

IDENTYFIKACJA PĘKNIĘCIA W BELKACH NA PODSTAWIE POMIARU CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH

STRESZCZENIE

Praca dotyczy problemu identyfikacji parametrów (lokalizacji i głębokości) pęknięcia. Jako wielkości wejściowe procesu identyfikacji wybrano częstości drgań własnych. Dla tej wielkości skonstruowany został model odwrotny belki z pęknięciem, pozwalający na wyznaczenie parametrów pęknięcia belki o dowolnych warunkach brzegowych. Podany został również algorytm komputerowy identyfikacji pęknięcia na podstawie modelu odwrotnego.

Słowa kluczowe: drgania, pęknięcie, identyfikacja, modele odwrotne

IDENTIFICATION OF CRACK IN BEAMS WITH EIGENVALUE

This paper deals with detection of the location and size of a crack. An input quantity for identification a natural frequencies was chosen. For this quantity the inverse beam model was created. Computer algorithm for making identification based on this model was proposed.

Keywords: vibration, crack, identification, inverse models

1. WSTĘP

Techniczne układy konstrukcyjne poddane działaniom dynamicznym mogą ulegać różnorodnym uszkodzeniom. Typowymi uszkodzeniami są pęknięcia poszczególnych elementów konstrukcji. Bardzo ważne jest więc działanie zapobiegające trwałym uszkodzeniom, co wiąże się bezpośrednio z oceną stanu technicznego konstrukcji w okresie eksploatacji, np. w przypadkach dużych, złożonych układów strukturalnych (mostów, wież wiertniczych itp.) czy obudowanych wałów maszyn wirujących. Typowe metody nieinwazyjne oceny stanu konstrukcji związane z np. z wykorzystaniem fal powierzchniowych, efektu Barkhausena itp., opisane w [15], są mało użyteczne. Stało się to powodem poszukiwań wpływu pęknięcia na parametry charakterystyk dynamicznych obiektów. Przeglądowe prace [3] i [5] zawierają razem ponad 450 pozycji literatury dotyczących tego zagadnienia.

Większość cytowanych tam prac dotyczy wpływu pęknięcia o znanych parametrach na częstości drgań własnych, zmiany postaci drgań własnych czy amplitudę drgań wymuszonych belek. Związane z tym metody identyfikacji polegają na odczytywaniu z tych charakterystyk tzw. nomogramów głębokości i miejsca pęknięcia. Nomogramy te wyznaczone zostały dla różnych (określonych) warunków brzegowych i można, wykorzystując je, określić parametry pęknięcia na podstawie zmierzonych częstości drgań własnych, jeżeli warunki brzegowe analizowanej belki odpowiadają tej, dla której został wyznaczony nomogram.

Niniejsza praca dotyczy identyfikacji parametrów pęknięcia, tzn. lokalizacji i głębokości, na podstawie pomiarów częstości drgań własnych. Wybór tej wielkości wiąże się z łatwym jej pomiarem.

W celu wyznaczenia parametrów pęknięcia skonstruowany został model odwrotny dla belki o dowolnych, zna-

nych warunkach brzegowych. Podobne zagadnienie opisane zostało w pracy [11], w której przeprowadzono identyfikację jedynie miejsca pęknięcia w belce swobodnie podpartej.

Z modelu odwrotnego korzystają również autorzy pracy [10]. Opisany tam sposób identyfikacji polega, podobnie jak w niniejszej pracy, na wyznaczeniu poszukiwanych parametrów z warunku zerowania się wyznacznika macierzy głównej opisującej warunki brzegowe (mogą być dowolne) skojarzone z rozważanym problemem początkowo-brzegowym. W przypadkach obu prac autorzy korzystają z pewnych własności wyznaczników; w pracy [10] z możliwości przedstawienia wyznacznika w postaci odpowiedniej sumy innych wyznaczników, w niniejszej zaś pracy – z własności rozwinięcia wyznacznika względem dowolnej kolumny. Opisana przez autora metoda wydaje się znacznie prostsza ze względu na łatwość algorytmizacji – w pracy podany został algorytm obliczeń służących identyfikacji parametrów pęknięcia.

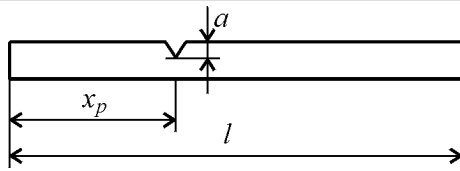
Obok identyfikacji z wykorzystaniem modelu analitycznego wielu autorów dokonuje również identyfikacji pęknięcia na podstawie modelu komputerowego MES [6, 7, 10, 18].

Rozwój metod komputerowych przyczynił się do powstania nowych lub zastosowania znanych wcześniej metod identyfikacji, np. opartych na algorytmach genetycznych [4], transformacie falkowej [14, 17], sieciach neuronowych [8] czy metodach probabilistycznych [1].

2. OPIS PROBLEMU

Rozpatrywany w pracy problem opisany został za pomocą modelu belki Bernoulliego–Eulera, ze stałe otwartą szczeliną, co schematycznie pokazano na rysunku 1.

* Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Katedra Mechaniki i Wibroakustyki; majkut@uci.agh.edu.pl



Rys. 1. Model rozpatrywanej belki z pęknięciem

Przedmiotem pracy jest poszukiwanie głębokości pęknięcia a i jego położenia x_p dla belki pokazanej na rysunku 1. W rozważaniach przyjęto belkę o stałym przekroju poprzecznym $A = b \times h$ oraz momencie bezwładności przekroju I . Założono również stałość własności materiałowych na długości belki, tzn. modułu Younga E oraz gęstości materiału ρ . Pęknięcie zostało zamodelowane jako sprężyna, której podatność θ wiąże ze sobą moment gnący w przekroju o współrzędnej $x = x_p$ oraz kąty obrotu z prawej i lewej strony przekroju, w którym występuje pęknięcie, czyli

$$y'(x_{p+}, t) - y'(x_{p-}, t) = \theta EI y''(x_p, t) \quad (1)$$

Taki model pęknięcia w belce pochodzi z pracy [16]. Sposób wyznaczenia podatności sprężyny modelującej pęknięcie w funkcji jego głębokości opisany został poniżej.

3. ENERGETYCZNY OPIS SZCZELINY

Prace z zakresu mechaniki pęknięcia [12] pozwalają na znalezienie zależności pomiędzy wielkością globalną, jaką jest współczynnik uwalniania energii – G (równą zmianie energii potencjalnej odkształcenia U na skutek wzrostu pola pęknięcia A_p , $G = \frac{\partial U}{\partial A_p}$), a wielkością lokalną – współczynnikiem intensywności naprężeń – K_I

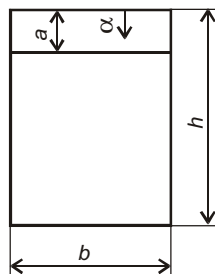
$$G = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot K_I^2,$$

gdzie:

- G – współczynnik uwalniania energii,
- ν – współczynnik Poissona,
- E – moduł Younga,
- K_I – współczynnik intensywności naprężeń (WIN) dla pierwszego sposobu obciążenia szczeliny.

Całkowity przyrost energii związany ze szczeliną o głębokości a jest równy (oznaczenia na rys. 2)

$$U = \int_{A_p} G ds = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot b \cdot \int_0^a K_I^2 d\alpha \quad (2)$$



Rys. 2. Przekrój poprzeczny belki w przekroju z pęknięciem

WIN zapisać można w postaci

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \alpha} F_I \left(\frac{\alpha}{h} \right),$$

gdzie:

- A_p – pole pęknięcia,
- $b \times h$ – wymiary belki,
- a – głębokość pęknięcia,
- σ – naprężenie normalne,
- F_I – współczynnik korekcyjny.

Zależność pomiędzy współczynnikiem F_I a głębokością pęknięcia znaleźć można w katalogach [16] i dla belki zginanej przyjmuje postać

$$F_I \left(\frac{\alpha}{h} \right) = 1,122 - 1,40 \left(\frac{\alpha}{h} \right) + 7,33 \left(\frac{\alpha}{h} \right)^2 - 13,08 \left(\frac{\alpha}{h} \right)^3 + 14,0 \left(\frac{\alpha}{h} \right)^4.$$

Jest to zależność empiryczna oparta na metodzie najmniejszych kwadratów, której dokładność wynosi 0,2% dla głębokości szczeliny nie większej od 0,6 h .

Po prostych przekształceniach wyznaczyć można przyrost energii odkształcenia w belce związany z powstaniem szczeliny o głębokości a w belce o przekroju prostokątnym $b \times h$. Wykorzystując twierdzenie Castigliano, otrzymuje się wielkość podatności θ

$$\theta = 6h\pi \cdot \frac{1-\nu^2}{EI} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \times \left[0,6294 - 1,0472 \left(\frac{a}{h} \right) + 4,6021 \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 9,9751 \left(\frac{a}{h} \right)^3 + 20,2948 \left(\frac{a}{h} \right)^4 - 32,9933 \left(\frac{a}{h} \right)^5 + 47,0408 \left(\frac{a}{h} \right)^6 - 40,6933 \left(\frac{a}{h} \right)^7 + 19,6 \left(\frac{a}{h} \right)^8 \right] \quad (3)$$

4. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Stosując metodę Fouriera rozdzielania zmiennych, równanie drgań własnych belki z pęknięciem w klasie funkcji uogólnionych, ma postać

$$X^{(4)} - \lambda^4 X = \theta X''(x_p) \delta''(x, x_p) \quad (4)$$

Rozwiązaniem równania (4) jest funkcja

$$X(x) = X_0(x) + \frac{\theta}{2\lambda} X''(x_p) \cdot [\operatorname{sh} \lambda(x - x_p) + \sin \lambda(x - x_p)] H(x, x_p) \quad (5)$$

gdzie:

$\delta(x, x_p)$ – funkcja delta Diraca w punkcie $x = x_p$,

$H(x, x_p)$ – funkcja Heavisida (skoku jednostkowego) w punkcie $x = x_p$,

$$\lambda = \omega^2 \rho A / EI,$$

$X_0 = P \operatorname{ch} \lambda x + Q \operatorname{sh} \lambda x + R \cos \lambda x + S \sin \lambda x$ – rozwiązanie drgań belki jednorodnej.

Pochodną funkcji (5) jest funkcja

$$X'(x) = X'_0(x) + \frac{\theta}{2} X''(x_p) \cdot [\operatorname{ch} \lambda(x - x_p) + \cos \lambda(x - x_p)] H(x, x_p) \quad (6)$$

Stałe P, Q, R, S zależą od warunków brzegowych skojarzonych z rozważanym problemem.

