunek wielkości popełnionego błędu pomiarowego do odległości pomiędzy punktami, co prowadzi do powstawania zafalowań. W takich sytuacjach, gdy cała krzywa wyznaczona dla  $r = 1$  posiada niekoniecznie znaczne, lecz występujące w dużej liczbie zniekształcenia, korzystne może być zwiększenie roli mającego globalny wpływ parametru  $r$  (zmniejszenie jego wartości). Podczas porównania dwóch pomiarów okresowych konieczne jest dokonywanie przybliżeń przy tym samym ustalonym



parametrze  $r$ , dla obu przypadków powinny być też podobne (ten sam rząd wielkości) założone wartości błędów średnich. Nieprzestrzeganie tych zasad może dać zupełnie niemiarodajne efekty porównań.



Rys. 3. Aproxymacja funkcją sklejaną przedstawioną w postaci parametrycznej:  
 a)  $r = 1$ ,  $\sigma$  – dowolne; b)  $r = 0,1$ ,  $\sigma = 0,02$ ; c)  $r = 0,1$ ,  $\sigma = 0,1$ ; d)  $r = 0,001$ ,  $\sigma = 0,01$

Jakakolwiek aproksymacja prowadzona przy użyciu funkcji sklepanych wnosi pewne niebezpieczeństwo związane z naturą splajnów, które zawsze dążą do uzyskania najładniejszej postaci, będącej w skrajnym przypadku linią prostą. Na skutek tej własności, zezwolenie funkcji sklepanej na nieprzechodzenie przez punkty pomiarowe będzie powodowało każdorazowo spłaszczenie wygenerowanego modelu. Zjawisko to należy mieć zawsze na uwadze, decydując się na użycie aproksymacyjnych funkcji sklepanych.

## 6. Funkcje B-sklejane

Potrzeba zwiększenia elastyczności modelowania przynosi wciąż nowe metody wyznaczania funkcji sklepanych. Niejednokrotnie nie wystarcza użycie opisanych wcześniej sposobów poprawiania własności klasycznych splajnów, lepsze efekty można uzyskać łącząc je z odmiennymi metodami konstruowania krzywych. Najbardziej przyszłościowe

i rozpowszechnione wśród nich są funkcje B-sklejane [2, 3]. Zastosowanie odmiennej reprezentacji splajnów przy zachowaniu takich samych warunków brzegowych i identycznej parametryzacji nie powoduje zmian przebiegu funkcji względem opisu przedstawionego powyżej. Funkcje B-sklejane wyznaczone są jako kombinacja liniowa wielomianów bazowych  $N_i^m$ :

$$S_i(t) = \sum_{i=0}^{n-m-1} d_i N_i^m(t) \quad t_i = \{t_0, \dots, t_n\} \quad (2)$$

Wielomiany te określa rekurencyjny wzór Mansfielda–de Boora–Coxa:

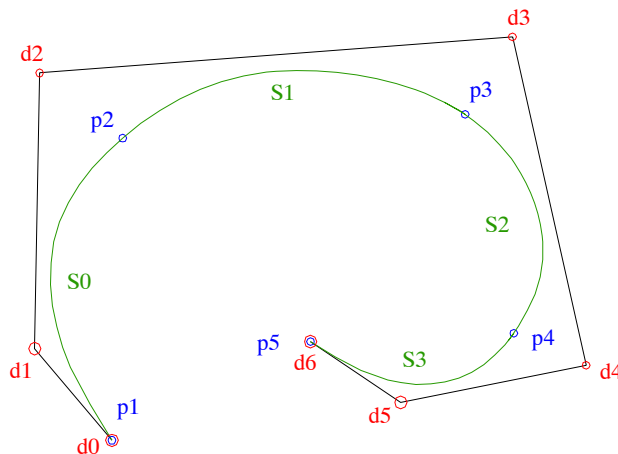
$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{dla } t \notin [t_i, t_{i+1}) \end{cases} \quad (3)$$

$$N_i^k(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t)$$

Równanie funkcji B-sklejanej 3. stopnia (rys. 4) w przedziale  $t \in [t_i, t_{i+1})$  ma postać

$$S_{i-3}(t) = d_{i-3} N_{i-3}^3(t) + d_{i-2} N_{i-2}^3(t) + d_{i-1} N_{i-1}^3(t) + d_i N_i^3(t) \quad (4)$$

gdzie wyznaczone współczynniki  $d_i$  są tzw. punktami kontrolnymi, tworzącymi łamaną kontrolną. Rysunek 4 przedstawia funkcję sklejaną  $S_i$  interpolującą punkty  $p_i$ , skonstruowaną za pomocą punktów kontrolnych  $d_i$ .



