

IDENTYFIKACJA PĘKNIĘCIA BELEK NA PODSTAWIE POMIARÓW AMPLITUD DRGAŃ WYMUSZONYCH

STRESZCZENIE

Praca dotyczy problemu identyfikacji parametrów (lokalizacji i głębokości) poprzecznego pęknięcia, w układach, których modelem jest belka prostoliniowa. Jako wielkości wejściowe procesu identyfikacji wybrano amplitudy drgań wymuszonych monoharmonicznie. Dla tej wielkości skonstruowany został model odwrotny belki z pęknięciem, pozwalający na wyznaczenie parametrów pęknięcia belki o dowolnych (znanych) warunkach brzegowych. Podany został również algorytm identyfikacji pęknięcia na podstawie modelu odwrotnego.

Słowa kluczowe: drgania, pęknięcie, identyfikacja, modele odwrotne

IDENTIFICATION OF CRACK IN BEAMS USING FORCED VIBRATION AMPLITUDES

This paper deals with detection of the location and size of a transverse crack in beam like structure. An input quantity for identification a forced vibration amplitudes was chosen. For this quantity the inverse beam model was created. Identification algorithm based on this model was proposed.

Keywords: vibration, crack, identification, inverse models

1. WSTĘP

Elementy i układy konstrukcyjne poddawane są bardzo często obciążeniom zmiennym w czasie. Zmienne obciążenie siłowe czy kinematyczne wywołuje zmienne w czasie naprężenia, które powodują powstawanie w materiale złożonych zjawisk i zmian zmęczenia zależnych od wielkości tych naprężeń i liczby ich cykli. Zmiany zmęczeniowe uwidaczniają się pęknięciem materiału konstrukcyjnego i przy dalszej eksploatacji prowadzą do zniszczenia elementu czy konstrukcji.

Istotne więc, ze względu na bezpieczeństwo konstrukcji, jest pytanie o głębokość pęknięcia. Wielkość ta pozwala na ocenę przydatności konstrukcji do dalszej pracy. Spośród istniejących obecnie kryteriów oceny wyróżnia się, ze względu na obszar, którego dotyczą, kryteria lokalne i globalne, a ze względu na podstawę kryterium – kryteria siłowe, energetyczne i deformacyjne [13].

Istotą kryterium siłowego, które jest również kryterium lokalnym, jest porównanie występującego w diagnozowanym elemencie współczynnika intensywności naprężeń [9, 11] ($WIN - K_I$) z krytyczną wielkością współczynnika – K_{IC} , który jest cechą charakterystyczną materiału.

Jednym z kryteriów energetycznych jest kryterium zaproponowane przez Griffitha, polegające na porównaniu współczynnika uwalniania energii ($WUE - G$) [9, 11] z wielkością krytyczną, charakterystyczną dla danego materiału.

Wymienione wyżej kryteria zostały przytoczone ze względu na fakt, że do ich zastosowania konieczna jest znajomość wielkości (głębokości) pęknięcia.

Spośród wielu narzędzi w diagnostyce zmęczeniowej stanu obiektu w przeglądowej pracy [12] wymienione są metody wibroakustyczne, które „polegają na analizie widm akustycznych i drganiowych”. Niniejsza praca jest jedną

z „metod wibroakustycznych”, polegającą na identyfikacji miejsca i głębokości pęknięcia z wykorzystaniem zmierzonych amplitud drgań wymuszonych monoharmonicznie.

Wpływ pęknięcia na charakterystyki dynamiczne elementów konstrukcyjnych jest przedmiotem prac wielu autorów, przeglądowe prace [3, 6, 12] zawierają razem ponad 500 pozycji literatury dotyczących tego zagadnienia.

Większość cytowanych tam prac dotyczy wyznaczenia charakterystyk wpływu pęknięcia na częstotliwości drgań własnych, zmiany postaci drgań własnych czy amplitudę drgań wymuszonych belek. Związane z tym metody identyfikacji polegają na odczytywaniu z tych charakterystyk tzw. nomogramów głębokości i miejsca pęknięcia. Nomogramy te, np. charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe, wyznaczone zostały dla różnych, określonych warunków brzegowych. Za ich pomocą można określić parametry pęknięcia na podstawie zmierzonych amplitud drgań wymuszonych, jeżeli warunki brzegowe analizowanej belki odpowiadają belce, dla której wyznaczony został nomogram.