Wykorzystując powyżej opisany model belki z pęknięciem, można rozwiązać problem odwrotny, czyli wyznaczyć współrzędną x_p i głębokość a pęknięcia z wykorzystaniem wyznaczonych dla rzeczywistego obiektu częstości drgań własnych. Dla wyznaczonych częstości należy wyliczyć wielkości λ , po czym wyznaczyć x_p i θ , dla których zeruje się wyznacznik macierzy głównej zawierającej współczynniki opisujące równania warunków brzegowych, a następnie głębokość a wyznaczyć z zależności (3). Oczywiście, ze względu na niejednoznaczność modelu odwrotnego, dla każdej częstości otrzymuje się w ten sposób funkcję jednej zmiennej, więc do identyfikacji potrzebne są przynajmniej dwie częstości drgań własnych. Punkt przecięcia krzywych θ w funkcji x_p dla dwu różnych częstości wyznacza poszukiwane parametry pęknięcia. Sposób postępowania pokazany zostanie na przykładach

4.1. Belka swobodnie podarta

W przypadku belki swobodnie podartej warunki brzegowe mają postać: $X(0) = 0, X''(0) = 0$, a to prowadzi do wniosku, że $P = R = 0$, co obniża rząd macierzy głównej. Wykorzystane to zostało w pracy [14], gdzie na podstawie zmiany dwu pierwszych częstości własnych belki z pęknięciem w stosunku do częstości belki bez pęknięcia identyfikowane jest tylko położenie pęknięcia.

Pozostałe równania opisujące warunki brzegowe $X(l) = 0$ i $X''(l) = 0$ zapisane zostaną w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sh} \lambda_i l & \sin \lambda_i l & a_{13} \\ \operatorname{sh} \lambda_i l & -\sin \lambda_i l & a_{23} \\ \operatorname{sh} \lambda_i x_p & -\sin \lambda_i x_p & -1/\lambda_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q \\ S \\ X''(x_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$a_{13} = \frac{\theta}{2\lambda_i} [\operatorname{sh} \lambda_i(l - x_p) + \sin \lambda_i(l - x_p)],$$

$$a_{23} = \frac{\theta}{2\lambda_i} [\operatorname{sh} \lambda_i(l - x_p) - \sin \lambda_i(l - x_p)],$$

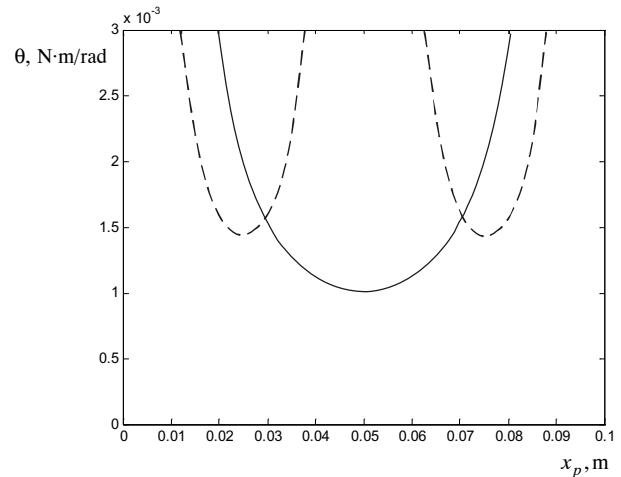
$$\lambda_i = \omega_i^2 \rho A / EI,$$

ω_i – i -ta wyznaczona częstość własna.

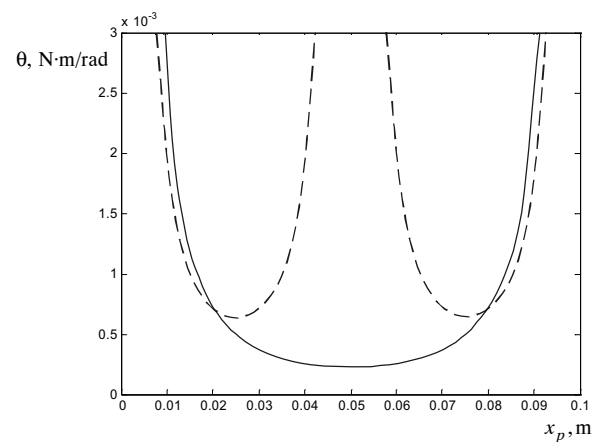
Na rysunkach 3 i 4 przedstawione zostały krzywe θ w funkcji x_p dla dwu pierwszych częstości własnych belki swobodnie podartej z dwoma różnymi pęknięciami (*crack 1* i *crack 2*) [14].

Dane zaczerpnięto z pracy [14]: długość belki $l = 0,1$ m, wysokość $h = 0,0016$ m, szerokość $b = h$, $\rho = 7960$ kg/m³ oraz $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa.

Wyznaczone częstotliwości (z analizy MES) dla belki z pęknięciem *crack 1* wynoszą $f_1 = 370,31$ Hz i $f_2 = 1475,36$ Hz.



