

Kornel Frydrych\*

## WPŁYW KONSTRUKCJI OBUDOWY TUNELU O PRZEKROJU KOŁOWYM NA WARTOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKA PODATNOŚCI PODŁOŻA

---

### 1. Wprowadzenie

Cechą wyróżniającą obudowy wyrobisk podziemnych (w tym tuneli) jest, że obudowy te współpracują z górotworem, tzn. na kontakcie obudowy i górotworu powstają przemieszczenia powodujące zaistnienie sił, które działają oprócz aktywnego parcia górotworu. Siły te zwane są odporem górotworu (zwykle: odporem sprężystym górotworu). Istnienie odporu sprężystego górotworu znacznie zwiększa nośność obudowy. Fakt ten spowodował, że zgodnie ze stosowaną obecnie normą [5], w obliczeniach sił wewnętrznych należy uwzględnić odpór sprężysty górotworu. Odpór sprężysty górotworu w ujęciu normy [5] opiera się na koncepcji sprężystego podłoża według Winklera, która jest wykorzystywana w obliczeniach belek na sprężystym podłożu [2], np. przy projektowaniu fundamentów.

Podstawowym parametrem charakteryzującym odpór sprężysty górotworu jest współczynnik podatności podłoża  $k$ , zwany w literaturze angielskiej *modulus (coefficient) of subgrade reaction* (bądź też *bedding value*), a w literaturze rosyjskiej *коэффициент постели*. W literaturze dotyczącej projektowania tuneli współczynnik ten jest oznaczany symbolem  $C$ . Wartość współczynnika podatności podłoża jest uzyskiwana zwykle w badaniach *in situ* (tzw. *plate-bearing test*); wartości tego współczynnika można znaleźć w pracach [2, 4, 6, 7]. W przypadku projektowania obudowy tuneli zagadnienie odporu sprężystego górotworu stało się w Polsce szerzej znane po ukazaniu się pracy Dawydowa [1].

### 2. Analiza wpływu konstrukcji tunelu o przekroju kołowym na wartość współczynnika podatności podłoża

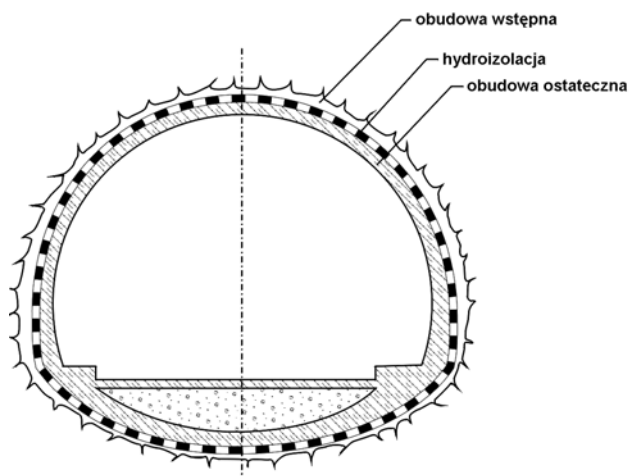
Obudowa tunelu ma zwykle postać obudowy wielowarstwowej (rys. 1), składającej się z obudowy wstępnej, hydroizolacji i obudowy ostatecznej. Przekroje tuneli przybierają po-

---

\* Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

stać kołową, eliptyczną lub podkowiastą w zależności od warunków geotechnicznych i użytkowych.

Przy projektowaniu obudowy konstruktor napotyka problem, w jaki sposób jej konstrukcja wpływa na wartość współczynnika podatności podłoża. Odpowiedź na to pytanie w przypadku obudowy wielowarstwowej można znaleźć w sposób nieskomplikowany jedynie dla przekroju kołowego.



Rys. 1. Przekrój tunelu w obudowie wielowarstwowej

Analizę wpływu konstrukcji obudowy tunelu o przekroju kołowym na wartość współczynnika podatności podłoża przeprowadzono dla trzech modeli obudowy:

- 1) tunelu w obudowie wstępnej z folią hydroizolacyjną,
- 2) tunelu w obudowie wstępnej bez folii hydroizolacyjnej,
- 3) tunelu bez obudowy wstępnej.