Proponowana w pracy procedura identyfikacyjna oparta jest na modelu odwrotnym dla belki o dowolnych, znanych warunkach brzegowych. Definicję modelu odwrotnego podaje Engel w pracy [4]: „Modelowanie inwersyjne polega na zastosowaniu aktualnych wyników kilku pomiarów dostrzegalnych parametrów w celu wnioskowania o rzeczywistych wartościach parametrów modelu”.

W niniejszej pracy model odwrotny rozumiany jest jako wyznaczenie miejsca i głębokości pęknięcia na podstawie pomiarów amplitud drgań wymuszonych. Opisana metoda konstrukcji modelu odwrotnego i wykorzystania go do identyfikacji parametrów pęknięcia, tzn. lokalizacji i głębokości, podana została w sposób ułatwiający algorytmizację – w pracy podany został algorytm obliczeń służących identyfikacji pęknięcia.

* Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Katedra Mechaniki i Wibroakustyki, majkut@agh.edu.pl

Jako wielkości identyfikacyjne wykorzystuje się częstości drgań własnych (procedura opisana została przez autora w pracy [9]) oraz amplitudę drgań wymuszonych, mierzona w dowolnym punkcie belki wzbudzonej do drgań siłą skupioną o znanej amplitudzie i znanej częstości.

W przypadku belek, ze względów technologicznych obciążonych dynamicznie siłą, którą można traktować jako skupioną, o jednej częstości wymuszenia (np. w przypadku maszyn wibracyjnych drgania wywołane nie wyważoną masą wirującą), pomiary identyfikacyjne można wykonać jako tzw. eksperyment bierny. Pod tym pojęciem rozumiane są pomiary w normalnym stanie pracy, bez konieczności przeprowadzania dodatkowych eksperymentów na obiekcie.

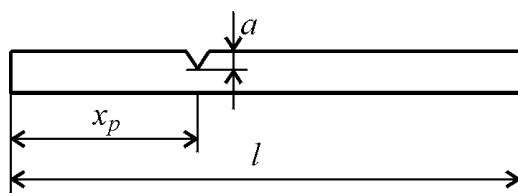
Pomiary drgań wymuszonych służyć mogą również do monitorowania pęknięcia, tj. obserwacji ewentualnego wzrostu jego głębokości.

Obok identyfikacji z wykorzystaniem modelu analitycznego wielu autorów dokonuje również identyfikacji parametrów pęknięcia w oparciu o model MES [7, 16].

Rozwój metod komputerowych przyczynił się do powstania nowych, lub zastosowania znanych wcześniej, metod identyfikacji, np. opartych na algorytmach genetycznych [5], transformacie falkowej [14, 15], sieciach neuro-matycznych [8] czy metodach probabilistycznych [1].

2. OPIS PROBLEMU

Podobnie jak w pracy autora [9] dotyczącej identyfikacji pęknięcia na podstawie pomiaru częstości drgań własnych, rozpatrywany problem opisany został modelem belki Bernoulliego – Eulera ze stałe otwartą szczeliną, co schematycznie pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat rozpatrywanej belki z pęknięciem

Przedmiotem pracy jest poszukiwanie głębokości pęknięcia a i jego położenia x_p . Pęknięcie zostało zamodelowane jako sprężyna, której podatność θ wiąże ze sobą moment gnący w przekroju o współrzędnej $x = x_p$ oraz kąty obrotu z prawej i lewej strony przekroju, w którym występuje pęknięcie, czyli

$$y'(x_p^+, t) - y'(x_p^-, t) = \theta \cdot EI \cdot y''(x_p, t) \quad (1)$$

Równanie wiążące ze sobą podatność sprężyny i głębokość pęknięcia ma postać [9]

$$\theta = 6 \cdot \pi \cdot h \cdot \frac{1 - \nu^2}{EI} \cdot \gamma^2 \cdot f(\gamma) \quad (2)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \gamma &= a/h, \\ h &\text{ – wysokość belki,} \\ \nu &\text{ – współczynnik Poissona,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= 0,6294 - 1,047 \cdot \gamma + 4,6021 \cdot \gamma^2 - 9,9751 \cdot \gamma^3 + \\ &+ 20,2948 \cdot \gamma^4 - 32,9933 \cdot \gamma^5 + 47,0408 \cdot \gamma^6 - \\ &- 40,6933 \cdot \gamma^7 + 19,6 \cdot \gamma^8. \end{aligned}$$