Rys. 3. Przebieg zmiany podatności θ w funkcji lokalizacji pęknięcia x_p dla belki *crack 1*
Objaśnienia w tekście



Rys. 4. Przebieg zmiany podatności θ w funkcji lokalizacji pęknięcia x_p dla belki *crack 2*
Objaśnienia w tekście

Na rysunku 3 linią ciągłą oznaczono krzywą uzyskaną dla częstości f_1 , linią przerywaną – dla f_2 . Ze względu na symetrię układu krzywe te przecinają się w dwu punktach o współrzędnych $x_{p1} = 0,0296$ m i $x_{p2} = 0,0704$ m. Określenie, po której stronie środka belki znajduje się pęknięcie, należy przeprowadzić innymi metodami. Obu wielkościom x_p odpowiada natomiast ta sama wartość podatności $\theta = 1,5704 \cdot 10^{-3}$, która odpowiada głębokości pęknięcia z równania (3) $a = 0,303h$. Porównanie wielkości zidentyfikowanych i modelowanych w analizie MES dla przypadków *crack 1* i *crack 2* zebrano w tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki identyfikacji pęknięcia

Crack	Model MES [14]	Parametry identyfikowane	Błąd względny
„1”	$x_p = 70 \text{ mm}$	$x_p = 70,4$	0,6%
	$a = 0,3 \text{ h}$	$a = 0,303 \text{ h}$	1,0%
„2”	$x_p = 80 \text{ mm}$	$x_p = 80,9$	1,25%
	$a = 0,2 \text{ h}$	$a = 0,205 \text{ h}$	2,5%

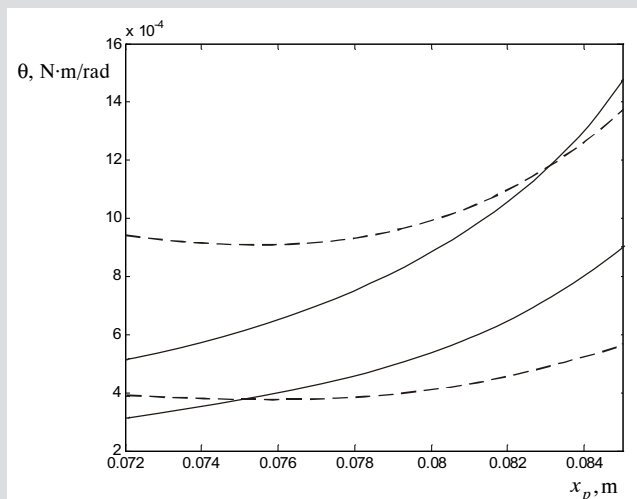
Dla pęknięcia opisanego jako *crack 2* wyznaczone z analizy MES częstotliwości wynoszą $f_1 = 371,93 \text{ Hz}$ i $f_2 = 1481,52 \text{ Hz}$.

Na rysunku 4 podobnie jak na rysunku 3 linią ciągłą oznaczono krzywą uzyskaną dla częstotliwości f_1 linią przerywaną – dla f_2 . Ze względu na symetrię układu krzywe te przecinają się w dwu punktach o współrzędnych $x_{p1} = 0,0191 \text{ m}$ i $x_{p2} = 0,0809 \text{ m}$. Obu wielkościom x_p odpowiada natomiast ta sama wartość podatności $\theta = 6,97 \cdot 10^{-4}$, która odpowiada głębokości pęknięcia wyznaczonej z równania (3) $a = 0,205 \text{ h}$.

Tak dobre wyniki można uzyskać jedynie w przypadku bardzo dokładnego wyznaczenia częstotliwości drgań własnych. W związku z tym poniżej wyznaczono przebiegi podatności θ w funkcji x_p , tzn. lokalizacji pęknięcia z uwzględnieniem niepewności pomiaru. Błędy δ_1 i δ_2 pomiaru częstotliwości wyznaczono z porównania częstotliwości drgań własnych belki bez pęknięcia modelowanej w MES ω_{0i-MES} i częstotliwości uzyskanej dla modelu analitycznego $\omega_{0i-Anal}$

$$\delta_i = |\omega_{0i-MES} - \omega_{0i-Anal}| / \omega_{0i-Anal} \quad (7)$$

Na rysunku 5 pokazano przebieg poszukiwanych krzywych dla czterech częstotliwości $f_1 \pm \delta_1$ i $f_2 \pm \delta_2$ dla przypadku *crack 2* w pobliżu lokalizacji pęknięcia $x_p = 80 \text{ mm}$.



Rys. 5. Przebieg zmiany podatności θ w funkcji x_p dla częstotliwości „wyznaczonych” z błędem
Objaśnienia w tekście

Liniami ciągłymi oznaczono krzywe wyznaczone dla $f_1 \pm \delta_1$, liniami przerywanymi – dla $f_2 \pm \delta_2$. Identyfikowane wielkości położenia pęknięcia i jego głębokości zawierają się w części wspólnej wewnątrz obszarów ograniczonych

krzywymi wyznaczonymi dla $f_1 \pm \delta_1$ (linie ciągłe) i dla $f_2 \pm \delta_2$ (linie przerywane). Obszar ten zawiera lokalizację pęknięcia w przedziale $x_p \in (75-83) \text{ mm}$ i głębokość pęknięcia $a \in (0,15-0,26) \text{ h}$ (modelowane parametry to $x_p = 80 \text{ mm}$ i $a = 0,2 \text{ h}$). W rozważanym przykładzie częstotliwości ω_{0i-MES} zaczerpnięto również z pracy [14], a wyznaczone z zależności (7) wielkości błędów wynoszą $\delta_1 = 5,9 \cdot 10^{-4}$ oraz $\delta_2 = 2,6 \cdot 10^{-3}$. Wielkości $f_1 \pm \delta_1$ różnią się zatem zaledwie o $0,5 \text{ Hz}$ ($f_2 \pm \delta_2$ o $7,7 \text{ Hz}$), z czego wynika, że dokładność proponowanej metody identyfikacji zależy istotnie od dokładności wyznaczenia (pomiaru) częstotliwości drgań własnych.