Rozważono środkowo-symetryczne zadanie teorii sprężystości (rys. 2) nieważkiej tarczy z otworem z umieszczonymi w nim bez luzu i wcisku dwoma nieważkimi pierścieniami:

- pierścieniem wewnętrznym (folia hydroizolacyjna o współczynniku sprężystości wzdłużnej  $E_1$  i liczbie Poissona  $\nu_1$ ) o promieniach  $r_0, r_1$  ( $r_1 > r_0$ ),
- pierścieniem zewnętrznym (obudowa wstępna tunelu wykonana z materiału o współczynniku sprężystości wzdłużnej  $E_2$  i liczbie Poissona  $\nu_2$ ) o promieniach  $r_1, r_2$  ( $r_2 > r_1$ ).

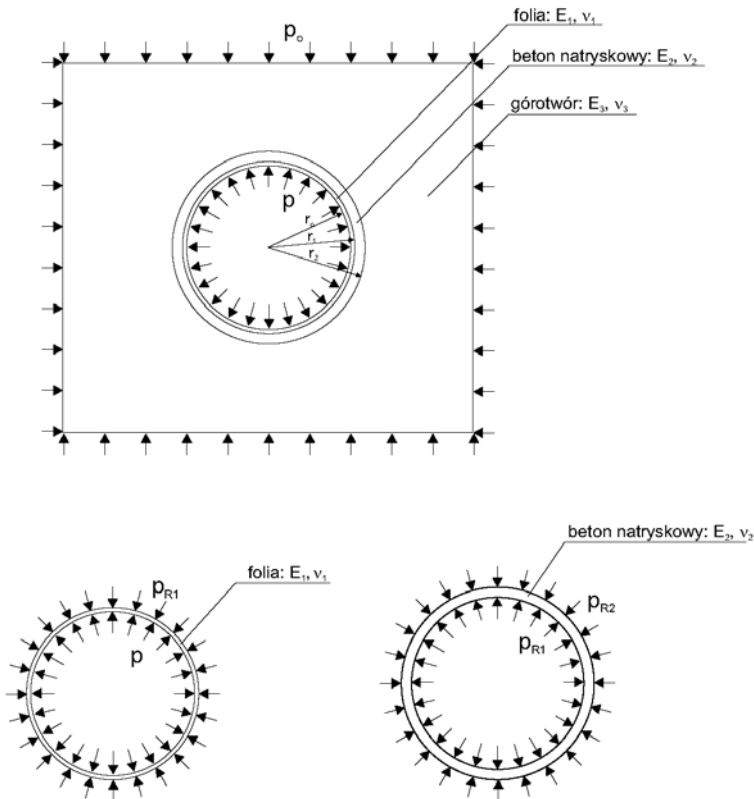
Brzegi tarczy są wolne od obciążeń, natomiast na wewnętrznej powierzchni pierścienia wewnętrznego działa ciśnienie  $p$  (docisk od obudowy ostatecznej), które generuje powstawanie odporu sprężystego górotworu [3].

Stan naprężenia w pierścieniach i tarczy charakteryzowany jest następującymi składowymi tensora naprężenia (naprężeniami głównymi):

- naprężenie radialne  $\sigma_r$  o kierunku zgodnym z kierunkiem promienia wychodzącego ze środka tarczy z pierścieniem,
- naprężenie obwodowe  $\sigma_t$  o kierunku prostopadłym do kierunku promienia wychodzącego ze środka tarczy z pierścieniem,
- naprężenia podłużne  $\sigma_l$  o kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku (zakłada się płaski stan odkształcenia).

Stan przemieszczenia charakteryzowany jest wektorem przemieszczenia  $u$  o kierunku promieniowym.

Przy rozwiązywaniu zadania wykorzystano klasyczne rozwiązanie Lamégo dla sprężystego pierścienia kołowego o promieniach (odpowiednio wewnętrznym i zewnętrznym)  $a < b$  obciążonego ciśnieniem wewnętrznym  $p_a$  oraz zewnętrznym  $p_b$ .