Poszukiwane parametry pęknięcia wyznaczone zostaną w oparciu o model odwrotny dla belki o dowolnych, znanych warunkach brzegowych. Przez model odwrotny rozumie się wyznaczenie miejsca i głębokości pęknięcia na podstawie pomiarów amplitud drgań wymuszonych siłą o znanej amplitudzie i częstości.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Równanie amplitud drgań wymuszonych belki z uwzględnieniem siły wymuszającej przyłożonej w punkcie o współrzędnej $x = x_f$ amplitudzie F i częstości ω_w ma postać

$$X^{(4)} - \lambda^4 X = \theta \cdot X''(x_p) \cdot \delta''(x, x_p) - F/EI \cdot \delta(x, x_f) \quad (3)$$

Rozwiązania równania (3) poszukuje się w klasie funkcji uogólnionych, dzięki czemu otrzymuje się rozwiązanie w postaci skończonej w przeciwieństwie do metody klasycznej, gdzie rozwiązanie otrzymuje się w postaci nieskończonej sumy funkcji własnych.

Rozwiązaniem równania (3) jest funkcja

$$\begin{aligned} X(x) &= X_0(x) + \frac{\theta}{2\lambda} X''(x_p) \cdot [\text{sh} \lambda(x - x_p) + \\ &+ \sin \lambda(x - x_p)] H(x, x_p) - \frac{F}{2 \cdot EI \cdot \lambda^3} \times \\ &\times [\text{sh} \lambda(x - x_f) + \sin \lambda(x - x_f)] H(x, x_f) \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \delta(x, x_p) &\text{ – funkcja delta Diraca w punkcie } x = x_p, \\ H(x, x_p) &\text{ – funkcja Heaviside'a (skoku jednostkowego) w punkcie } x = x_p, \\ \lambda &= \omega_w^2 \rho A/EI, \\ \rho &\text{ – gęstość materiału belki,} \\ A &\text{ – pole przekroju poprzecznego,} \\ X_0 &= P \text{ch} \lambda x + Q \text{sh} \lambda x + R \cos \lambda x + S \sin \lambda x, \\ P, Q, R, S &\text{ – stałe całkowania.} \end{aligned}$$

Można rozwiązać problem odwrotny i wyznaczyć miejsce x_p oraz głębokość a pęknięcia, posługując się wcześniej opisanym modelem belki z pęknięciem i wykorzystując zmierzone amplitudy drgań wymuszonych dla rzeczywistego obiektu.

Amplituda drgań wymuszonych w punkcie pomiarowym o współrzędnej $x = c$ jest równa:

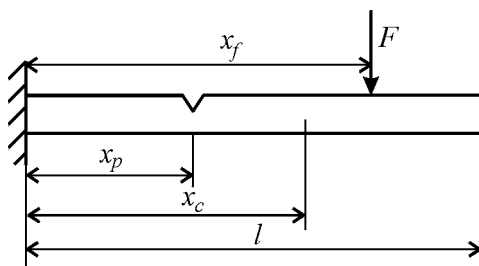
$$X(c) = X_0(c) + \frac{\theta}{2 \cdot \lambda} \cdot [\text{sh } \lambda(c - x_p) + \sin \lambda(c - x_p)] H(c, x_p) - \frac{F}{2 \cdot EI \cdot \lambda^3} \times [\text{sh } \lambda(c - x_f) - \sin \lambda(c - x_f)] H(c, x_f) \quad (5)$$

gdzie $X_0(c) = P \text{ch } \lambda c + Q \text{sh } \lambda c + R \cos \lambda c + S \sin \lambda c$.

Stałe całkowania P, Q, R, S należy dobrać tak, by funkcje (4) i (5) spełniały warunki brzegowe.