4.2. Belka wspornikowa

W przypadku belki wspornikowej rozwiązanie (5) i jego pochodne muszą spełniać warunki brzegowe: $X(0) = 0$, $X'(0) = 0$, $X''(l) = 0$ oraz $X'''(l) = 0$.

Postępując jak w przykładzie poprzednim, wielkości θ i x_p wyznacza się z warunku zerowania się wyznacznika macierzy głównej \mathbf{M} dla każdej z wyznaczonych częstotliwości drgań własnych. W przypadku belki wspornikowej wyznacznik ten ma postać

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{ch } \lambda_i l & \text{sh } \lambda_i l & -\cos \lambda_i l & -\sin \lambda_i l & a_{33} \\ \text{sh } \lambda_i l & \text{ch } \lambda_i l & \sin \lambda_i l & -\cos \lambda_i l & a_{45} \\ \text{ch } \lambda_i x_p & \text{sh } \lambda_i x_p & \cos \lambda_i x_p & \sin \lambda_i x_p & \frac{-1}{\lambda_i^2} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$a_{35} = \frac{\theta}{2\lambda_i} \cdot [\text{sh } \lambda_i (l - x_p) - \sin \lambda_i (l - x_p)],$$

$$a_{45} = \frac{\theta}{2\lambda_i} \cdot [\text{ch } \lambda_i (l - x_p) - \cos \lambda_i (l - x_p)].$$

Do rozwiązania tego problemu zaproponowana zostanie następująca metodologia, która pozwala na stworzenie algorytmu komputerowego [9]:

1. w macierzy głównej \mathbf{M} należy dokonać modyfikacji polegającej na tym, że w miejsce wielkości θ należy wprowadzić wielkość 1 (jeden) – powstała macierz oznaczono przez \mathbf{A} ;
2. należy skonstruować inną macierz (tu oznaczoną \mathbf{B}), która powstaje z macierzy \mathbf{A} przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny, jest to więc macierz opisująca problem własny belki bez uszkodzenia;
3. przy takich oznaczeniach poszukiwane równanie wyznacznikowe zapisać można w postaci

$$\theta(\det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})) - \det(\mathbf{B}) = 0 \quad (8)$$

Równanie to łatwo wyprowadzić, rozwijając wyznacznik macierzy głównej względem ostatniej kolumny. Z równania (8) po przekształceniach można wyznaczyć podat-

ność θ dla każdego $x_p \in (0, l)$ (tylko macierz \mathbf{A} zmienia się w funkcji x_p)

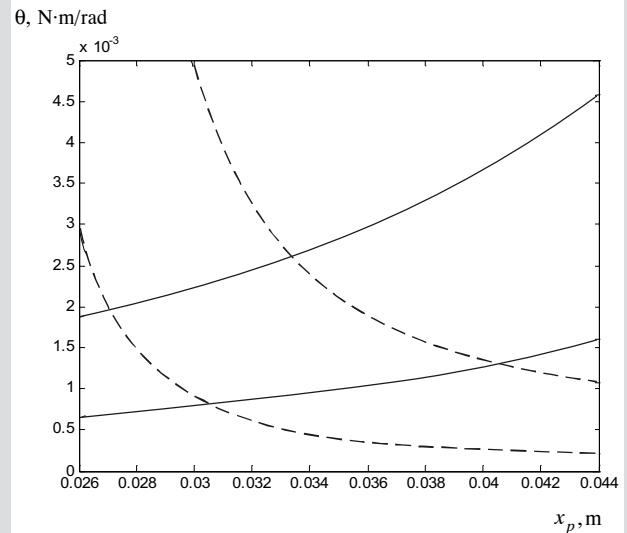
$$\theta = \det(\mathbf{B}) / (\det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})) \quad (9)$$

Częstości drgań własnych wspornika, konieczne do identyfikacji, wyznaczone zostały przez autora z analizy MES. Dane geometryczne i materiałowe do analizy przyjęto takie same jak belki swobodnie podpartej. Rozpatrzono 8 różnych wariantów parametrów pęknięcia. Wielkości te oraz wyznaczone dla nich częstotliwości własne i wyniki identyfikacji zebrano w tabeli 2 (wszystkie wielkości położenia pęknięcia x_p podane są w mm).

Proces identyfikacji przeprowadzono w ten sposób, że dla każdej częstości własnej wyznaczono (wg równania (9)) przebiegi zmiany podatności θ w funkcji lokalizacji pęknięcia x_p . Współrzędne punktów przecięcia krzywych, wyznaczonych dla obu częstości, w każdym z przypadków są poszukiwanymi wielkościami θ i x_p . Wielkość głębokości pęknięcia wyznaczono z zależności (3).

Na rysunku 6 pokazany został przykładowy przebieg krzywej podatności θ w funkcji lokalizacji pęknięcia x_p dla wariantu 4., z uwzględnieniem błędów wyznaczania częstości. Założono tu, że błąd wyznaczenia każdej częstości własnej jest identyczny z popełnianym przy wyznaczaniu tej częstości dla belki bez pęknięcia, jak to przedstawia zależność (7). Wielkością wzorcową są częstości wyznaczone analitycznie z jednowymiarowego modelu belki Eulera (zwanego również technicznym równaniem drgań belki).