Rys. 4. Krzywe B-sklejane  $S_i$  3. stopnia wraz z punktami kontrolnymi  $d_i$  i punktami interpolacyjnymi  $p_i$

### 6.1. Aproksymacyjne funkcje B-sklejane

Czasami korzystne może okazać się zmniejszenie liczby funkcji wynikowych opisujących badany kształt. Wiąże się to oczywiście w pewnym stopniu z rezygnacją ze szczegółowości opisu, co jednak może być nieuniknione np. w przypadku posiadania bardzo dużej liczby punktów pomierzonych. W takiej sytuacji wyznaczenie krzywych czy powierzchni, ale zwłaszcza prowadzenie na nich późniejszych analiz, może trwać nieakceptowalnie długo. Przykładowo wyznaczenie około pięciuset normalnych do powierzchni sklepanej wygenerowanej w oparciu o taką samą liczbę punktów, w specjalizowanym programie graficznym operującym na funkcjach sklepanych (Rhinceros 3.0), na komputerze wyposażonym w procesor 1,5 GHz i 512 MB pamięci operacyjnej trwa, kilka minut. Łatwo dostarczyć znacznie większe zbiory obserwacji, np. za pośrednictwem pomiarów prowadzonych przy użyciu skanerów laserowych, co wydłuży czas obliczeń w tak znacznym stopniu, że nawet wielordzeniowe procesory, które zostaną skonstruowane w ciągu najbliższych lat, nie będą w stanie przeprowadzić obliczeń w ekonomicznie uzasadnionym czasie. Problem ten pozwala rozwiązać aproksymacyjne funkcje B-sklejane. Umożliwiają one skonstruowanie pojedynczego odcinka splajnu dla dowolnej liczby punktów  $p_i$  przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów. Dzięki temu dla tych części obiektu, gdzie jego krzywizna zmienia się powoli, można skonstruować odcinki funkcji grupujące wiele punktów, natomiast w miejscach szybkiej zmiany krzywizny odcinki te tworzyć w oparciu o dwa punkty, co zredukuje funkcję aproksymacyjną do postaci interpolacyjnej pozwalającej na szczegółowy opis. Użytkownik może zdecydować, które części obiektu muszą być przedstawione precyzyjnie (interpolacja), a które mogą być poddane pewnej generalizacji (aproksymacja), w efekcie umożliwiając zmniejszenie liczby funkcji wynikowych. Wystarczy w tym celu rozwiązać zadanie najmniejszych kwadratów dla wybranych grup punktów  $p_i$ , które mają podlegać aproksymacji na zadanych odcinkach wg wzoru

$$\sum_{j=0}^r \left[ p_j - \sum_{i=0}^{n-m-1} d_i N_i^m(t) \right]^2 \rightarrow \min \quad (5)$$

gdzie:

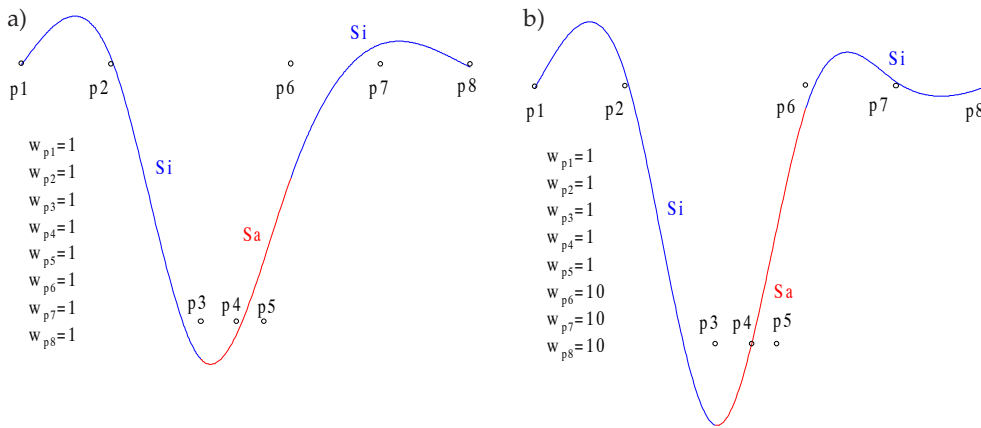
$n-m$  – liczba punktów kontrolnych  $d_i$  splajnu,

$r+1$  – liczba punktów mierzonych  $p_j$  użytych w aproksymacji.

