Leszek MAJKUT*

MINIMALIZACJA DRGAŃ OBIEKTU POPRZEZ DOBÓR OPTYMALNYCH PARAMETRÓW INERCJALNO-SPRĘŻYSTYCH UKŁADU CIĄGŁEGO**

STRESZCZENIE

Praca dotyczy poszukiwania optymalnych sprężystych i masowych parametrów belki, ze względu na minimalizację współczynnika przenoszenia drgań dla zadanej częstości wymuszenia. Belka o wyznaczonych parametrach i zadanej długości jest częścią układu wibroizolacji tzn. jest na niej posadowiony, obiekt chroniony. Jako warunki ograniczające przyjęto, że: częstość wymuszenia leży pomiędzy pierwszą, a trzecią częstością drgań własnych układu ciągłego; strzałka ugięcia pod obciążeniem statycznym nie przekracza wartości ustalonej.

Słowa kluczowe: *optymalizacja, drgania, układy ciągłe*

MINIMIZATION OF THE OBJECT VIBRATIONS THROUGH THE OPTIMAL SELECTION OF INERTIA-SPRINGY PARAMETERS OF CONTINUOUS SYSTEM

The work concerns the problem of optimum selection of inertial (the product of the beam material density and the cross section A) and springy (bending rigidity EI) parameters of the beam. The objective function is transmissibility coefficient for given excitation frequency. Restrictive conditions were accepted: exciting frequency is lying between first and third natural frequency of the continuous system, and deflection of beam in gravitational field was less than the given value.

Keywords: *optimization, vibration, continuous system*

1. WSTĘP

W pracy analizowana jest wibroizolacja przemieszczeniowa chronionego obiektu posadowionego bezpośrednio na belce o ciągłym rozkładzie masy. Minimalizowany współczynnik przenoszenia drgań rozumiany jest, w tym przypadku, jako stosunek amplitudy drgań obiektu posadowionego na belce o poszukiwanych parametrach inercjalno-sprężystych do amplitudy drgań wymuszenia kinematycznego.

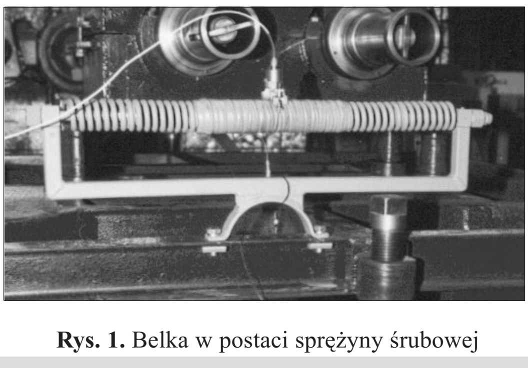
Opierając się na zasadzie wzajemności [4], wykazać można, że współczynnik przenoszenia dla wymuszenia siłowego (wibroizolacja siłowa) jest identyczny ze współczynnikiem wyznaczonym w pracy dla wibroizolacji przemieszczeniowej.

W niniejszej pracy rozważono problem optymalnego doboru parametrów inercjalnych (iloczyn gęstości materiału belki i pola przekroju poprzecznego ρA) i sprężystych (sztywność belki na zginanie EI) belki będącej częścią układu wibroizolacji. Wymienione parametry dobrane zostaną tak, aby współczynnik przenoszenia drgań (przy wymuszeniu monoharmonicznym o zadanej częstości) osiągał wartość równą zero, tzn. będą dobrane tak, by dla zadanej częstości wymuszenia, w punkcie posadowienia obiektu chronionego, układ miał wezeł drgań.

Problem optymalnego kształtowania belek jest znanym problemem w mechanice budowli, gdzie przy obciążeniach statycznych poszukuje się optymalnego kształtu przekroju belki ze względu na zadane kryterium. Wykorzystywane najczęściej kryteria optymalizacji polegają na minimalizacji energii sprężystej, minimalizacji objętości (ciężaru, kosztu) lub wyrównywaniu wytężeń [3]. Przy formułowaniu zadań kształtowania określa się w pierwszej kolejności warunki użytkowe, którym musi odpowiadać ukształtowany element [2]. Warunkami użytkowymi, nie podlegającymi kształtowaniu, są długość oraz bardzo często szerokość belki. Optymalizacji podlega w takim przypadku grubość półek i szerokość środników belek o przekroju dwuteowym lub skrzynkowym.