Podobnie jak poprzednio liniami ciągłymi oznaczono krzywe wyznaczone dla $f_1 \pm \delta_1$, liniami przerywanymi – dla $f_2 \pm \delta_2$. Identyfikowane wielkości, tj. miejsca pęknięcia i jego głębokości, zawierają się w części wspólnej wewnątrz obszarów ograniczonych takimi samymi liniami. Obszar ten zawiera lokalizację pęknięcia dla wariantu 4. w przedziale $x_p \in (27,1-40,4)$ mm i głębokość pęknięcia $a \in (0,22-0,378)h$ mm (modelowane parametry to $x_p = 30$ mm i $a = 0,3h$).



Rys. 6. Przebieg zmiany podatności θ w funkcji x_p dla częstości wyznaczonych z błędem (wariant 4.)
Objaśnienia w tekście

Tabela 2. Wyniki identyfikacji pęknięcia

Wariant	Model MES	Częstotliwości własne, Hz		Parametry identyfikowane	Błąd względny
1	$x_p = 10$	$f_1 = 132,41$	$f_2 = 834,07$	$x_p = 8,94$	10,6%
	$a = 0,2h$			$a = 0,189h$	5,5%
2	$x_p = 10$	$f_1 = 131,07$	$f_2 = 830,57$	$x_p = 8,91$	10,9%
	$a = 0,3h$			$a = 0,274h$	8,7%
3	$x_p = 30$	$f_1 = 133,04$	$f_2 = 835,45$	$x_p = 32,2$	7,3%
	$a = 0,2h$			$a = 0,208h$	4,0%
4	$x_p = 30$	$f_1 = 132,44$	$f_2 = 834,20$	$x_p = 31,6$	5,3%
	$a = 0,3h$			$a = 0,283h$	5,7%
5	$x_p = 50$	$f_1 = 133,40$	$f_2 = 832,32$	$x_p = 49,3$	1,4%
	$a = 0,2h$			$a = 0,189h$	5,5%
6	$x_p = 50$	$f_1 = 133,32$	$f_2 = 827,33$	$x_p = 53,6$	7,2%
	$a = 0,3h$			$a = 0,264h$	12,0%
7	$x_p = 70$	$f_1 = 133,57$	$f_2 = 834,18$	$x_p = 74,1$	5,9%
	$a = 0,2h$			$a = 0,24h$	20,0%
8	$x_p = 70$	$f_1 = 133,56$	$f_2 = 832,46$	$x_p = 77,6$	10,9%
	$a = 0,3h$			$a = 0,355h$	18,3%

Czynnikiem wpływającym na niepewność identyfikacji jest nieuwzględnianie tłumienia w analizowanych modelach analitycznych i obliczanych za pomocą MES. Współczynnik tłumienia wewnętrznego (siła tłumienia jest proporcjonalna do prędkości odkształceń) rośnie z kwadratem częstości, i co za tym idzie, jego wpływ na mierzone częstości własne jest tym większy, im wyższą częstość chcemy zmierzyć. Jest to podobne zjawisko do zjawiska przesuwania się amplitudy maksymalnej na charakterystyce amplitudowo-częstotliwościowej układu drgającego o jednym stopniu swobody z tłumieniem.

Wynika z tego, że aby zminimalizować wpływ tłumienia na wyniki identyfikacji, najlepiej byłoby mierzyć jedynie pierwszą częstość własną. Niestety dla każdej częstości własnej, tak jak to opisano na początku pracy, zidentyfikować można jedynie zbiór par $(\theta \text{ i } x_p)$ – model odwrotny jest modelem niejednoznacznym.

Problem ten (wyznaczanie jedynie pierwszej częstości własnej) autor proponuje rozwiązać poprzez chwilową zmianę struktury układu, np. poprzez dodanie znanej masy skupionej w określonym przekroju i dla takiego zmodyfikowanego układu wyznaczyć krzywą podatności θ w funkcji położenia pęknięcia x_p . Zidentyfikowane parametry pęknięcia leżą na przecięciu się krzywych wyznaczonych z pierwszych częstości własnych i modelu belki bez i z zaproponowaną modyfikacją.

Opisany powyżej sposób identyfikacji pokazany zostanie na przykładzie.

4.3. Belka obustronnie utwierdzona

W przypadku belki obustronnie utwierdzonej wyznacznik macierzy głównej ma postać

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{ch} \lambda l & \operatorname{sh} \lambda l & \cos \lambda l & \sin \lambda l & a_{35} \\ \operatorname{sh} \lambda l & \operatorname{ch} \lambda l & -\sin \lambda l & \cos \lambda l & a_{45} \\ \operatorname{ch} \lambda x_p & \operatorname{sh} \lambda x_p & \cos \lambda x_p & \sin \lambda x_p & -\frac{1}{\lambda^2} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cosh \lambda l & \sinh \lambda l & \cos \lambda l & \sin \lambda l & \frac{\mu \cdot \lambda}{2} [\sinh \lambda (l - x_d) - \sin \lambda (l - x_d)] & a_{36} \\ \sinh \lambda l & \cosh \lambda l & -\sin \lambda l & \cos \lambda l & \frac{\mu \cdot \lambda}{2} [\cosh \lambda (l - x_d) - \cos \lambda (l - x_d)] & a_{46} \\ \cosh \lambda x_d & \sinh \lambda x_d & \cos \lambda x_d & \sin \lambda x_d & -1 & a_{56} \\ \cosh \lambda x_p & \sinh \lambda x_p & \cos \lambda x_p & \sin \lambda x_p & \frac{\mu \cdot \lambda}{2} [\sinh \lambda (x_p - x_d) - \sin \lambda (x_p - x_d)] \cdot H(x_p, x_d) & -\frac{1}{\lambda^2} \end{vmatrix},$$