Rys. 2. Szkic do modelu pierwszego

Rozwiązanie to ma postać [2] (naprężenia rozciągające są dodatnie, przemieszczenia  $u$  są dodatnie, jeżeli są skierowane od środka na zewnątrz):

$$\sigma_r = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(p_a - p_b) \cdot a^2 b^2}{(b^2 - a^2) \cdot r^2} \quad (1)$$

$$\sigma_t = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_a - p_b) \cdot a^2 b^2}{(b^2 - a^2) \cdot r^2} \quad (2)$$

$$\sigma_l = \frac{2\nu \cdot (p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2)}{b^2 - a^2} \quad (3)$$

$$u = \frac{1+\nu}{E} \cdot \left[ (1-2\nu) \cdot \frac{(p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2) \cdot r}{b^2 - a^2} + \frac{(p_a - p_b) \cdot a^2 b^2}{(b^2 - a^2) \cdot r} \right] \quad (4)$$

Zakładając równość przemieszczeń radialnych na kontaktach pierścieni oraz na kontakcie pierścienia zewnętrznego i tarczy oraz oznaczając reakcje na powierzchniach kontaktowych odpowiednio przez  $p_{R_1}$  (kontakt pierścieni) oraz  $p_{R_2}$  (kontakt pierścienia zewnętrznego i tarczy), otrzymuje się układ dwóch równań liniowych:

$$u_1(p_{R_1})|_{r=r_1} = u_2(p_{R_1}, p_{R_2})|_{r=r_1} \quad (5)$$

$$u_2(p_{R_1}, p_{R_2})|_{r=r_2} = u_t(p_{R_2})|_{r=r_2} \quad (6)$$

gdzie:

$u_1, u_2$  — przemieszczenia pierścieni,  
 $u_t$  — przemieszczenie tarczy.

Z układu tego wyznacza się reakcje na powierzchniach kontaktowych:

$$p_{R_1} = - \frac{2E_2 \cdot (1-\nu_1^2) \cdot p \cdot r_o^2 (r_2^2 - r_1^2)^2 \cdot [E_2 \cdot (1+\nu_3) \cdot (r_2^2 - r_1^2) + E_3 \cdot (1+\nu_2) \cdot (r_1^2 + (1-2\nu) \cdot r_2^2)]}{E_1 \cdot E_3 \cdot (r_1^2 - r_o^2) (r_2^2 - r_1^2) \cdot A} \quad (7)$$

$$p_{R_2} = - \frac{4E_2 \cdot (1-\nu_1^2) \cdot (1-\nu_2^2) \cdot p \cdot r_o^2 \cdot r_1^2 \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{E_1 \cdot (r_1^2 - r_o^2) \cdot A} \quad (8)$$

przy czym

$$\begin{aligned}
 A = & 4 \cdot (1 - \nu_2^2)^2 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2 - \left[ E_1 \cdot (1 + \nu_2) \cdot (r_1^2 - r_o^2) \cdot (r_2^2 + (1 - 2\nu_2) \cdot r_1^2) + \right. \\
 & + E_2 \cdot (1 + \nu_1) \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot (r_o^2 + (1 - 2\nu_1) \cdot r_1^2) \left. \right] \cdot \left[ E_2 \cdot (1 + \nu_3) \cdot (r_2^2 - r_1^2) + \right. \\
 & \left. + E_3 \cdot (1 + \nu_2) \cdot (r_1^2 + (1 - 2\nu_2) \cdot r_2^2) \right] \cdot \left[ E_1 \cdot E_3 \cdot (r_1^2 - r_o^2) \right]^{-1}
 \end{aligned} \quad (9)$$

Po obliczeniu reakcji można wyznaczyć naprężenia i przemieszczenia, korzystając ze wzorów (1)–(4). Oznaczając przez  $u_a$  przemieszczenia radialne folii, tj.