Ze względu na niejednoznaczność modelu odwrotnego, podobnie jak w przypadku identyfikacji opartej na pomiarze częstości drgań własnych [9], do identyfikacji konieczny jest pomiar amplitudy drgań w dwóch punktach ($x = c_1$ i $x = c_2$) lub w jednym punkcie, ale przy różnych częstościach wymuszeniach. Dla każdego pomiaru identyfikacyjnego otrzymuje się funkcję jednej zmiennej x_p , tak więc do identyfikacji potrzebne są przynajmniej dwa pomiary. Punkt przecięcia krzywych θ w funkcji x_p dla dwóch różnych pomiarów identyfikacyjnych wyznacza poszukiwane parametry pęknięcia, przy czym głębokość a liczona jest z zależności (2).

Sposób postępowania przy identyfikacji pęknięcia, dla którego wielkością wejściową jest amplituda drgań wymuszonych, opisano dla układu pokazanego na rysunku 2.



Rys. 2. Model belki wspornikowej z pęknięciem

Warunki brzegowe dla belki pokazanej na rysunku 2 opisują równania: $X(0) = 0, X'(0) = 0, X''(l) = 0$ oraz $X'''(l) = 0$. Równania te zostaną zapisane w postaci macierzowej

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{W} \quad (6)$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{ch } \lambda l & \text{sh } \lambda l & -\cos \lambda l & -\sin \lambda l & a_{35} \\ \text{sh } \lambda l & \text{ch } \lambda l & \sin \lambda l & -\cos \lambda l & a_{45} \\ \text{ch } \lambda x_p & \text{sh } \lambda x_p & \cos \lambda x_p & \sin \lambda x_p & -1 \end{bmatrix},$$

$$a_{35} = \frac{\theta}{2\lambda} \cdot [\text{sh } \lambda(l - x_p) - \sin \lambda(l - x_p)],$$

$$a_{45} = \frac{\theta}{2\lambda} \cdot [\text{ch } \lambda(l - x_p) - \cos \lambda(l - x_p)],$$

\mathbf{C} – wektor stałych

$$\mathbf{C}^T = [P \quad Q \quad R \quad S \quad X''(x_p)]^T,$$

\mathbf{W} – wektor wymuszeń

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{2 \cdot EI \cdot \lambda^3} \cdot [\text{sh } \lambda(l - x_f) - \sin \lambda(l - x_f)] \\ \frac{F}{2 \cdot EI \cdot \lambda^3} \cdot [\text{ch } \lambda(l - x_f) - \cos \lambda(l - x_f)] \\ \frac{F}{2EI\lambda^3} [\text{sh } \lambda(x_p - x_f) + \sin \lambda(x_p - x_f)] H(x_p, x_f) \end{bmatrix}.$$

W przypadku gdy częstość wymuszenia nie jest żadną z częstości drgań własnych układu, rząd macierzy głównej jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej, z czego wynika, że układ (6) można rozwiązać, korzystając ze wzorów Cramera.

Do rozwiązania tego problemu zaproponowana zostanie metodologia, która pozwala na stworzenie poniższego algorytmu komputerowego [10].

1. W wyznaczniku macierzy głównej \mathbf{M} zostanie dokonana modyfikacja polegająca na tym, by w miejsce wielkości θ wprowadzić wielkość 1 (jeden) – powstała macierz oznaczona jest jako \mathbf{A} .
2. Należy skonstruować inną macierz oznaczoną \mathbf{B} , która powstaje z macierzy \mathbf{A} przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny.
3. Przy takich oznaczeniach poszukiwany wyznacznik główny jest równy

$$W_g = \theta \cdot (\det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})) - \det(\mathbf{B}) \quad (7)$$

4. Należy, zgodnie z metodą Cramera, skonstruować pięć macierzy, w których kolejne kolumny macierzy \mathbf{A} zostaną zastąpione kolumną wyrazów wolnych \mathbf{W} . Tak wyznaczone macierze oznaczono \mathbf{C}_i , gdzie $i = 1, 2, 3, 4, 5$ oznacza numer zastąpionej kolumny (\mathbf{C}_1 – ma postać macierzy \mathbf{A} w której pierwszą kolumnę zastąpiono wektorem wymuszeń \mathbf{W}).
5. Podobnie jak w punkcie 2, należy skonstruować z macierzy \mathbf{C}_i macierze \mathbf{D}_i , które powstają z odpowiadających sobie macierzy \mathbf{C}_i przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny.
6. Odpowiednie wyznaczniki konieczne do wyznaczenia stałych z wektora \mathbf{C} wynoszą w takim przypadku:

$$W_P = \theta (\det \mathbf{C}_1 + \det \mathbf{D}_1) - \det \mathbf{D}_1;$$

$$W_Q = \theta (\det \mathbf{C}_2 + \det \mathbf{D}_2) - \det \mathbf{D}_2;$$

$$W_R = \theta (\det C_3 + \det D_3) - \det D_3;$$

$$W_S = \theta (\det C_4 + \det D_4) - \det D_4;$$

$$W_{X''} = \det C_5.$$

Dla uproszczenia oznaczono:

$$L_1 = \det A + L_2; \quad L_2 = \det B;$$

$$L_3 = \det C_1 + L_4; \quad L_4 = \det D_1;$$

$$L_5 = \det C_2 + L_4; \quad L_4 = \det D_2;$$

$$L_7 = \det C_3 + L_4; \quad L_4 = \det D_3;$$

$$L_9 = \det C_4 + L_{10}; \quad L_{10} = \det D_4;$$

$$L_{11} = \det C_5.$$

7. Stałe całkowania wyznaczyć można z zależności:

$$P = \frac{W_P}{W_g} = \frac{\theta \cdot L_3 - L_4}{\theta \cdot L_1 - L_2}; \quad Q = \frac{W_Q}{W_g} = \frac{\theta \cdot L_5 - L_6}{\theta \cdot L_1 - L_2};$$

$$R = \frac{W_R}{W_g} = \frac{\theta \cdot L_7 - L_8}{\theta \cdot L_1 - L_2}; \quad S = \frac{W_S}{W_g} = \frac{\theta \cdot L_9 - L_{10}}{\theta \cdot L_1 - L_2};$$

$$X''(x_p) = \frac{W_{X''}}{W_g} = \frac{L_{11}}{\theta \cdot L_1 - L_2}.$$

Po wyznaczeniu stałych całkowania należy skonstruować identyfikacyjny model odwrotny, tzn. model, z którego można wyznaczyć poszukiwaną podatność θ , korzystając z wyznaczonej (zmierzonej) amplitudy drgań w punkcie pomiarowym $x = c$.

8. Dla każdego $x_p \in (0, l)$ podatność θ wyznaczyć można z zależności

$$\theta = \frac{L_P - L_2 \cdot Z}{L_N - L_1 \cdot Z + L_H} \quad (8)$$

gdzie:

$$L_P = L_4 \operatorname{ch} \lambda c + L_6 \operatorname{sh} \lambda c + L_8 \sin \lambda c + L_4 \cos \lambda c,$$

$$L_N = L_3 \operatorname{ch} \lambda c + L_5 \operatorname{sh} \lambda c + L_7 \sin \lambda c + L_9 \cos \lambda c$$

$$L_H = \frac{L_{11}}{2\lambda} \cdot [\operatorname{sh} \lambda(c - x_p) + \sin \lambda(c - x_p)] \cdot H(c, x_p)$$

$POM(c)$ – jest zmierzoną wielkością amplitudy drgań w punkcie o współrzędnej $x = c$.

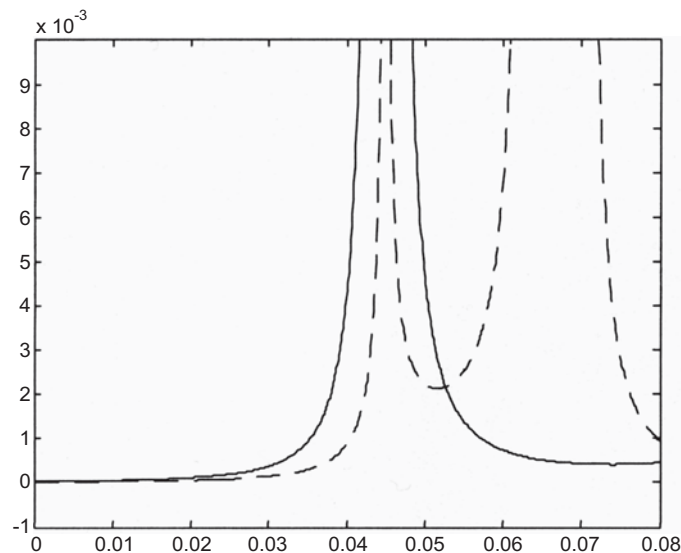
Podobnie jak przy identyfikacji na podstawie pomiaru częstości drgań własnych [9], każdy pomiar identyfikacyjny (w jednym punkcie) pozwala na wykreślenie krzywej podatności θ w funkcji położenia pęknięcia x_p , dla których amplituda drgań w punkcie o współrzędnej $x = c$ będzie wynosić $POM(c)$ czyli: $X(c) = POM(c)$.