gdzie:

$$a_{35} = \frac{\theta}{2\lambda} \cdot [\operatorname{sh} \lambda (l - x_p) + \sin \lambda (l - x_p)],$$

$$a_{45} = \frac{\theta}{2\lambda} \cdot [\operatorname{ch} \lambda (l - x_p) + \cos \lambda (l - x_p)].$$

Parametry pęknięcia wyznaczyć można, postępując według wcześniej opisanego algorytmu i równania (9).

Równanie drgań własnych układu z modyfikacją w postaci dołączenia dodatkowej masy skupionej m_d w przekroju o współrzędnej $x = x_d$ i z uwzględnieniem pęknięcia, po rozdzieleniu zmiennych, można zapisać w postaci

$$X^{(4)} - \lambda^4 X = \mu \lambda^4 X(x_d) \delta(x, x_d) + \theta X''(x_p) \delta''(x, x_p) \quad (10)$$

Rozwiązaniem równania (10) jest funkcja (11)

$$X(x) = X_0(x) + \frac{\mu \lambda}{2} X(x_d) \times \\ \times [\operatorname{sh} \lambda (x - x_d) - \sin \lambda (x - x_d)] H(x, x_d) + \\ + \frac{\theta}{2\lambda} X''(x_p) [\operatorname{sh} \lambda (x - x_p) + \\ + \sin \lambda (x - x_p)] H(x, x_p) \quad (11)$$

gdzie $\mu = m_d / \rho A$, pozostałe oznaczenia jak poprzednio.

Wyznacznik macierzy głównej należy uzupełnić o kolumnę związaną z nieznaną wielkością $X(x_d)$ oraz o wiersz opisujący zależności pomiędzy tą wielkością i stałymi całkowania P, Q, R, S . Na wartość wyznacznika nie wpływa zamiana miejscami dwu dowolnych kolumn czy wierszy, z czego wynika, że dodatkową kolumnę i wiersz można uwzględnić w dowolnym miejscu. Jednak, aby nie utracić możliwości skorzystania z opisanego algorytmu, należy dodatkową kolumnę wpisać jako piątą, podobnie – jako piątą – wiersz dodatkowy. W takim przypadku macierz oznaczona poprzednio przez \mathbf{B} , która powstaje z macierzy \mathbf{A} przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny, jest macierzą opisującą problem własny belki z masą skupioną bez uszkodzenia.

W przypadku belki obustronnie utwierdzonej z masą dodatkową wyznacznik macierzy głównej ma postać

gdzie:

$$a_{35} = \frac{\theta}{2\lambda} \cdot \left[\sinh \lambda(l - x_p) + \sin \lambda(l - x_p) \right],$$

$$a_{45} = \frac{\theta}{2\lambda} \cdot \left[\cosh \lambda(l - x_p) + \cos \lambda(l - x_p) \right],$$

$$a_{56} = \frac{\theta}{2\lambda} \cdot \left[\sinh \lambda(x_d - x_p) - \sin \lambda(x_d - x_p) \right] \cdot H(x_d, x_p).$$

Pierwsze częstości drgań własnych układu podstawowego i z modyfikacją potrzebne do identyfikacji zostały wyznaczone z modelu MES i zebrane w tabeli 3. Dane materiałowe i geometryczne przyjęto jak dla belki rozważanej w poprzednim przykładzie, przyjęta wielkość masy dodatkowej $m_d = 0,5\rho A$, dołączonej w punkcie $x_d = 0,07$ m.

Warianty 5. i 6. dotyczą przypadku, w którym masę dodatkową przyłączono w tym samym przekroju, w którym modelowano pęknięcie. Wyniki identyfikacji przekazano w tabeli 3.

Tabela 3. Wyniki identyfikacji pęknięcia

Wariant	Częstotliwości własne		Model MES	Parametry identyfikowane	Błąd względny
1	bez m_d	z m_d	$x_p = 10$	$x_p = 10,2$	2,0%
	$f_1 = 846,66$	$f_1 = 288,43$	$a = 0,2h$	$a = 0,213h$	6,5%
2	$f_1 = 843,08$	$f_1 = 287,68$	$x_p = 10$	$x_p = 10,9$	9,0%
			$a = 0,3h$	$a = 0,325h$	8,3%
3	$f_1 = 864,40$	$f_1 = 288,85$	$x_p = 50$	$x_p = 48,2$	3,6%
			$a = 0,2h$	$a = 0,19h$	5,0%
4	$f_1 = 841,14$	$f_1 = 287,81$	$x_p = 50$	$x_p = 53,8$	7,6%
			$a = 0,3h$	$a = 0,299h$	0,33%
5	$f_1 = 848,72$	$f_1 = 287,11$	$x_p = 70$	$x_p = 68,8$	1,7%
			$a = 0,2h$	$a = 0,23h$	15,0%
6	$f_1 = 847,51$	$f_1 = 284,57$	$x_p = 70$	$x_p = 69,6$	0,6%
			$a = 0,3h$	$a = 0,333h$	11,0%

Rozważania wskazują jednoznacznie na możliwość wyznaczenia parametrów pęknięcia dla kilku różnych położenia masy dodatkowej (lub kilku wielkości masy), co zwiększa liczbę identyfikacji. Każde dwie wielkości częstości mogą posłużyć do wyznaczenia krzywych podatności w funkcji położenia pęknięcia, na przecięciu których leżą poszukiwane parametry (położenie i głębokość) pęknięcia.

