AUTOMATYKA • 2011 • Tom 15 • Zeszyt 1

Henryk Górecki*

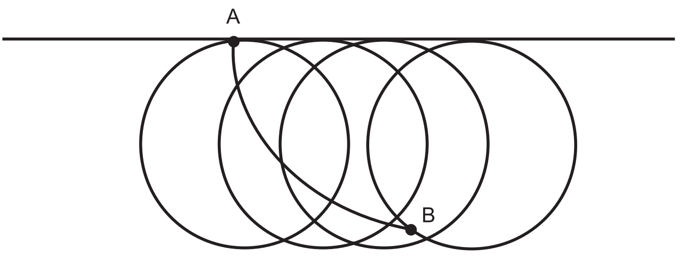
Zagadnienie tautochrony

1. Wstęp

Problem znalezienia krzywej zwanej *tautochroną* narodził się z potrzeby, by zegary na statkach wskazywały dokładny czas niezależnie od ich kołysania. Ten dokładny czas umożliwiał określenie, na jakiej długości geograficznej statek się znajduje. Krzywa ta okazała się cykloidą nazwana tak przez Galileusza (1504–1642).

Roberwal (1602–1675) wprowadził krzywą pomocniczą i nazwał ją *towarzyszką cykloidy*. Francuski jezuita Honoré Fabry (1607–1688) autor artykułu *Opusculum geometricum de linea sinum, et cycloida Romae 1659* nazwał tę towarzyszkę cykloidy linią sinusów.

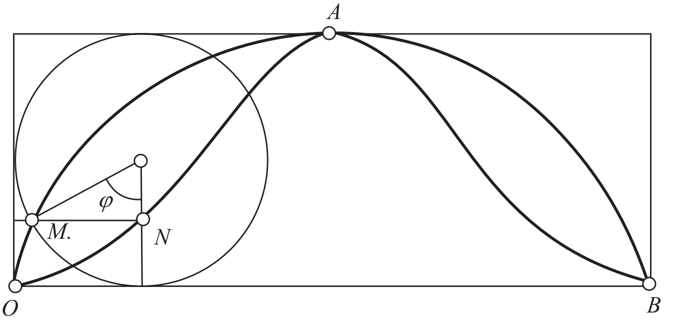
W ten sposób sinusoida po raz pierwszy zjawiła się w literaturze. Cykloida (rys. 1), to krzywa jaką zajmują punkty koła toczacego się po prostej, a sinusoida *towarzyszka* (rys. 2), to miejsce geometryczne rzutów tych punktów na średnicę pionową tego koła [5].



Rys. 1. Cykloida

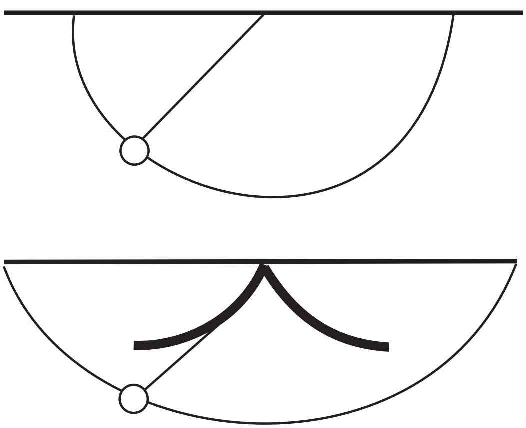
Do mierzenia czasu Galileusz zaproponował wykorzystać ruch wahadłowy. Huygens (1601–1665) na podstawie tej idei skonstruował zegar. Jednakże zegar ten byl niedokładny, gdyż okres wahań zależał od amplitudy.

* Wyższa Szkoła Informatyki, ul. Rzgowska 17a, 93–08 Łódź; AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki, Katedra Automatyki, al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków



Rys. 2. Cykloida i sinusoida

Aby zapewnić izochronizm wahań, trzeba zmniejszać długość wahadła ze wzrostem amplitudy. Huygens wyliczył kształt krzywej, po której powinien poruszać się koniec *ograniczonego* odpowiednimi zaporami wahadła. Tę krzywą nazwał *tautochroną* (rys. 3).



Rys. 3. Tautochrona

Okazalo się, że zapory te są również cykloidami. De l'Hospital (1661–1704) udowodnił, że łuk cykloidy jest łukiem o największej wytrzymałości na obciążenie. Galileusz postawił problem znalezienia krzywej łączącej dwa różne punkty A i B nieleżące na tej samej wysokości, o tej własności, że punkt ślizgający się po niej, bez tarcia pod wpływem siły ciężkości, uczyni to w minimalnym czasie. Jan Bernoulli (1667–1748) znalazł tę krzywą zwaną *brachistochroną*, okazała się nią cykloida tożsama z tautochroną.

Ruch tautochroniczny jest to ruch, w którym punkt materialny pod działaniem odpowiedniej siły dociera po zadanym torze w tym samym czasie do pewnego stale obranego punktu, niezależnie od wyboru położenia początkowego.