$$u_a = u_1 \Big|_{r=r_o} \quad (10)$$

otrzymuje się wzór na współczynnik podatności podłoża dla modelu pierwszego

$$C_1 = \frac{P}{u_a} \quad (11)$$

Po wykonaniu odpowiednich obliczeń uzyskano

$$C_1 = \frac{E_1}{(1 + \nu_1) \cdot r_o} \cdot \frac{A_1}{A_2} \quad (12)$$

przy czym

$$\begin{aligned}
 A_1 = & -E_1 (1 + \nu_2) \cdot (r_1^2 - r_o^2) \cdot \left[ -E_2 \cdot (1 + \nu_3) \cdot (r_2^2 + (1 - 2\nu_2) \cdot r_1^2) - \right. \\
 & \left. - E_3 \cdot (1 - 2\nu_2) \cdot (1 + \nu_2) \cdot (r_2^2 - r_1^2) \right] + E_2 \cdot (1 + \nu_1) \cdot (r_o^2 + (1 - 2\nu_1) \cdot r_1^2) \cdot \\
 & \cdot \left[ E_3 \cdot (1 + \nu_2) \cdot r_1^2 + E_3 \cdot (1 - 2\nu_2) \cdot (1 + \nu_2) \cdot r_2^2 + E_2 (1 + \nu_3) \cdot (r_2^2 - r_1^2) \right]
 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 A_2 = & \left[ E_3 \cdot (1 + \nu_2) - E_2 \cdot (1 + \nu_3) \right] \cdot r_1^2 \cdot \left[ E_2 \cdot (1 - 2\nu_1) \cdot (1 + \nu_1) \cdot (r_1^2 - r_o^2) - \right. \\
 & \left. - E_1 \cdot (1 - 2\nu_2) \cdot (1 + \nu_2) \cdot (r_1^2 + (1 - 2\nu_1) \cdot r_o^2) \right] + \\
 & + \left[ E_2 \cdot (1 + \nu_3) + E_3 \cdot (1 - 2\nu_2) \cdot (1 + \nu_2) \right] \cdot r_2^2 \cdot \\
 & \cdot \left[ E_2 \cdot (1 - 2\nu_1) \cdot (1 + \nu_1) \cdot (r_1^2 - r_o^2) + E_1 \cdot (1 + \nu_2) \cdot (r_1^2 + (1 - 2\nu_1) \cdot r_o^2) \right]
 \end{aligned} \quad (14)$$

Analogiczne wyniki otrzymano dla modelu drugiego i trzeciego.

W przypadku modelu drugiego, zakładając równość przemieszczeń radialnych na kontakcie pierścienia z betonem natryskowego i tarczy górotworu, otrzymano równanie liniowe

$$u_2 (p_{R_2})_{|r=r_2} = u_1 (p_{R_2})_{|r=r_2} \quad (15)$$

z którego otrzymano wzór na wartość współczynnika podatności podłoża

$$C_2 = \frac{E_2}{(1+\nu_2)} \cdot \frac{A_3}{A_4} \quad (16)$$

gdzie:

$$A_3 = E_2 \cdot (1+\nu_3) \cdot (r_2^2 - r_1^2) + E_3 \cdot (1+\nu_2) \cdot [(1-2\nu_2) \cdot r_2^2 + r_1^2] \quad (17)$$

$$A_4 = E_2 \cdot (1+\nu_3) \cdot [(1-2\nu_2) \cdot r_1^2 + r_2^2] + E_3 \cdot (1-\nu_2 - 2\nu_2^2) \cdot (r_2^2 - r_1^2) \quad (18)$$

Podobnie przy rozważaniu modelu trzeciego otrzymuje się dla współczynnika podatności podłoża według Winklera wzór

$$C_3 = \frac{E_3}{(1+\nu_3)} \cdot r_2 \quad (19)$$

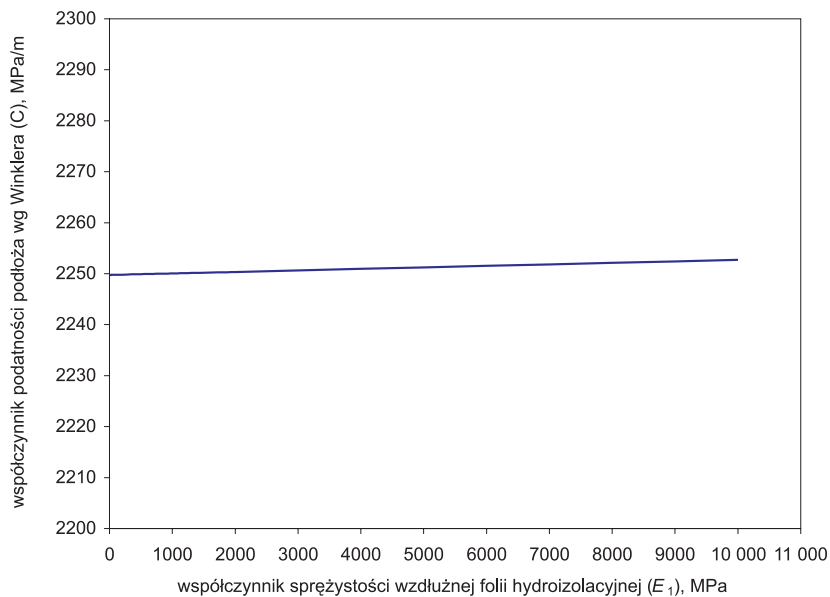
W oparciu o wyprowadzone wzory przeprowadzono obliczenia.