Jako warunki ograniczające opisanej w pracy optymalizacji przyjęto założenie, że zadana częstość wymuszenia znajduje się pomiędzy pierwszą i trzecią częstością drgań własnych, oraz że strzałka ugięcia statycznego belki z obiektem będzie mniejsza od zadanej wielkości [1]. Jedynym warunkiem użytkowym jest długość belki. Pominięcie warunku zachowania określonej szerokości półki pozwala na konstrukcję belki w postaci np. sprężyny śrubowej, co zostało wykorzystane przez autora do konstrukcji wibroizolowanej rękojeści narzędzia ręcznie prowadzonego [5] (rys. 1).

W układzie tym przy odpowiednim doborze parametrów belki w stosunku do częstości wymuszenia uzyskać można zerową amplitudę drgań rękojeści (część środkowa belki) [6].

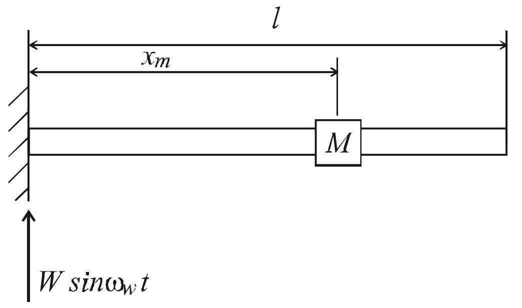


Rys. 1. Belka w postaci sprężyny śrubowej

* Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Katedra Mechaniki i Wibroakustyki; majkut@agh.edu.pl
** Praca powstała w ramach badań statutowych nr 11.11.130.137

2. UKŁAD WIBROIZOLACJI

Rozpatrzony zostanie problem minimalizacji drgań obiektu posadowionego na belce ciągłej, pokazanej na rysunku 2.



Rys. 2. Model układu wibroizolacji

Dla takiego układu należy tak dobrać inercjalno-sprężyste parametry belki, by amplituda drgań masy chronionej M była równa zero, dla danej częstości wymuszenia ω_w. Minimalizowany współczynnik przenoszenia drgań p jest równy stosunkowi amplitudy drgań obiektu $X(x_m)$ do amplitudy drgań wymuszenia kinematycznego W

$$p = \frac{X(x_n)}{W}.$$

Równanie różniczkowe opisujące drgania układu wibroizolacji ma postać

$$EI\,\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \big(\rho A + M\,\delta(x, x_m)\big)\cdot\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

gdzie:

EI – sztywność na zginanie,
ρA – masa na jednostkę długości belki,
M – masa wibroizolowanego obiektu.

Równanie (1) rozwiązano metodą Fouriera rozdzielenia zmiennych, czyli po założeniu, że

$$y(x, t) = X(x)\cdot T(t)$$

otrzymano dwa równania o zmiennych rozdzielonych (przy $f_0(x, t) \equiv 0$):

$$X^{(4)}(x) - \lambda^4 X(x) = \mu\lambda^4 X(x_m)\delta(x, x_m) \tag{2}$$

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \tag{3}$$

gdzie:

$$\lambda^4 = \omega^2\cdot\eta,\quad \eta = \frac{\rho A}{EI},\quad \mu = \frac{M}{\rho A}.$$

Rozwiązaniem równania (2) jest funkcja:

$$X(x) = P\cosh\lambda x + Q\sinh\lambda x + R\cos\lambda x + S\sin\lambda x + \\ + \frac{\mu\lambda}{2}X(x_m)\big[\sinh\lambda(x - x_m) - \sin\lambda(x - x_m)\big]\cdot H(x, x_m) \tag{4}$$

Problem drgań wymuszonych kinematycznie znacznie się uprości, gdy w równaniu drgań (1) podstawimy