2. Postawienie problemu

Rozważmy naprzód ruch tautochroniczny po prostej. Zakładamy, że siła zależy tylko od położenia punktu, a więc od odciętej na prostej. Siłę oznaczamy przez $F(x)$, położenie początkowe przez x_{01} prędkość v w położeniu początkowym równa 0, masa m. Jest więc

$$\int_{x_0}^{x} F\mathrm{d}x = \frac{mv^2}{2} \quad .$$

Oznaczmy

$$\int_{x_0}^{x} F\mathrm{d}x = \varphi(x) \quad .$$

Punkt docelowy $x = 0$. Będzie więc

$$m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2\big[\varphi(x_0) - \varphi(x)\big], \; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,\sqrt{\varphi(x_0) - \varphi(x)},$$

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\varphi(x_0) - \varphi(x)}} \quad .$$

Oznaczymy czas potrzebny, aby z x_0 dotrzeć do 0 przez T. Będzie więc

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\varphi(x_0) - \varphi(x)}} \quad . \tag{1}$$

Niech

$$\varphi(x) = z, \quad \varphi(x_0) = z_0, \quad x = \psi(z)$$

(ψ funkcja odwrotna do φ)

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_0} \frac{\psi'(z)\mathrm{d}z}{\sqrt{z_0 - z}} \quad . \tag{2}$$

Aby ruch był tautochroniczny, powinno być $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x_0} = 0$. Trudność polega na tym, że gdy różniczkujemy (2), to wobec tego, że górna granica całki jest x_0, nie tylko trzeba różniczkować funkcję podcałkową, ale nadto nastąpi wyraz dodatkowy: trzeba podstawić górną granicę w – funkcję podcałkową; ale wtedy będzie 0 w mianowniku, więc pochodnej obliczyć się nie da. Astronom francuski Puiseux w r. 1850 podstawił zmienną $z = z_0 w$.

Będzie wtedy

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{\psi'(z_0 w) z_0}{\sqrt{z_0 - z_0 w}}\,\mathrm{d}w = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{\psi'(z_0 w)\sqrt{z_0}}{\sqrt{1-w}}\,\mathrm{d}w \quad .$$

Teraz można różniczkować:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z_0} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{\psi''(z_0 w) w \sqrt{z_0} + \psi'(z_0 w) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_0}}}{\sqrt{1-w}} \, \mathrm{d}w =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{\psi''(z_0 w) w z_0 + \frac{\psi'(z_0 w)}{2}}{\sqrt{z_0 - z_0 w}} \, \mathrm{d}w \ .$$

Wracamy do zmiennej całkowania z, kładąc

$$z_0 w = z, \quad \mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}z}{z_0} \ .$$

Będzie

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z_0} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{z_0} \frac{z\psi''(z) + \frac{1}{2}\psi'(z)}{z_0 \sqrt{z_0 - z}} \, \mathrm{d}z = 0 \ .$$

Licznik funkcji podcałkowej musi być stale równy 0, bo gdyby był zmiennego znaku, to biorąc z_0 bliskie 0, tak aby między 0 i z_0 był stałego znaku, otrzymalibyśmy $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z_0} \neq 0$. Jest więc:

$$z\psi''(z) + \frac{1}{2}\psi'(z) = 0, \quad \text{stąd} \quad \frac{\psi''}{\psi'} + \frac{1}{2z} = 0$$

przeto

$$\ln \psi' + \frac{1}{2} \ln z = const, \qquad \sqrt{z} \cdot \psi' = C, \qquad \psi'(z) = \frac{C}{\sqrt{z}}, \qquad \psi(z) = 2C\sqrt{z} \ .$$

Lecz wobec $\psi(z) = x$, będzie

$$x = 2C\sqrt{z}, \qquad z = \frac{x^2}{4C^2}, \qquad \text{czyli} \qquad \varphi(x) = \frac{x^2}{4C^2}, \qquad F = -\varphi'(x) = -\frac{x}{2C} \ .$$

A wiec siła jest proporcjonalna do odległości od punktu docelowego (znak "$-$" bo musi być skierowana ku 0).

3. Rozwiązanie problemu

Zagadnienia tautochrony tj. jaka krzywa jest tautochroną, jeżeli siłą działającą jest siła ciężkości. Niech $y = f(x)$, punktem tautochronizmu jest początek układu.