Po wyznaczeniu parametrów uszkodzenia dla różnych modyfikacji strukturalnych belki można poddać je obróbce statystycznej (np. uśrednianiu), dzięki czemu można zminimalizować wpływ niepewności pomiarów częstości drgań własnych.

5. PODSUMOWANIE

W układach konstrukcyjnych, których modelem fizycznym jest belka prostoliniowa, możliwa jest identyfikacja parametrów pęknięcia. Jako wielkości konieczne do identyfikacji wykorzystano częstości drgań własnych. Każdy pomiar częstości pozwala na wyznaczenie krzywej podatności sprężyny modelującej pęknięcie w funkcji jego położenia.

Dla każdej pary parametrów (θ , x_p) leżących na krzywej częstość drgań własnych jest równa częstości zmierzonej –

identyfikacja (ściślej model odwrotny) jest procesem niejednoznacznym.

Punkt wspólny dwu dowolnych krzywych wyznacza poszukiwane parametry pęknięcia, stąd wynika, że dla np. pięciu dowolnych pomiarów identyfikacyjnych otrzymuje się dziesięć par krzywych, z których po obróbce statystycznej można wyznaczyć poszukiwane parametry pęknięcia.

Jako pomiary identyfikacyjne wykorzystać można pomiary układu zmodyfikowanego, np. poprzez dodanie znacznej masy dodatkowej.

W każdym przypadku identyfikacji dokładność wyznaczenia parametrów pęknięcia zależy od dokładności (niepewności) pomiaru częstości. Otrzymać można wtedy jedynie pewne obszary, w których zawierają się poszukiwane parametry pęknięcia (tab. 2 i 3).

Literatura

- [1] Cacciola P., Impollonia N., Muscolina G.: *Crack detection and location in a damaged beam vibrating under white noise*. Computers and Structures, 81, 2003, 1773–1782
- [2] Chaudhari T.D., Maiti S.K.: *A study of vibration of geometrically segmented beams with and without crack*. International Journal of Solids and Structures, 37, 2000, 761–779

- [3] Dimarogonas A.D.: *Vibration of cracked structures: a state of the art review*. Engineering Fracture Mechanics, 55, 1996, 831–857
- [4] Krawczuk M.: *Application of spectral beam finite element with a crack and iterative search technique for damage detection*. Finite Elements in Analysis and Design, 38, 2002, 537–548
- [5] Krawczuk M., Ostachowicz W.: *Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 34, 1996, 307–326
- [6] Krawczuk M., Żak A., Ostachowicz W.: *Elastic beam finite element with a transverse elasto-plastic crack*. Finite Elements in Analysis and Design, 34, 2000, 61–73
- [7] Lee Y-S., Chung M-J.: *A study on crack detection using eigenfrequency test data*. Computers and Structures, 77, 2000, 327–342
- [8] Liu S.W., Huang J.H., Sung J.C., Lee C.C.: *Detection of crack using neural networks and computational mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191, 2002, 2831–2845
- [9] Majkut L., Marczuk R.: *Kształtowanie charakterystyk dynamicznych belek. Drgania własne*. Kwartalnik AGH Mechanika, 23, z. 3, 2004
- [10] Nandwana B.P., Maiti S.K.: *Detection of the location and size of a crack in stepped cantilever beams based on measurements of natural frequencies*. Journal of Sound and Vibration, 203, 1997, 435–446
- [11] Narkis Y.: *Identification of crack location in vibrating simply supported beams*. Journal of Sound and Vibration, 172, 1994, 549–558
- [12] Neimitz A.: *Mechanika pękania*. Warszawa, PWN 1998, wydanie 1, rozdziały 2 i 3
- [13] Ostachowicz W., Krawczuk M.: *Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam*. Journal of Sound and Vibration, 150, 1991, 191–201
- [14] Quek S-T., Wang Q., Zhang L., Ang K-K.: *Sensitivity analysis of crack detection in beams by wavelet technique*. International Journal of Mechanical Sciences, 43, 2001, 2899–2910
- [15] Szala J.: *Przegląd możliwości diagnozowania obiektów technicznych ze względu na zmęczeniowe pęknięcie*. Przegląd Mechaniczny LXII, 2003, 7–15
- [16] Tada H., Paris P.C., Irwin G.R.: *The stress analysis of cracks handbook*. Del Research Corporation, 1973
- [17] Tian J., Li Z., Su X.: *Crack detection in beams by wavelet analysis of transient flexural waves*. Journal of Sound and Vibration, 261, 2003, 715–727
- [18] Viola E., Federici L., Nobile L.: *Detection of crack location using cracked beam element method for structural analysis*. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 36, 2001, 23–35