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t),$$

gdzie:

$y_1(x, t)$ – rozwiązanie równania z jednorodnymi warunkami brzegowymi i niejednorodnymi warunkami początkowymi,
$y_2(x, t)$ – rozwiązanie równania z niejednorodnymi warunkami brzegowymi postaci:

$$y_2(0, t) = W\sin\omega_w t,\quad \left.\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=1} = 0,\quad \left.\frac{\partial^3 y_2(x,t)}{\partial x^3}\right|_{x=l} = 0,$$

i jednorodnymi warunkami początkowymi:

$$y_2(x, 0) = 0,\quad \frac{\partial y_2(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Ze względu na występujące zawsze tłumienie, w stanie ustalonym, można pominąć rozwiązanie $y_1(x, t)$. W analizowanym przypadku drgań wymuszonych układu liniowego odpowiedź układu w stanie ustalonym ma charakter wymuszenia, co za tym idzie, po rozdzieleniu zmiennych funkcję czasową $T(t)$ można zapisać

$$T(t) = A\cos\omega_w t + B\sin\omega_w t.$$

W przypadku analizy modelu bez tłumienia (prostsze obliczenia, kosztem niewielkiego, poza rezonansem, błędu wyznaczenia amplitudy drgań), kąt przesunięcia fazowego między wymuszeniem a odpowiedzią układu liniowego jest równy zero lub π i stąd $A \equiv 0$.

Rozwiązanie równania funkcji zmiennej przestrzennej $X(x)$ przy wymuszeniu kinematycznym ma więc w stanie ustalonym postać (4). Z tym, że teraz λ wyznaczyć należy z zależności:

$$\lambda^4 = \omega_w^2\cdot\eta,\quad \eta = \frac{\rho A}{EI}.$$

Warunki brzegowe po rozdzieleniu zmiennych mają postać:

$$X_2(0) = W,\quad X_2'(0) = 0,$$

$$X_2''(l) = 0,\quad X_2'''(l) = 0.$$

W równaniach opisujących warunki brzegowe wykorzystujemy równanie (4) wraz z jego pochodnymi i otrzymujemy niejednorodny układ równań, który przedstawić można w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh\lambda l & \sinh\lambda l & -\cos\lambda l & -\sin\lambda l & a_{3,5} \\ \sinh\lambda l & \cosh\lambda l & \sin\lambda l & -\cos\lambda l & a_{4,5} \\ \cosh\lambda x_m & \sinh\lambda x_m & \cos\lambda x_m & \sin\lambda x_m & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \\ S \\ X(x_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

gdzie:

$$a_{3,5} = \frac{\mu\lambda}{2}\left(\sinh\lambda(l-x_m)+\sin\lambda(l-x_m)\right),$$

$$a_{4,5} = \frac{\mu\lambda}{2}\left(\cosh\lambda(l-x_m)+\cos\lambda(l-x_m)\right).$$

Z równania (5) wyznaczyć można stałe P, Q, R, S, $X(x_m)$, a następnie wektor amplitud drgań wymuszonych kinematycznie funkcją $W\sin\omega_w t$.

Wprzypadku wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej belki, w przekroju $x = x_m$ wystarczy z równania (5) wyznaczyć stałą $X(x_m)$, korzystając np. ze wzorów Cramera. W przypadku $W \equiv 1$, wartość $X(x_m)$ jest równa współczynnikowi przenoszenia drgań, którego minimum poszukiwane będzie w funkcji inercjalno-sprężystych parametrów belki (dla zadanej częstości wymuszenia).