Dla funkcji interpolacyjnych  $n-m > r+1$ .

Dokładne wyjaśnienie zasady konstruowania odcinków aproksymacyjnych wymaga szerszej znajomości zasad tworzenia funkcji B-sklepanych, co znacznie wykracza poza ramy objętościowe niniejszej publikacji. Szczegółowy opis zagadnienia znajdzie czytelnik w [2, 3], tutaj zostaną przedstawione jedynie pewne konsekwencje zastosowania tego rodzaju aproksymacji. Otóż jak wynika z (4) każdy odcinek splajnu zostaje określony za pomocą czterech punktów kontrolnych, których zasięg wpływu na dalsze odcinki jest identyczny dla krzywych aproksymacyjnych i interpolacyjnych. Jeżeli więc w bezpośredniej bliskości członu aproksymowanego wystąpią odcinki „interpolacyjne”, to faktycznie nie będą one

interpolowały punktów  $p_i$ , ponieważ nie pozwolą na to punkty kontrolne odcinka aproksymowanego, które uczestniczyć będą również w tworzeniu krzywej „interpolacyjnej”. Dopiero czwarty z kolei taki splajn będzie wolny od wpływu punktów  $d_i$  wytworzonych w procesie aproksymacyjno-sklejającym. To niekorzystne zjawisko można w pewnym stopniu wyeliminować poprzez zastosowanie odpowiedniego wagowania równań (przemnożenie macierzy współczynników przez macierz wagową). Narzucając większe wagi przy punktach, przez które krzywa ma przechodzić, można dla nich wymusić szybsze dążenie do osiągnięcia warunków interpolacyjnych. Nastąpi to jednak kosztem jakości przybliżenia na odcinkach aproksymowanych (por. rys. 5), są one bowiem również wrażliwe na wpływ punktów kontrolnych tworzących sąsiednie człony.



Rys. 5. Aproxymacja funkcjami B-sklejnymi: a) bez wagowania; b) z zastosowaniem wagowania;  $S_a$  – odcinek aproksymowany,  $S_i$  – odcinki interpolacyjne

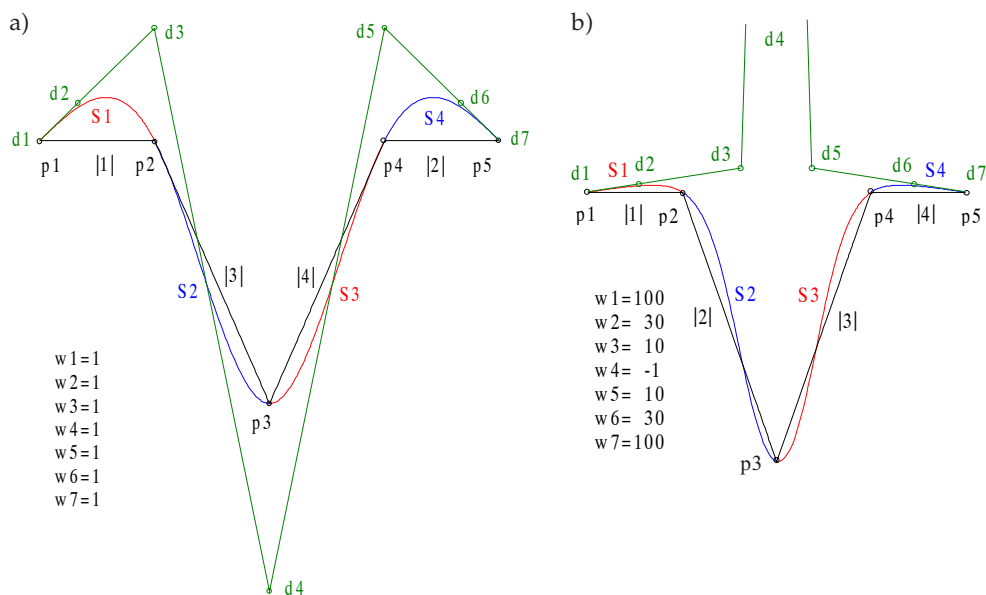
## 6.2. Funkcje NURBS

Ostatnią z prezentowanych metod modyfikacyjnych są wymierne funkcje B-sklejane, tzw. krzywe NURBS [2, 3] określone następująco

$$S_i(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-m-1} w_i d_i N_i^m(t)}{\sum_{i=0}^{n-m-1} w_i N_i^m(t)} \quad (6)$$