W pierwszym modelu do obliczeń przyjęto tunel o średnicy w świetle obudowy  $D = 6,0$  m, w obudowie wstępnej grubości 15 cm z betonu klasy B15 z folią hydroizolacyjną o grubości od 2 do 20 mm, wobec braku danych obliczeniowych wartości współczynnika sprężystości wzdłużnej folii ( $E_1$ ) przyjęto, że wahają się one w przedziale od 0,01 do 10 000 MPa.

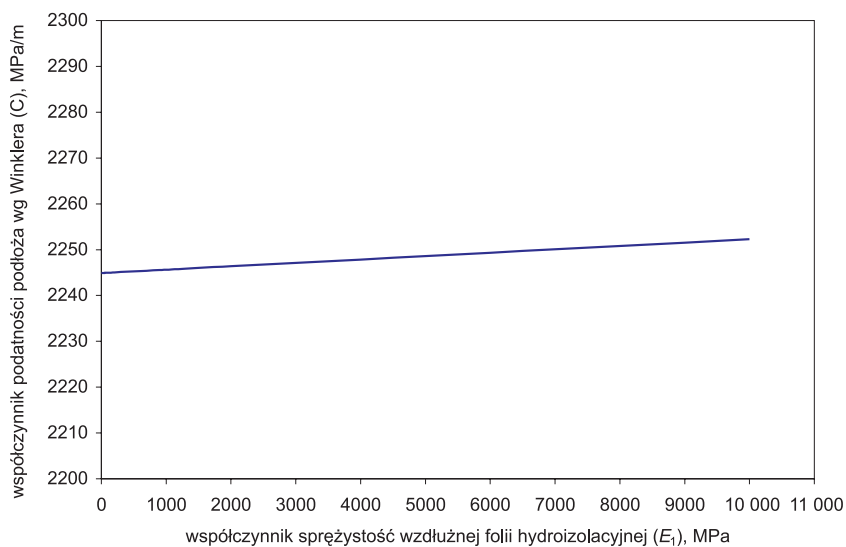
Zestawienie wszystkich danych do obliczeń przedstawiono poniżej:

- liczba Poissona folii:  $\nu_1 = 0,5$ ,
- liczba Poissona betonu:  $\nu_2 = 0,2$ ,
- liczba Poissona górotworu:  $\nu_3 = 0,25$ ,
- współczynnik sprężystości wzdłużnej folii:  $E_1 = 0,01 - 10\ 000$  MPa,
- współczynnik sprężystości wzdłużnej betonu klasy B15:  $E_2 = 27\ 000$  MPa,
- współczynnik sprężystości wzdłużnej górotworu:  $E_3 = 7000$  MPa,
- promień tunelu w świetle obudowy wstępnej wyłożonej folią:  $r_1 = 3$  m,
- grubość folii hydroizolacyjnej: 2; 5; 10; 20 mm,
- promień tunelu w świetle obudowy wstępnej:  $r_2 = 3,002; 3,005; 3,010; 3,020$  m,
- grubość obudowy wstępnej: 15 cm,
- promień tunelu w wyłomie:  $r_3 = 3,152; 3,155; 3,160; 3,170$  m.