3. PROCEDURA OPTYMALNEGO DOBORU PARAMETRÓW BELKI

W rozważanym przypadku, minimalizowana funkcja celu ma postać ilorazu wyznaczników

$$p = \frac{X(x_m)}{W} = \frac{\mathbf{W_5}}{\mathbf{W_g}} \quad (6)$$

gdzie:

$\mathbf{W_g}$ – wyznacznik macierzy głównej równania (5)

$$\mathbf{W_g} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh\lambda l & \sinh\lambda l & -\cos\lambda l & -\sin\lambda l & \frac{\mu\lambda}{2}(\sinh\lambda(l-x_m)+\sin\lambda(l-x_m)) \\ \sinh\lambda l & \cosh\lambda l & \sin\lambda l & -\cos\lambda l & \frac{\mu\lambda}{2}(\cosh\lambda(l-x_m)+\cos\lambda(l-x_m)) \\ \cosh\lambda x_m & \sinh\lambda x_m & \cos\lambda x_m & \sin\lambda x_m & -1 \end{vmatrix},$$

$\mathbf{W_5}$ – wyznacznik tej samej macierzy, ale w miejsce ostatniej kolumny należy wstawić kolumnę wyrazów wolnych, czyli

$$\mathbf{W_5} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & W \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh\lambda l & \sinh\lambda l & -\cos\lambda l & -\sin\lambda l & 0 \\ \sinh\lambda l & \cosh\lambda l & \sin\lambda l & -\cos\lambda l & 0 \\ \cosh\lambda x_m & \sinh\lambda x_m & \cos\lambda x_m & \sin\lambda x_m & 0 \end{vmatrix}.$$

Zmiennymi decyzyjnymi są inercjalno-sprężyste parametry belki: $\mu = M/\rho A$ i $\eta = \rho A/EI$. Zmienne te mogą przybierać wartości, ograniczone warunkami:

$$\begin{cases} \omega_1 < \omega_w < \omega_3, \\ \max(y_{stat}(x)) < l/250 \quad [1]. \end{cases}$$

Pierwszy warunek oznacza, że częstość wymuszenia ω_w znajduje się pomiędzy pierwszą ω_1 a trzecią ω_3 częstością drgań własnych układu. Sformułowany w ten sposób warunek pozwala na znalezienie takich parametrów belki, przy których otrzymać można zerową amplitudę drgań obiektu chronionego. Warunek drugi zapewnia ograniczenie strzałki ugięcia statycznego belki i jest równoznaczny z warunkiem minimalizacji masy układu ciągłego.

Tak postawiony problem optymalizacyjny można rozwiązać, stosując metody programowania nieliniowego. Analizowane w pracy funkcja celu i warunki ograniczające są funkcjami wypukłymi, a w takim przypadku znane są efektywne metody poszukiwania minimum funkcji celu, np. warunki Kuhna–Tuckera czy metody iteracyjne (transformacja zmiennych niezależnych; zastosowanie funkcji kary; metoda kompleks) [3].

Dalej pokazana zostanie uproszczona procedura poszukiwania optymalnych parametrów belki, będącej częścią układu wibroizolacji, pokazanego na rysunku 2.

W pierwszej kolejności wyznacza się takie wartości η, dla których częstość wymuszenia ω_w jest pierwszą i trzecią częstością drgań własnych belki. Należy więc, dla zadanej częstości wymuszenia ω_w, znaleźć takie dwie wartości (pierwszą i trzecią) η_1 i η_3, dla których zeruje się wyznacznik macierzy głównej równania (5), czyli $\mathbf{W_g} = 0$.

Znając wartości graniczne parametru η, należy wyznaczyć wartość optymalną tego parametru η_{opty}, z warunku zerowania się wyznacznika $\mathbf{W_5}$ (przy czym $W \equiv 1$).

Dla η_{opty} należy wyznaczyć μ z warunku na ograniczenie wartości strzałki ugięcia.

Równanie linii ugięcia opisuje równanie różniczkowe postaci

$$y^{(4)}(x) = -\eta_{opty} \cdot g - \eta_{opty} \cdot \mu \cdot g \cdot \delta(x, x_m) \quad (7)$$

a po czterokrotnym całkowaniu funkcja

$$y(x) = -\eta_{opty} \cdot g \cdot \frac{x^4}{24} - \eta_{opty} \cdot \mu \cdot g \cdot \frac{(x-x_m)^3}{6} \cdot H(x, x_m) + \\ + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4 \quad (8)$$

gdzie:

g – przyspieszenie ziemskie,
$\delta(x, x_m)$ – funkcja delta Diraca,
$H(x, x_m)$ – funkcja Heaviside'a skoku jednostkowego w punkcie $x = x_m$.

