

**Stepan Savula\*, Yevhen Kharchenko\*\***

**TŁUMIENIE DRGAŃ KOLUMNY RUR  
POMPOWO-SPRĘŻARKOWYCH  
W ODWIERCIE PODZIEMNEGO ZBIORNIKA GAZU**

**1. WSTĘP**

Nagazowanie złoża oraz wydobywanie gazu wykonuje się za pomocą kolumny rur pompowo-sprężarkowych i otworów w kolumnie rur okładzinowych. W związku z turbulentnym przepływem gazu w otworze wiertniczym oraz oddziaływaniem wzajemnym gazu i ciekłego środowiska powstają drgania kolumny pompowo-sprężarkowej. Wskutek wibracji kolumny następuje odkręcanie jej dolnych rur, które spadają na dno otworu wiertniczego i ulegają dużym odkształceniom plastycznym lub zniszczeniu. Przy tym istotnie pomniejsza się wydajność odwiertu, ulegają ścieraniu się dolne rury okładzinowe.

Aby usunąć szkodliwy wpływ wibracji na niezawodność pracy kolumny rur pompowo-sprężarkowych, należy przeprowadzić badania jej drgań swobodnych i wymuszonych [6]. W niniejszym artykule przedstawiono model matematyczny drgań przestrzennych kolumny z uwzględnieniem oddziaływania wzajemnego rur i ścianek otworu wiertniczego. Zagadnienie rozwiązuje się na podstawie technicznej teorii belek [1–3], z zastosowaniem metody elementów skończonych [4, 5], która istotnie ułatwia numeryczną realizację modelu matematycznego za pomocą programu komputerowego.

**2. MODEL MATEMATYCZNY DRGAŃ POPRZECZNO-SKRĘTNYCH  
KOLUMNY RUR POMPOWO-SPRĘŻARKOWYCH**

Kolumnę rur pompowo-sprężarkowych rozpatrujemy jako pręt, który ma w stanie swobodnym oś prostoliniową. Podczas opuszczania kolumny do odwiertu jej oś wykrzywia się w związku z wykrzywieniem odwiertu w przestrzeni. Nieskończenie małe odcinki rur pompowo-sprężarkowych pod wpływem sił wewnętrznych mogą swobodnie się przemiesz-

---

\* Zarząd Głównych Przewodów Gazowych „Lvivtransgaz”, Lwów

\*\* Uniwersytet Warmińsko-Mazurski, Olsztyn

czać w kierunku poprzecznym tylko na odległość, która równa się szerokości szczeliny pomiędzy pompowo-sprężarkowymi i okładzinowymi rurami. Oczywiście jest to, iż zarówno statyczne, jak i dynamiczne siły oddziaływania wzajemnego kolumny rur pompowo-sprężarkowych ze ścianką odwiertu zależą od kształtu osi odwiertu.

W celu zestawienia modelu matematycznego drgań poprzeczno-skrętnych kolumny rur pompowo-sprężarkowych zgodnie z metodą elementów skończonych rozbijamy pręt na  $n$  odcinków o długości  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , a jego rozłożoną masę zamieniamy skupionymi w węzłach masami:

$$m_i = \frac{1}{2}\rho(A_i l_i + A_{i+1} l_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad m_n = \frac{1}{2}\rho A_n l_n \quad (1)$$

gdzie:

- $\rho$  – gęstość materiału,
- $A_i, l_i$  – powierzchnie przekrojów poprzecznych oraz długości odcinków ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Ruch kolumny rur pompowo-sprężarkowych rozpatrujemy w kartezjańskim układzie współrzędnych  $x, y, z$ . Oś  $x$  skierowana jest pionowo w dół, a początek współrzędnych  $O$  pokrywa się ze wspólnym środkiem skrajnego przekroju poprzecznego kolumny i odwiertu. Równania wykrzywionej osi odwiertu przedstawiamy w postaci:

$$y = y_0(x), \quad z = z_0(x), \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2)$$

gdzie  $l$  – głębokość zanurzenia kolumny do odwiertu.

Rozpatrzmy oddziaływanie w płaszczyźnie  $xOy$  dwóch sąsiednich odcinków kolumny z łączącym ich węzłem, oznaczając przemieszczenia węzła o numerze porządkowym  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) w kierunku osi  $y$  jako  $y_i$ ; kąt obrotu tego węzła w kierunku ruchu wskazówek zegara – jako  $\varphi_i$ ; rzut na oś  $y$  reakcji ścianek odwiertu w danym węźle – jako  $R_{yi}$ ; siły poprzeczne i momenty gnące na granicach odcinka (elementu skończonego) o numerze porządkowym  $i$  – jako  $Q_{1i}, M_{1i}, Q_{2i}, M_{2i}$ .