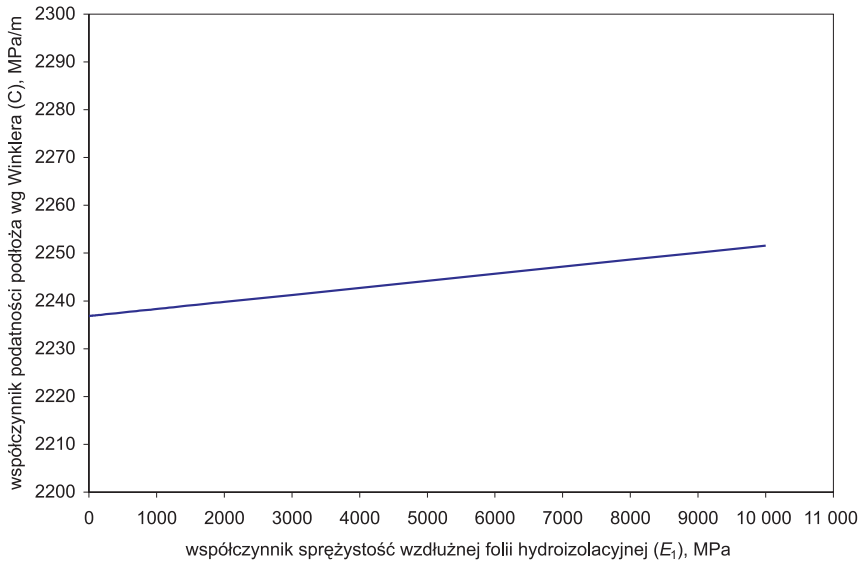
Wyniki obliczeń przedstawiono graficznie na wykresach (rys. 3–6).



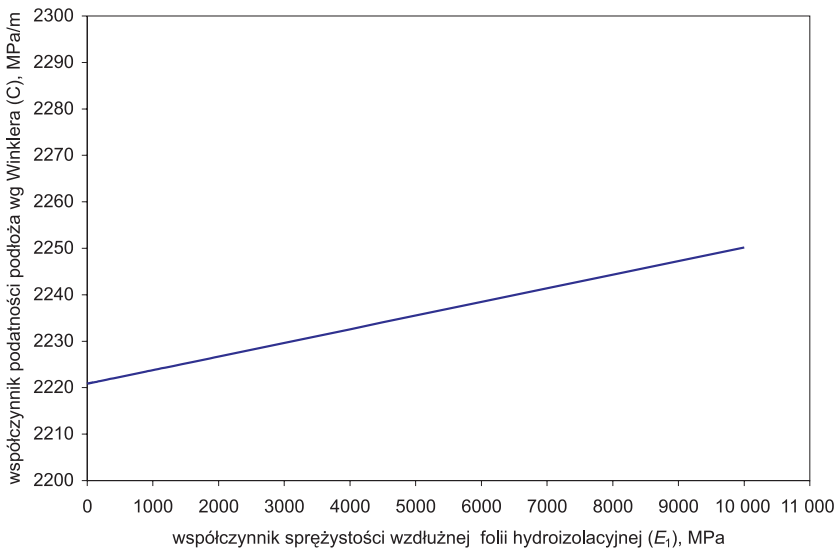
**Rys. 3.** Wykres zależności współczynnika podatności podłoża według Winklera ( $C$ ) od współczynnika sprężystości wzdłużnej folii ( $E_1$ ) dla obudowy wstępnej tunelu o grubości 15 cm z betonu klasy B15 z folią hydroizolacyjną o grubości 2 mm



**Rys. 4.** Wykres zależności współczynnika podatności podłoża według Winklera ( $C$ ) od współczynnika sprężystości wzdłużnej folii ( $E_1$ ) dla obudowy wstępnej tunelu o grubości 15 cm z betonu klasy B15 z folią hydroizolacyjną o grubości 5 mm



**Rys. 5.** Wykres zależności współczynnika podatności podłoża według Winklera (C) od współczynnika sprężystości wzdłużnej folii ( $E_1$ ) dla obudowy wstępnej tunelu o grubości 15 cm z betonu klasy B15 z folią hydroizolacyjną o grubości 10 mm



**Rys. 6.** Wykres zależności współczynnika podatności podłoża według Winklera (C) od współczynnika sprężystości wzdłużnej folii ( $E_1$ ) dla obudowy wstępnej tunelu o grubości 15 cm z betonu klasy B15 z folią hydroizolacyjną o grubości 20 mm