Stałe C_1, C_2, C_3, C_4 zależą od warunków brzegowych, skojarzonych z rozważanym problemem.

Należy tak dobrać μ, by maksymalna wartość ugięcia belki była mniejsza od zadanej wielkości, np. $\max(y_{stat}(x)) < l/250$ [1]. Po wyznaczeniu parametru μ wyznaczyć można optymalną wartość masy na jednostkę długości belki $\rho A = M/\mu$ (M – masa obiektu wibroizolowanego). Spośród wszystkich μ spełniających powyższy warunek należy wybrać wartość największą, co pozwoli wyznaczyć minimalną wartość ρA, a więc minimalny ciężar belki. Sztywność giętną belki wyznaczyć można z zależności

$$EI = \rho A/\eta_{opty}.$$

4. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Przedmiotem analizy jest układ wibroizolacji pokazany na rysunku 2. Należy tak dobrać inercjalne i sprężyste parametry belki, by amplituda drgań obiektu o masie M = 5 kg posadowionego na belce o długości l = 1,2 m, w odległości x_m = 0,4 m od lewego brzegu belki, była minimalna dla wymuszenia o częstości ω_w = 150 rad/s.

Dobór parametrów przeprowadzono według algorytmu uproszczonego. W pierwszej kolejności wyznaczono takie wartości parametru $\eta = \rho A/EI$, dla których częstość wymuszenia będzie pierwszą i trzecią częstością drgań własnych. Wynoszą one odpowiednio: η_1 = 0,0003 i η_3 = 0,0816, są to graniczne wartości parametru η.

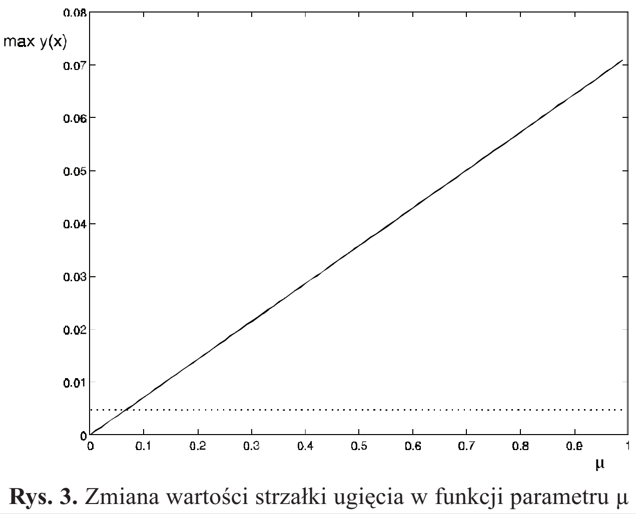
Wartość optymalną otrzymano z warunku zerowania się wyznacznika macierzy głównej równania (5) z tym, że ostatnią kolumnę zastąpiono kolumną wyrazów wolnych. W rozważanym przypadku wyznaczona optymalna wartość parametru η wynosi

$$\eta_{opty} = 0{,}0244.$$

Po obliczeniu wartości η_{opty}, wyznaczono linię ugięcia belki z równania (8), a następnie parametr μ z warunku na ograniczenie wartości strzałki ugięcia.

Zmianę wartości strzałki ugięcia belki w funkcji parametru μ pokazano na rysunku 3.

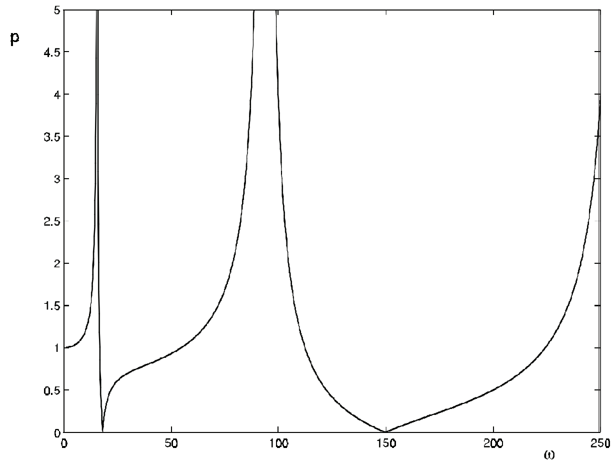
Na rysunku 3 linią kropkowaną oznaczono dopuszczalną strzałkę ugięcia. Spełnienie warunku ograniczającego dają wszystkie wartości μ z zakresu od 0 do 0,07.