Dlatego też punkt 8 algorytmu należy powtórzyć dla każdego z pomiarów. Na przecięciu krzywych wyznaczonych dla dwu pomiarów identyfikacyjnych (różne punkty pomiarowe lub różne wymuszenia) leżą poszukiwane parametry pęknięcia.

Dla belki o danych: długość $l = 0,1$ m, wysokość $h = 0,0016$ m, szerokość $b = h$, pokazanej na rysunku 2, wyznaczono przy użyciu MES wielkości amplitud drgań wymuszonych siłą o amplitudzie $F = 100$ N i częstości $\omega_w = 300$ rad/s, przyłożonej na końcu belki $x_f = l$. Do identyfikacji pęknięcia wybrano amplitudę drgań belki w dwóch punktach $x = l, x = 0,085$ m. Wyniki identyfikacji dla ośmiu wariantów parametrów pęknięcia zebrano w tabeli 1.

Tabela 1
Wyniki identyfikacji

Wariant	Parametry modelowane w analizie MES	Parametry identyfikowane	Błąd względny
„1”	$x_p = 10$	$x_p = 9,37$	6,3%
	$a = 0,2h$	$a = 0,177h$	11,5%
„2”	$x_p = 10$	$x_p = 9,68$	3,2%
	$a = 0,3h$	$a = 0,278h$	7,3%
„3”	$x_p = 30$	$x_p = 28,4$	5,3%
	$a = 0,2h$	$a = 0,173h$	13,5%
„4”	$x_p = 30$	$x_p = 28,3$	5,7%
	$a = 0,3h$	$a = 0,273h$	9,0%
„5”	$x_p = 50$	$x_p = 50,1$	0,2%
	$a = 0,2h$	$a = 0,202h$	1,0%
„6”	$x_p = 50$	$x_p = 52,7$	5,4%
	$a = 0,3h$	$a = 0,341h$	13,7%
„7”	$x_p = 70$	$x_p = 75,6$	8,0%
	$a = 0,2h$	$a = 0,172h$	14,0%
„8”	$x_p = 70$	$x_p = 78,8$	12,6%
	$a = 0,3h$	$a = 0,337h$	12,3%



Rys. 3. Przykładowe przebiegi krzywej $\theta(x_p)$ wyznaczone dla wariantu 6

Na rysunku 3 pokazano przykładowe przebiegi krzywej podatności θ w funkcji x_p wyznaczone dla wariantu 6. Linia ciągłą oznaczono krzywą uzyskaną dla amplitudy mierzonej w punkcie o współrzędnej $x = l$, linią przerywaną dla $x = 0,085$ m.

Każde dwie wielkości zmierzonych amplitud drgań mogą posłużyć do wyznaczenia krzywych podatności w funkcji położenia pęknięcia, na przecięciu których leżą poszukiwane parametry (x_p i θ) pęknięcia.

Po wyznaczeniu parametrów uszkodzenia dla różnych wielkości amplitud można poddać je obróbce statystycznej (np. uśrednianiu), dzięki czemu można zminimalizować wpływ niepewności pomiarów: amplitudy drgań oraz położenia punktu pomiarowego.

4. PODSUMOWANIE

W układach konstrukcyjnych, których modelem fizycznym jest belka prostoliniowa, identyfikację parametrów pęknięcia przeprowadzić można wykorzystując, jako wielkości konieczne do identyfikacji, amplitudy drgań wymuszonych. Każdy pomiar amplitudy drgań pozwala na wyznaczenie krzywej podatności sprężyny modelującej pęknięcie w funkcji jego położenia. Przedstawione w pracy wyniki „pomiarów” pochodzą z analizy Metodą Elementów Skończonych.

Dla każdej pary parametrów (θ , x_p) leżących na krzywej spełniony jest warunek identyfikacji, czyli amplituda drgań w wybranym punkcie jest równa wielkości zmierzonej.