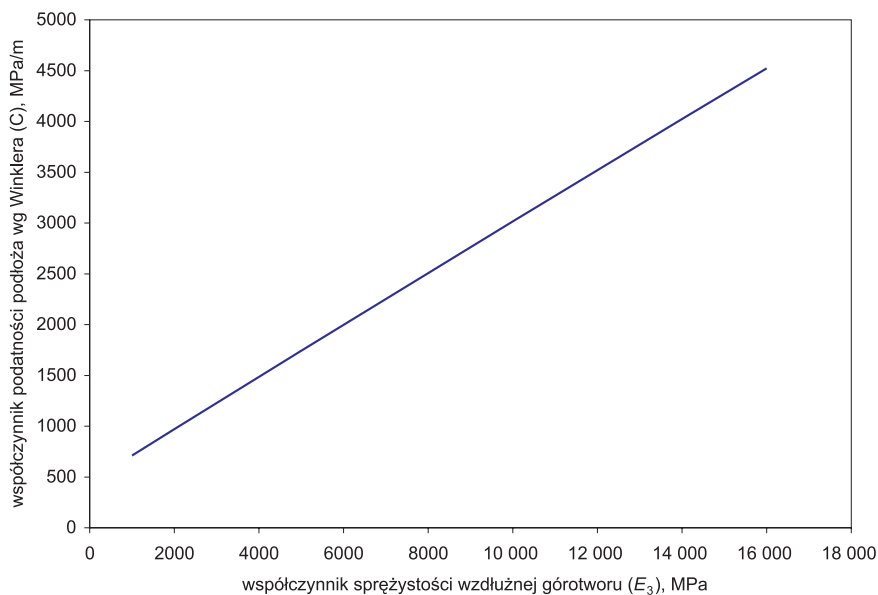


W drugim modelu do obliczeń przyjęto tunel o średnicy w świetle obudowy  $D = 6,0$  m, w obudowie wstępnej grubości 15 cm z betonu klasy B15 bez folii hydroizolacyjnej. Wartości współczynnika sprężystości wzdłużnej górotworu ( $E_3$ ) przyjęte do obliczeń wahały się w przedziale od 1000 do 16 000 MPa.

Zestawienie wszystkich danych do obliczeń przedstawiono poniżej:

- liczba Poissona betonu:  $\nu_2 = 0,2$ ,
- liczba Poissona górotworu:  $\nu_3 = 0,25$ ,
- współczynnik sprężystości wzdłużnej betonu klasy B15:  $E_2 = 27\ 000$  MPa,
- współczynnik sprężystości wzdłużnej górotworu:  $E_3 = 1000 - 16\ 000$  MPa,
- grubość obudowy wstępnej: 15 cm,
- promień tunelu w świetle obudowy wstępnej:  $r_1 = 3$  m,
- promień tunelu w wyłomie:  $r_2 = 3,15$  m.

Wyniki obliczeń przedstawiono graficznie na wykresie (rys. 7).



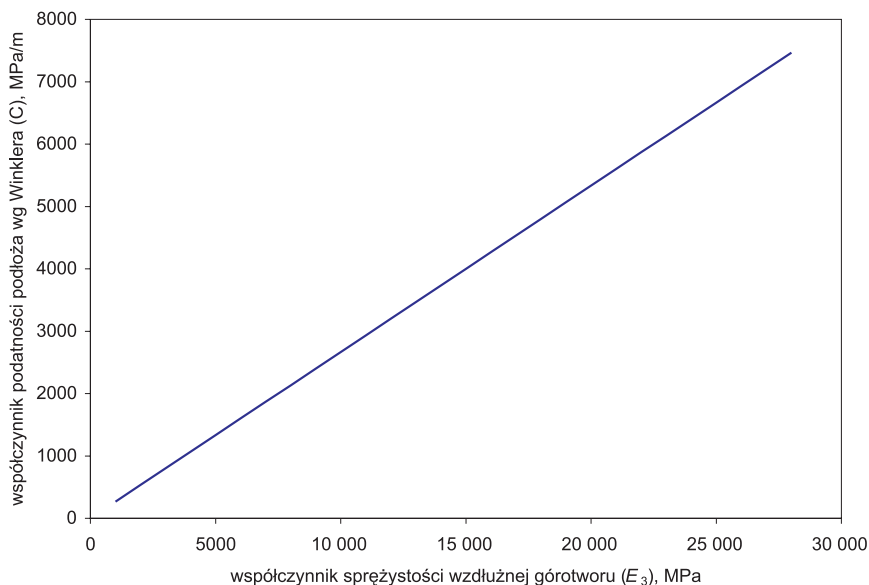
**Rys. 7.** Wykres zależności współczynnika podatności podłoża według Winklera (C) od współczynnika sprężystości wzdłużnej górotworu ( $E_3$ ) dla obudowy wstępnej tunelu o grubości 15 cm z betonu klasy B15 bez folii hydroizolacyjnej