Rys. 3. Zmiana wartości strzałki ugięcia w funkcji parametru μ

Wybranie największej z tych wartości pozwala na konstrukcję belki o najmniejszym ciężarze własnym.

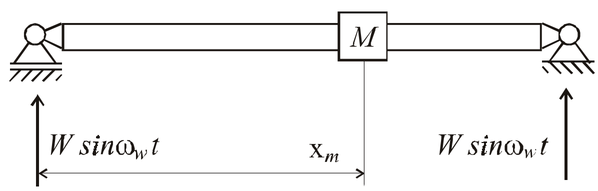
Tak dobrane parametry η i μ pozwalają na wyznaczenie poszukiwanych parametrów belki, które w rozpatrywanym przypadku wynoszą: EI = 2927,4 N·m^2, ρA = 71,43 kg/m. Dla takich parametrów belki wyznaczono charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową, którą pokazano na rysunku 4.



Rys. 4. Współczynnik przenoszenia drgań układu wibroizolacji pokazanego na rysunku 2

Pokazany na rysunku 4 współczynnik przenoszenia drgań osiąga, zgodnie z założeniami zadania optymalizacji, wartość zerową dla częstości ω = 150 rad/s.

Innym przykładem zastosowania opisanej metody optymalizacji jest analiza drgań układu wibroizolacji pokazanego na rysunku 5.



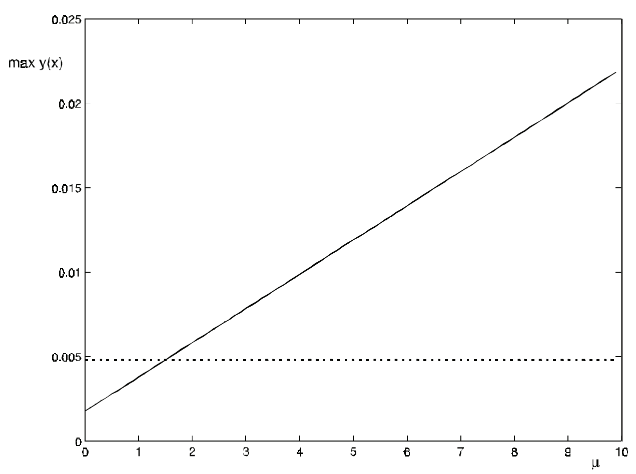
Rys. 5. Model układu wibroizolacji

Należy tak dobrać inercjalne i sprężyste parametry belki, by amplituda drgań obiektu o masie M = 10 kg posadowionego na belce o długości l = 1,2 m, w odległości x_m = 0,4 m od lewego brzegu belki, była minimalna dla wymuszenia o częstości ω_w = 150 rad/s.

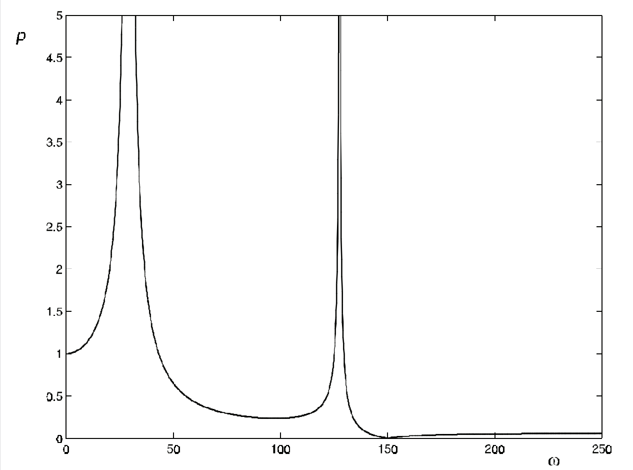
Dobór parametrów przeprowadzono według algorytmu uproszczonego. Wartości graniczne parametru wynoszą odpowiednio: η_1 = 0,00210 i η_3 = 0,1669, natomiast wartość optymalna

$$\eta_{opty} = 0{,}0334.$$

Dla tak wyznaczonej wartości η_{opty}, parametr μ wyznaczono z warunku na ograniczenie wartości strzałki ugięcia.