Stosując techniczną teorię zginania oraz biorąc pod uwagę, iż postępowe i obrotowe przemieszczenia zamocowanego końca kolumny są równe zeru, zapisujemy wartości sił wewnętrznych, które przenoszą się na węzły kolumny:

$$\begin{pmatrix} Q_{21} \\ M_{21} \end{pmatrix} = \frac{2EI_1}{l_1^3} \begin{pmatrix} 6 & 3l_1 \\ 3l_1 & 2l_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} + \frac{2\nu_0 I_1}{l_1^3} \begin{pmatrix} 6 & 3l_1 \\ 3l_1 & 2l_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{2i} \\ M_{2i} \end{pmatrix} = \frac{2EI_i}{l_i^3} \begin{pmatrix} -6 & 3l_i \\ -3l_i & l_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ \varphi_{i-1} \end{pmatrix} + \frac{2EI_i}{l_i^3} \begin{pmatrix} 6 & 3l_i \\ 3l_i & 2l_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_i \\ \varphi_i \end{pmatrix} + \frac{2\nu_0 I_i}{l_i^3} \begin{pmatrix} -6 & 3l_i \\ -3l_i & l_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{i-1} \\ \omega_{i-1} \end{pmatrix} + \frac{2\nu_0 I_i}{l_i^3} \begin{pmatrix} 6 & 3l_i \\ 3l_i & 2l_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_i \\ \omega_i \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$(i = 2, 3, \dots, n)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{1,i+i} \\ M_{1,i+i} \end{pmatrix} = \frac{2EI_{i+1}}{l_{i+1}^3} \begin{pmatrix} 6 & -3l_{i+1} \\ -3l_{i+1} & l_{i+1}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_i \\ \varphi_i \end{pmatrix} + \frac{2EI_{i+1}}{l_{i+1}^3} \begin{pmatrix} -6 & -3l_{i+1} \\ 3l_{i+1} & l_{i+1}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{i+1} \\ \varphi_{i+1} \end{pmatrix} + \frac{2v_0 I_{i+1}}{l_{i+1}^3} \begin{pmatrix} 6 & -3l_{i+1} \\ -3l_{i+1} & l_{i+1}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_i \\ \omega_i \end{pmatrix} + \frac{2v_0 I_{i+1}}{l_{i+1}^3} \begin{pmatrix} -6 & -3l_{i+1} \\ 3l_{i+1} & l_{i+1}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{i+1} \\ \omega_{i+1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$(i = 2, 3, \dots, n-1)$$

gdzie:

- $E$  – moduł Younga materiału rur pompowo-sprężarkowych,
- $v_0$  – współczynnik dyssypacji,
- $I_i$  – osiowy moment bezwładności przekroju poprzecznego rury ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),
- $v_i, \omega_i$  – prędkość postępowego i obrotowego ruchu węzłów ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Zgodnie z zasadą d'Alemberta, równanie ruchu postępowego węzłów w kierunku osi  $y$  zapisujemy w postaci:

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + Q_{21} + Q_{1,i+1} + R_{y_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} + Q_{2n} + R_{y_n} &= P_{y_n} \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie  $P_{y_n}$  – rzut obciążenia dynamicznego dolnego końca kolumny na oś  $y$ .

Biorąc pod uwagę zależności (3)–(6), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 12E \left( \frac{I_1}{l_1^3} + \frac{I_2}{l_2^3} - \frac{I_2}{l_2^3} \right) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 6E \left( \frac{I_1}{l_1^2} - \frac{I_2}{l_2^2} - \frac{I_2}{l_2^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \\ + 12v_0 \left( \frac{I_1}{l_1^3} - \frac{I_2}{l_2^3} - \frac{I_2}{l_2^3} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + 6v_0 \left( \frac{I_1}{l_1^2} - \frac{I_2}{l_2^2} - \frac{I_2}{l_2^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + R_{y_1} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 y}{dt^2} + 12E \left( -\frac{I_i}{l_i^3} \frac{I_i}{l_i^3} + \frac{I_{i+1}}{l_{i+1}^3} - \frac{I_{i+1}}{l_{i+1}^3} \right) \cdot \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{pmatrix} + 6E \left( \frac{I_i}{l_i^2} \frac{I_i}{l_i^2} - \frac{I_{i+1}}{l_{i+1}^2} - \frac{I_{i+1}}{l_{i+1}^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{pmatrix} + \\ + 12v_0 \left( -\frac{I_i}{l_i^3} \frac{I_i}{l_i^3} + \frac{I_{i+1}}{l_{i+1}^3} - \frac{I_{i+1}}{l_{i+1}^3} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_{i-1} \\ v_i \\ v_{i+1} \end{pmatrix} + 6v_0 \left( \frac{I_i}{l_i^2} \frac{I_i}{l_i^2} - \frac{I_{i+1}}{l_{i+1}^2} - \frac{I_{i+1}}{l_{i+1}^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} \omega_{i-1} \\ \omega_i \\ \omega_{i+1} \end{pmatrix} + R_{y_i} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$(i = 2, 3, \dots, n-1)$$