Trzeci model przyjęty do obliczeń dotyczy tunelu bez obudowy wstępnej o średnicy w wyłomie  $D = 6,0$  m. Wartości współczynnika sprężystości wzdłużnej górotworu ( $E_3$ ) przyjęte do obliczeń wahały się w przedziale od 1000 do 28 000 MPa.

Pozostałe dane do obliczeń przedstawiono poniżej:

- liczba Poissona górotworu:  $\nu_3 = 0,25$ ,
- promień tunelu w wyłomie:  $r_2 = 3,0$  m,
- współczynnik sprężystości wzdłużnej górotworu:  $E_3 = 1000 - 28\ 000$  MPa.

Wyniki obliczeń przedstawiono graficznie na wykresie (rys. 8).



**Rys. 8.** Wykres zależności współczynnika podatności podłoża według Winklera (C) od współczynnika sprężystości wzdłużnej górotworu ( $E_3$ ) dla tunelu bez obudowy wstępnej

### 3. Podsumowanie

Jak wynika z powyższych obliczeń, grubość folii oraz jej współczynnik sprężystości wzdłużnej nie wpływają znacząco na wartość współczynnika podatności podłoża według Winklera. Dla podanych założeń wartość tego współczynnika mieści się w przedziale od 2220,85 do 2252,71 MPa/m, a zatem różnica wynosi zaledwie 1,41%.

W rozwiązaniu obliczeń dla drugiego modelu wykazano, jak znacząco współczynnik sprężystości górotworu wpływa na wartość współczynnika Winklera (dla przyjętych danych wartość ta waha się od 710,87 do 4522,52 MPa/m).

W przypadku modelu trzeciego brak obudowy wstępnej ma swoje odbicie w otrzymanym wyniku obliczeń współczynnika według Winklera. Jeśli porówna się wartości otrzymane dla modelu drugiego i trzeciego, można zauważyć, że dla tych samych wartości współczyn-

nika sprężystości wzdłużnej górotworu ( $E_3 = 7000$  MPa) wartość współczynnika Winklera jest o ok. 21% większa w przypadku tunelu z obudową wstępną.

Poczynione w wyniku przeprowadzonych obliczeń spostrzeżenia mają charakter wstępnych wniosków. Należy je zweryfikować dla szerszego zakresu zmienności parametrów wejściowych.

#### LITERATURA

- [1] *Dawydow S.S.*: Obliczanie i projektowanie konstrukcji podziemnych. Warszawa, Wydawnictwo MON 1954
- [2] *Huber M.T.*: Stereomechanika techniczna: Wytrzymałość materiałów (wyd. II). Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1958
- [3] *Mateja J.*: Studium nad ustaleniem nośności stalowych odrzwi obudowy łukowej w wyrobiskach udostępniających nienarażonych na bezpośredni wpływ ciśnień eksploatacyjnych. Mysłowice, Prace Naukowo-Badawcze OBR BG „Budokop” 1982
- [4] *Nowacki W.*: Mechanika budowli (wyd. III). Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1974
- [5] PN-G-05020:1997: Podziemne wyrobiska korytarzowe i komorowe. Obudowa sklepienia. Zasady projektowania i obliczeń statycznych
- [6] *Terzaghi K.*: Evaluation of coefficients of subgrade reaction. Geotechnique, vol. 5, 1955, 297326
- [7] *Wintekorn H.F., Fang H.J.*: Foundation Engineering Handbook. New York, Van Nostrand Reinhold Company 1975