Rozważa się ruch po krzywej w zależności od długości łuku, który punkt materialny przebywa. Wobec tego zagadnienie jest jednoparametrowe, zmienną niezależną jest łuk, więc zależność siły od łuku musi być taka sama jak zależność siły od odciętej w przypadku ruchu po prostej. Siła ciężkości jest mg, lecz w ruchu po krzywej wchodzi tylko stycznościowa składowa siły tj. $-mg\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$. A więc równanie ruchu będzie

$$-mg\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=-k^2s$$

k^2 stała dodatnia

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\frac{k^2}{mg}\,s\ .$$

Oznaczmy

$$\frac{k^2}{mg}=h^2\ ,$$

będzie więc $y=\frac{h^2}{2}\,s^2$ (stała całkowania równa 0, bo dla $s=0$ jest $y=0$). Stąd

$$s=\frac{\sqrt{2y}}{h},\quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}=\frac{\sqrt{2}}{h}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}=\frac{1}{h\sqrt{2y}},\quad 1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2=\frac{1}{2h^2y}\ ,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2=\frac{1-2h^2y}{2h^2y},\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{1-2h^2y}{2y}},\qquad \mathrm{d}x=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{1-2h^2y}{2y}}\,\mathrm{d}y\ .$$

Zmienimy zmienną: $2h^2y=\sin^2\alpha$, stąd

$$y=\frac{\sin^2\alpha}{2h^2} \tag{3}$$

$$2h^2\mathrm{d}y=2\sin\alpha\cos\alpha\ \mathrm{d}\alpha,\qquad \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2h^2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}}\cdot\frac{1}{h^2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\ \mathrm{d}\alpha$$

$$\mathrm{d}x=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{h}\cdot\sin\alpha\cos\alpha\ \mathrm{d}\alpha=\frac{1}{h}\cos^2\alpha\ \mathrm{d}\alpha,\qquad \mathrm{d}x=\frac{1}{2h}(1+\cos 2\alpha)\ \mathrm{d}\alpha$$

$$x=\frac{1}{2h}\left(\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)\ . \tag{4}$$

Oznaczmy $2\alpha=u$, wtedy

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{4h}(u+\sin u)\\ y&=\frac{1}{4h^2}(1-\cos u)\end{aligned}\right\}\ . \tag{5}$$

To są równania parametryczne cykloidy.

Okazało się, że Huyghens, który twierdził, że tautochrona jest cykloidą, wcale nie podał dowodu, że krzywa tauchrona musi być cykloidą, gdyż ten dowód został podany dopiero w XIX wieku. On tylko sprawdził, że ruch po cykloidzie pod działaniem siły ciężkości jest tautochroniczny, a więc nie było wiadomo, czy nie ma jeszcze innych tautochron prócz cykloidy.

4. Konkluzja

Huyghens podał ciekawe zastosowanie samego odkrycia.

Niech punkt M będzie zawieszony na nici, która przy kołysaniu nawija się na łuki cykloidy. Wtedy krzywa, po której porusza się M, jest ewolwentą cykloidy. Lecz wiadomo, że ewolwentą cykloidy jest cykloida. A więc punkt materialny M porusza się pod działaniem siły ciężkości po cykloidzie. Zatem ruch jego jest tautochroniczny, czyli bez względu na to, czy go więcej czy mniej wychylimy, okres wahań będzie taki sam. W ten sposób Huyghens wynalazł wahadło ściśle izochroniczne. Wiadomo zaś, że wahadło zwykłe fizyczne jest tylko w przybliżeniu izochroniczne, gdy wychylenia nie są duże. Oczywiście jest to rezultat teoretyczny idealny. W praktyce trzeba by zastąpić nić taśmą nawijającą się na walce cykloidalne, więc musiałoby wystąpić tarcie niweczące tautochroniczność i izochroniczność okresów wahań.

5. Możliwe uogólnienia

Rozważania były przeprowadzone przy założeniu, że siła zależy tylko od położenia punktu materialnego. Appel w swojej książce wspomina, że Lagrange rozważał zagadnienie tautochrony przy założeniu, że siła zależy od położenia i od chwilowej prędkości. Nie podaje jednak żadnych wyników, więc nie wiadomo, co było uzyskane i czy była założona jakaś specjalna zależność od prędkości, co jak sadzę, jest bardziej prawdopodobne niż rozważanie zagadnienia bez określenia jaka ma być ta zależność. Takie zagadnienie byłoby chyba bardzo trudne nie tylko wówczas dla Lagrange'a ale i teraz.

Literatura

[1] Bobik E. (1991). *Magia cykloid*. Delta 7, 1–16.

[2] Dubiel St., Homsiuk A. (1991). *Rozwiązanie zadania o brachistrochronie metodą maximum Pontrjagina*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, vol. 29, no 1, 153–160.

[3] Górecki H. (2005). *Od poszukiwania ekstremum funkcji do znajdowania sterowania optymalnego*. Computer Methods and Systems, vol. I, Kraków, plenary lectures.

[4] Górnicki J., *Okruchy Matematyki*. Warszawa, PWN, (2009), 216–222.

[5] Juszkiewicz A.P. (1976). *Historia matematyki*. T.II, Warszawa, PWN, 204–206.

[6] Kordos M., *Tautochrona*, odczyt, opracowanie B. Leciejewska, Szkoła Geometrii, Odczyty Kaliskie.

[7] Sussman H.J., Willems J.C. (1997). *History of Optimal Control*. IEEE Control Systems,.