$$\begin{aligned}
& m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} + 12E \begin{pmatrix} -\frac{I_n}{l_n^3} & \frac{I_n}{l_n^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + 6E \begin{pmatrix} \frac{I_n}{l_n^2} & \frac{I_n}{l_n^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} + \\
& + 12\nu_0 \begin{pmatrix} -\frac{I_n}{l_n^3} & \frac{I_n}{l_n^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} + 6\nu_0 \begin{pmatrix} \frac{I_n}{l_n^2} & \frac{I_n}{l_n^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{n-1} \\ \omega_n \end{pmatrix} + R_{yn} = P_{yn}
\end{aligned} \tag{9}$$

Pomijając siły bezwładności ruchu obrotowego węzłów, równanie równowagi momentów zapisujemy w postaci:

$$M_{2i} + M_{1,i+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad M_{2n} = 0 \tag{10}$$

Biorąc pod uwagę równości (3)–(5), przekształcamy zależność (10) do postaci:

$$\begin{aligned}
& 6E \begin{pmatrix} \frac{I_1}{l_1^2} - \frac{I_2}{l_2^2} & \frac{I_2}{l_2^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 2E \begin{pmatrix} \frac{2I_1}{l_1} + \frac{2I_2}{l_2} & \frac{I_2}{l_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \\
& + 6\nu_0 \begin{pmatrix} \frac{I_1}{l_1^2} - \frac{I_2}{l_2^2} & \frac{I_2}{l_2^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + 2\nu_0 \begin{pmatrix} \frac{2I_1}{l_1} + \frac{2I_2}{l_2} & \frac{I_2}{l_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
& 6E \begin{pmatrix} -\frac{I_i}{l_i^2} & \frac{I_i}{l_i^2} & -\frac{I_{i+1}}{l_{i+1}^2} & \frac{I_{i+1}}{l_{i+1}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \end{pmatrix} + 2E \begin{pmatrix} \frac{I_i}{l_i} & \frac{2I_i}{l_i} + \frac{2I_{i+1}}{l_{i+1}} - \frac{I_{i+1}}{l_{i+1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{pmatrix} + \\
& + 6\nu_0 \begin{pmatrix} -\frac{I_i}{l_i^2} & \frac{I_i}{l_i^2} & -\frac{I_{i+1}}{l_{i+1}^2} & \frac{I_{i+1}}{l_{i+1}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{i-1} \\ v_i \\ v_{i+1} \end{pmatrix} + 2\nu_0 \begin{pmatrix} \frac{I_i}{l_i} & \frac{2I_i}{l_i} + \frac{2I_{i+1}}{l_{i+1}} - \frac{I_{i+1}}{l_{i+1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{i-1} \\ \omega_i \\ \omega_{i+1} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

$$(i = 2, 3, \dots, n-1)$$

$$\begin{aligned}
& 6E \begin{pmatrix} -\frac{I_n}{l_n^2} & \frac{I_n}{l_n^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + 2E \begin{pmatrix} \frac{I_n}{l_n} & \frac{2I_n}{l_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} + \\
& + 6\nu_0 \begin{pmatrix} -\frac{I_n}{l_n^2} & \frac{I_n}{l_n^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} + 2\nu_0 \begin{pmatrix} \frac{I_n}{l_n} & \frac{2I_n}{l_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{n-1} \\ \omega_n \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Łącząc zależności (7)–(9) w jedną macierzową równość, otrzymujemy

$$M \frac{d^2 Y}{dt^2} + C_y Y + C_\varphi \Phi + N_y V + N_\varphi \Omega + R_y = P_y \tag{14}$$

gdzie:

$Y, \Phi$  – macierze kolumnowe nieznanymi przemieszczeń:

$$Y = \text{col}(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad \Phi = \text{col}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n),$$

$V, \Omega$  – macierze kolumnowe prędkości postępowego i obrotowego ruchu węzłów:

$$V = \text{col}(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad \Omega = \text{col}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n),$$

$M$  – macierz diagonalna współczynników bezwładności, przedstawionych wzorami (1):  $M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$ ,

$C_y, C_\varphi$  – macierze kwadratowe współczynników sztywności, które z uwzględnieniem oznaczeń  $\alpha_i = I_i / l_i^3, \beta_i = I_i / l_i^2$  przedstawiamy w postaci:

$$C_y = 12E \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & -\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 & \alpha_3 + \alpha_4 & -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_i & \alpha_i + \alpha_{i+1} & -\alpha_{i+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_n & \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$C_\varphi = 6E \begin{pmatrix} \beta_1 - \beta_2 & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \beta_2 - \beta_3 & -\beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & \beta_3 - \beta_4 & -\beta_4 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \beta_i & \beta_i - \beta_{i+1} & -\beta_{i+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_n & \beta_n \end{pmatrix},$$

$N_y, N_\varphi$  – macierze kwadratowe współczynników dyssypacji:

$$N_y = \frac{v_0}{E} C_y, \quad N_\varphi = \frac{v_0}{E} C_\varphi,$$

$R_y, P_y$  – macierze kolumnowe rzutów reakcji ścianki odwiertu oraz rzutów obciążeń na oś  $y$ :

$$R_y = \text{col}(R_{y1}, R_{y2}, \dots, R_{yn}), \quad P_y = \text{col}(0, 0, \dots, P_n).$$

Analogicznie łączymy zależności (11)–(13)

$$D_y Y + D_\varphi \Phi + K_y V + K_\varphi \Omega = 0 \quad (15)$$

gdzie:

$D_y, D_\varphi$  – macierze kwadratowe współczynników sztywności, które z uwzględnieniem wartości  $\beta_i = I_i / l_i^2, \gamma_i = I_i / l_i$  zapisujemy jako:

$$D_y = 6E \begin{pmatrix} \beta_1 - \beta_2 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_2 & \beta_2 - \beta_3 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 & \beta_3 - \beta_4 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_i & \beta_i - \beta_{i+1} & \beta_{i+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_n & \beta_n \end{pmatrix},$$

$$D_\varphi = 2E \begin{pmatrix} 2\gamma_1 + 2\gamma_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 2\gamma_2 + 2\gamma_3 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_3 & 2\gamma_3 + 2\gamma_4 & \gamma_4 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_i & 2\gamma_i + 2\gamma_{i+1} & \gamma_{i+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_n & 2\gamma_n \end{pmatrix},$$

$K_y, K_\varphi$  – macierze kwadratowe współczynników dyssypacji:

$$K_y = \frac{v_0}{E} D_y, \quad K_\varphi = \frac{v_0}{E} D_\varphi.$$

Analogicznie do równości (14) i (15) zapisujemy równania ruchu postępowego węzłów w kierunku osi  $z$  oraz równania momentów gnących w płaszczyźnie  $xOz$ :

$$M \frac{d^2 Z}{dt^2} + C_z Z + C_\Psi \Psi + N_z W + N_\Psi \Theta + R_z = P_z \quad (16)$$

$$D_z Z + D_\Psi \Psi + K_z W + K_\Psi \Theta = 0 \quad (17)$$

gdzie:

$Z, \Psi$  – macierze kolumnowe przemieszczeń węzłów w kierunku osi  $z$  i kątów obrotu węzłów w płaszczyźnie  $xOz$ , zestawione analogicznie do macierzy kolumnowych  $Y$  i  $\Phi$ :

$$Z = \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad \Psi = \text{col}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n),$$

$W, \Theta$  – macierze kolumnowe prędkości postępowego i obrotowego ruchu węzłów, stworzone analogicznie do macierzy kolumnowych  $V$  i  $\Omega$ :

$$W = \text{col}(w_1, w_2, \dots, w_n), \quad \Theta = \text{col}(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n),$$

- $C_z, C_\psi, D_z, D_\psi$  – macierze kwadratowe współczynników sztywności, przy czym:  
 $C_z = C_y, C_\psi = C_\phi, D_z = D_y, D_\psi = D_\phi,$   
 $N_z, N_\psi, K_z, K_\psi$  – macierze kwadratowe współczynników dyssypacji:  
 $N_z = N_y, N_\psi = N_\phi, K_z = K_y, K_\psi = K_\phi,$   
 $R_z, P_z$  – macierze kolumnowe rzutów na oś z reakcji ścianki odwiertu  
 oraz rzutów obciążeń, które zostały zestawione analogicznie do  
 macierzy  $R_y$  i  $P_y$ , wykorzystanych w równaniu (14).