Pozwalają one wpłynąć na przebieg funkcji poprzez odpowiednią zmianę wag  $w_i$  przy punktach kontrolnych  $d_i$  (wagowanie to nie ma nic wspólnego z wagowaniem opisanym przy aproksymacyjnych funkcjach B-sklejanych). Dobór wag zależy wyłącznie od uznania użytkownika, z tego też powodu, jako całkowicie subiektywna, metoda ta powinna być

stosowana tylko w wyjątkowych przypadkach, do usuwania zapętleń i redukcji ponadnormatywnych zafalowań, nieistniejących na rzeczywistym obiekcie. W większości sytuacji praktycznych, przy dobrym rozkładzie punktów obserwowanych, metoda ta nie znajdzie zatem zastosowania, warta jest jednak przybliżenia, ponieważ pozwala ona wnosić największe zmiany do przebiegu funkcji spośród wszystkich innych metod modyfikacji splajnow. Wpływ poszczególnych wag jest ograniczony do kilku członów splajnu, mimo tego ocena ich oddziaływania na przebieg krzywej często nie jest łatwym zadaniem. Wprowadzenie wag dla danego punktu kontrolnego  $d_i$  zdeformuje odcinki sąsiednie, zwykle jest więc konieczne wprowadzenie na tych odcinkach pewnych wag przeciwdziałających temu zjawisku. Dobór prawidłowych wag wymaga na ogół kilku powtórzeń, ponieważ zarówno ich wielkość, znak, jak i możliwe konfiguracje punktów interpolacyjnych uniemożliwiają zebranie jednoznacznych wskazówek pozwalających je wstępnie określić. Najbezpieczniej jest utworzyć wszystkie funkcje przy wagach równych jedności i dopiero w zależności od potrzeb dokonywać zmian. Należy podkreślić, iż niewłaściwe wagowanie może doprowadzić do bardzo dużych zaburzeń splajnu. Pożytki płynące ze stosowania funkcji NURBS można ocenić porównując rysunki 6a i 6b. Nadanie ujemnej wagi dla punktu  $d_4$  (rys. 6b), która jest dodatkowo znacznie mniejsza pod względem modułu od pozostałych, spowodowało tak znaczne przesunięcie tego punktu, że nie zmieściłby się razem z wykresem na jednej stronie wydruku. Mimo to uzyskano znacznie lepsze przybliżenie szukanego kształtu niż bez wagowania (rys. 6a).



Rys. 6. Funkcje NURBS: a) bez wagowania; b) z zastosowaniem wagowania

## 7. Uwagi końcowe

Wymienione w opracowaniu metody modyfikacji funkcji sklepanych można ze sobą łączyć, otrzymując pożądany wpływ na poszczególne ich odcinki. Niektóre z tych metod powinny być bezwzględnie stosowane (opis parametryczny połączony z właściwą parametryzacją, odpowiedni dobór warunków brzegowych), innych korzystnie jest użyć w zależności od kształtu powierzchni, liczby punktów i dokładności ich wyznaczenia (wstawianie dodatkowych punktów, aproksymacyjne funkcje sklepane), a pozostałe (funkcje NURBS) warto wykorzystywać tylko w wyjątkowych wypadkach dużych zniekształceń wprowadzanych przez funkcję sklepaną. Metody te nie zapewnią jednak dobrego przybliżenia w przypadku braku odpowiednio równomiernego rozkładu obserwowanych na obiekcie punktów, a szczególnie pomocne wskazówki odnośnie planowania tego rozkładu znajdzie czytelnik w [3, 4].

## Literatura

- [1] Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L.: *The theory of splines and their applications*. New York, Academic Press Inc. 1967
- [2] Kiciak P.: *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni*. Warszawa, WNT 2000
- [3] Lenda G.: *Zastosowanie funkcji sklepanych w zautomatyzowanym procesie geodezyjnej kontroli kształtu powierzchni obiektów budowlanych*. Kraków, AGH 2005 (rozprawa doktorska)
- [4] Lenda G.: *Testy jakości dopasowania funkcji sklepanych do kształtów obiektów rzeczywistych*. Geodezja: Półrocznik AGH Geodezja, t. 11, z. 2, 2005 (materiały w druku)
- [5] Murray D.: *Active vision laboratory – Parametric curves and surfaces*. Department of Engineering Science, University of Oxford, 2004
- [6] Prenter M.: *Splines and variational methods*. New York, Wiley&Sons 1989