Rys. 6. Zmiana wartości strzałki ugięcia w funkcji parametru μ



Rys. 7. Współczynnik przenoszenia drgań układu wibroizolacji pokazanego na rysunku 5

Zmianę wartości strzałki ugięcia belki w funkcji parametru μ pokazano na rysunku 6.

Na rysunku 6 linią kropkowaną oznaczono dopuszczalną strzałkę ugięcia. Spełnienie warunku ograniczającego dają wszystkie wartości μ z zakresu od 0 do 1,5.

Wybranie największej z tych wartości pozwala na konstrukcję belki o najmniejszym ciężarze własnym.

Tak dobrane parametry η i μ pozwalają na wyznaczenie poszukiwanych parametrów belki, które w rozpatrywanym przypadku wynoszą: $EI = 199{,}60\ \mathrm{N{\cdot}m^2}$, $\rho A = 6{,}667$ kg/m. Dla takich parametrów belki wyznaczono charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową, którą pokazano na rysunku 7.

Pokazany na rysunku 7 współczynnik przenoszenia drgań osiąga, zgodnie z założeniami zadania optymalizacji, wartość zerową dla częstości ω = 150 rad/s.

5. PODSUMOWANIE

W pracy opisano problem optymalnego doboru parametrów inercjalnych (iloczyn gęstości materiału belki i pola przekroju poprzecznego ρA) i sprężystych (sztywność na zginanie EI) belki, wchodzącej w skład układu wibroizolacji. Minimalizowaną funkcją celu był współczynnik przenoszenia drgań dla zadanej częstości wymuszenia.

Przedstawiono dwa algorytmy optymalizacji. Pierwszy z nich oparty jest na poszukiwaniu minimum funkcji dwu zmiennych z ograniczeniami w postaci nierówności. Taki problem optymalizacji rozwiązać można, stosując metody programowania nieliniowego. Funkcja celu i warunki ograniczające są funkcjami wypukłymi, znane są więc metody poszukiwania minimum funkcji celu: metody bezpośrednie, np. warunki Kuhna–Tuckera, czy metody iteracyjne, np. transformacja zmiennych niezależnych, zastosowanie funkcji kary, czy metoda kompleks. Drugi, uproszczony algorytm polega na niezależnym poszukiwaniu minimów dwu funkcji, każda jednej zmiennej.

Zastosowanie opisanego w pracy algorytmu prowadzi do znacznie uproszczonych obliczeń oraz ułatwia interpretację wyników obliczeń pośrednich.

Literatura

[1] Bielajew N.M.: *Wytrzymałość materiałów*. Warszawa, Wydawnictwo MON 1954

[2] Brandt A.M.: *Podstawy optymalizacji elementów konstrukcji budowlanych.* Warszawa, PWN 1978

[3] Brandt A.M.: *Criteria and Methods of Structural Optimization.* The Hague/Boston/Lancaster, MARTINUS NIJHOFF PUBLISHERS 1984, ISBN 83-01-04625-2

[4] Engel Z.: *Zasada wzajemności.* Kraków, UWND AGH 2000, ISBN 83-88408-56-9

[5] Majkut L., Michalczyk J.: *"Nodalised beam" method for vibroisulation of manually operated tools.* Archiwum Budowy Maszyn, vol. XLIX, nr 3, 2002, pp. 215–229

[6] Majkut L., Michalczyk J.: *Wibroizolator.* Zgłoszenie patentowe nr P-353814 z dnia 10.05.2002