Eliminujemy za pomocą zależności (15) macierz kolumnową  $\Phi$  w równaniu macierzowym (14) i doprowadzamy to równanie do postaci zagadnienia Cauchy'ego:

$$\begin{aligned}
 \frac{dY}{dt} &= V \\
 \frac{dV}{dt} &= \\
 &= M^{-1} [(C_\phi D_\phi^{-1} D_y - C_y)Y + (C_\phi D_\phi^{-1} K_y - N_y)V + (C_\phi D_\phi^{-1} K_\phi - N_\phi)\Omega - R_y + P_y]
 \end{aligned} \tag{18}$$

Przetwarzając analogicznie równania (16) i (17) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \frac{dZ}{dt} &= W \\
 \frac{dW}{dt} &= \\
 &= M^{-1} [(C_\psi D_\psi^{-1} D_z - C_z)Z + (C_\psi D_\psi^{-1} K_z - N_z)W + (C_\psi D_\psi^{-1} K_\psi - N_\psi)\Theta - R_z + P_z]
 \end{aligned} \tag{19}$$

Równania (18) i (19), które opisują poprzeczne drgania kolumny, rozwiązuje się wraz z równaniami drgań skrętnych. Warunki początkowe całkowania równań ruchu obliczamy z uwzględnieniem zależności (2).

### 3. WYNIKI OBLICZEŃ I WNIOSKI

Dla określenia wpływu wibracji kolumny rur pompowo-sprężarkowych na niezawodność pracy jej połączeń gwintowych wykonano obliczenia drgań wymuszonych kolumny o długości 1000 m. Kolumna składa się z rur o zewnętrznej średnicy wynoszącej 114,3 mm i o grubości ścianki 7 mm. Został rozpatrzony ogólny przypadek zagadnienia, przy którym kolumna utwierdzona jest na górnym końcu, dolny koniec kolumny obciążony siłami okresowymi w kierunkach osi  $y$  i  $z$ , podczas drgań powstają zderzenia kolumny o ścianki skrzywionego otworu wiertniczego. Jak wynika z obliczeń, wibracje kolumny odbywają się w okresie wyższych jej częstotliwości własnych, których widmo ma wielką gęstość, co świadczy o wysokim prawdopodobieństwie powstania zjawisk rezonansowych. Badania wykazują, iż jeśli dolny koniec kolumny nie jest oparty, bierze on największy udział w pro-

cesach wibracyjnych. Zamocowanie dolnej części kolumny za pomocą urządzeń rozporowych daje możliwość istotnego pomniejszenia amplitudy wibracji rur pompowo-sprężarkowych oraz ułatwienia warunków pracy połączeń gwintowych. W celu pomniejszenia szkodliwego wpływu wibracji rur pompowo-sprężarkowych zaproponowano konstrukcję tłumnika drgań [7] oraz opracowano metodykę obliczania sztywności taśmowych sprężyn tłumnika.

## LITERATURA

- [1] Giergiel J.: *Drgania układów mechanicznych*. Kraków, AGH 1980
- [2] Osiński Z.: *Teoria drgań*. Warszawa, PWN 1978
- [3] Uhl T.: *Zastosowanie analizy modalnej w diagnostyce maszyn*. Diagnostyka, vol 23, 2000, 87–92
- [4] Зенкевич О., Морган К.: *Конечные элементы и аппроксимация*. М.: Мир 1986
- [5] Харченко Е.В.: *Динамические процессы буровых установок*. Львов, Світ 1991.
- [6] Савула С.Ф., Колодій В.Т., Харченко Е.В., Кичма А.О.: *Оцінка впливу коливань колони насосно-компресорних труб на умови роботи різьбових з'єднань*. Науковий вісник Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу. Вип. 2 (8), Івано-Франківськ, ІФНТУНГ 2004
- [7] Савула С.Ф., Колодій В.Т., Гурняк Л.І., Кичма А.О., Харченко Е.В.: *Віброізолятор колони насосно-компресорних труб*. Деклараційний патент на винахід, No. 67304А, Бюл. No. 6, від 15.06.2004