W punkcie wspólnym dla dwóch dowolnych krzywych leżą poszukiwane parametry pęknięcia, stąd wynika, że np. dla pięciu dowolnych pomiarów identyfikacyjnych otrzymuje się dziesięć par krzywych, z których po obróbce statystycznej można wyznaczyć poszukiwane parametry pęknięcia.

W każdym przypadku identyfikacji dokładność wyznaczenia parametrów pęknięcia zależy od dokładności (niepewności) pomiaru amplitudy drgań i współrzędnej punktu

pomiarowego. Otrzymać można wtedy jedynie pewne obszary, w których zawierają się poszukiwane parametry pęknięcia.

W przypadku identyfikacji z amplitud drgań wymuszonych, na jej wynik ma wpływ zarówno niepewność wyznaczenia amplitudy drgań, jak i współrzędnej, w której jest ona mierzona.

W przypadku belek obciążonych, ze względów technologicznych, dynamicznie siłą, którą można traktować jako skupioną o jednej częstotliwości drgań (np. maszyny wibracyjne), pomiary identyfikacyjne można wykonać jako tzw. eksperyment bierny.

Pomiary drgań wymuszonych mogą również służyć do monitorowania pęknięcia, czyli obserwacji ewentualnego wzrostu jego głębokości.

Literatura

- [1] Cacciola P., Impollonia N., Muscolina G.: *Crack detection and location in a damaged beam vibrating under white noise*. Computers and Structures, 81 (2003), s. 1773–1782
- [2] Chaudhari T.D., Maiti S.K.: *A study of vibration of geometrically segmented beams with and without crack*. International Journal of Solids and Structures, 37 (2000), s. 761–779
- [3] Dimarogonas A.D.: *Vibration of cracked structures: a state of the art review*. Engineering Fracture Mechanics, 55 (1996), s. 831–857
- [4] Engel Z., Engel J.: *Metody inwersji i ich zastosowanie w mechanice*. XXXII Ogólnopolskie Sympozjum Diagnostyka Maszyn, Węgierska Górka 28.02–05.03 2005
- [5] Krawczuk M.: *Application of spectral beam finite element with a crack and iterative search technique for damage detection*. Finite Elements in Analysis and Design, 38 (2002), s. 537–548
- [6] Krawczuk M., Ostachowicz W.: *Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 34 (1996), s. 307–326
- [7] Krawczuk M., Żak A., Ostachowicz W.: *Elastic beam finite element with a transverse elasto-plastic crack*. Finite Elements in Analysis and Design, 34 (2000), s. 61–73
- [8] Liu S.W., Huang J.H., Sung J.C., Lee C.C.: *Detection of crack using neural networks and computational mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191 (2002), s. 2831–2845

- [9] Majkut L.: *Identyfikacja pęknięcia w belkach na podstawie pomiaru częstości drgań własnych*. Kwartalnik AGH Mechanika, 24, z. 1 (2005)
- [10] Majkut L., Marczuk R.: *Kształtowanie charakterystyk dynamicznych belek. Drgania wymuszone*. Kwartalnik AGH Mechanika, 23, z. 4 (2004)
- [11] Neimitz A.: *Mechanika pękania*. Warszawa, PWN 1998, ISBN 83-01-12640-X
- [12] Szala J.: *Przegląd możliwości diagnozowania obiektów technicznych ze względu na zmęczeniowe pękanie*. Przegląd Mechaniczny, LXII, z. 4 (2003), ISBN 83-7085-564-4
- [13] Szata M.: *Opis rozwoju zmęczeniowego pęknięcia w ujęciu energetycznym*. Wrocław, Oficyna wydawnicza Politechniki Wrocławskiej 2002
- [14] Quek S-T., Wang Q., Zhang L., Ang K-K.: *Sensitivity analysis of crack detection in beams by wavelet technique*. International Journal of Mechanical Sciences, 43 (2001), s. 2899–2910
- [15] Tian J., Li Z., Su X.: *Crack detection in beams by wavelet analysis of transient flexural waves*. Journal of Sound and Vibration, 261 (2003), s. 715–727
- [16] Viola E., Federici L., Nobile L.: *Detection of crack location using cracked beam element method for structural analysis*. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 36 (2001), s. 23–35