

Wojciech Mitkowski\*, Krzysztof Oprzędkiewicz\*

## **Regulator minimalnoenergetyczny dla obiektu II rzędu o niepewnych parametrach**

### **1. Uwagi wstępne**

W pracy rozważono problem syntezy zamkniętego układu regulacji dla obiektu II rzędu o niepewnych parametrach, często spotykanego w praktyce przemysłowej (serwomechanizmy). Regulator ma zapewnić przeprowadzenie obiektu ze stanu początkowego do końcowego (zazwyczaj zerowy punkt równowagi) przy możliwie małym zużyciu energii potrzebnej do tego celu i w możliwie krótkim czasie w całym obszarze niepewnych parametrów obiektu. W celu syntezy regulatora należy skonstruować wskaźnik jakości, opisujący zużycie energii podczas sterowania. Wskaźnik ten jest funkcją niepewnych parametrów obiektu oraz parametrów regulatora.

W pracy omówiono następujące zagadnienia:

- Rozważany obiekt regulacji o niepewnych parametrach.
- Zamknięty układ regulacji dla obiektu.
- Funkcje kosztu i zadanie syntezy regulatora.
- Przykład.
- Uwagi końcowe.

### **2. Rozważany obiekt regulacji**

Rozważany obiekt regulacji jest opisany w najbardziej ogólnym przypadku liniowym równaniem różniczkowym II rzędu o niepewnych parametrach, przy czym do opisu zastosujemy macierzowe równanie różniczkowe o następującej postaci:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(q)x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1}$$

---

\* AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki, Katedra Automatyki

W równaniu (1)  $x(t) \in \mathbf{R}^2$ ,  $u(t) \in \mathbf{R}$ ,  $y(t) \in \mathbf{R}$ . Rozważania ograniczymy do przedziałowej macierzy stanu systemu (macierz Frobeniusa):

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -q \end{bmatrix} \quad (2)$$

Element  $q$  macierzy stanu (2) jest dodatnią liczbą przedziałową:

$$q = [\underline{q}, \bar{q}], \quad 0 < \underline{q} < \bar{q} \quad (3)$$

Zakładamy, że macierze sterowania i wyjścia są dokładnie, przy czym

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0] \quad (4)$$

Transmitancja operatorowa  $G(s, q) = C(sI - A(q))^{-1}B$  obiektu wyznaczona na podstawie (1)–(6) jest funkcją niepewnego parametru obiektu i ma następującą postać:

$$G(s, q) = \frac{1}{s^2 + qs} \quad (5)$$

Obiekt opisany przez równości (1)–(4) lub (5) i (3) reprezentuje dużą klasę rzeczywistych obiektów regulacji, do których zaliczamy np. serwomechanizmy i pewnego typu napędy elektryczne.

Widmo systemu może być wyznaczone jako zbiór rozwiązań przedziałowego równania charakterystycznego systemu o następującej postaci:

$$\det(\lambda I - A(q)) = \lambda^2 + q\lambda = 0 \quad (6)$$

Widmo systemu (5) rozważanego w pracy zawiera dwie wartości własne (zobacz (6)): jedna z nich jest równa zero, a druga jest równa wprost niepewnemu parametrowi obiektu:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -q \end{aligned} \quad (7)$$

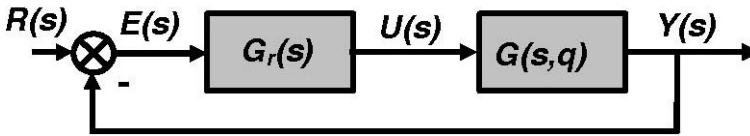
Widmo przedziałowe rozważanego systemu jest zbiorem obu przedziałowych wartości własnych opisanych przez (7), przy czym

$$\Lambda(q) = \bigcup_{i=1}^2 \lambda_i(q) \quad (8)$$

W przypadku rozważanego obiektu jedna z wartości własnych jest równa zero, a druga jest wprost równa niepewnemu parametrowi (zobacz (3)).

### 3. Zamknięty układ regulacji dla obiektu

Zamknięty układ regulacji dla rozważanego obiektu pokazany jest na rysunku 1.



Rys. 1. Zamknięty układ regulacji

W rozważanym układzie regulacji obiekt jest opisany transmitancją  $G(s, q)$  (5), a regulator jest opisany transmitancją  $G_r(s)$ . W dalszej części pracy rozważymy regulator proporcjonalny.

Dla układu pokazanego na rysunku 1 można podać powszechnie znane podstawowe zależności pomiędzy transformacjami Laplace'a: wielkości regulowanej  $Y(s)$ , sterowania  $U(s)$ , uchybu regulacji  $E(s)$  oraz wartości zadanej  $R(s)$ . Są one opisane następującymi równościami:

$$Y(s) = \frac{G(s, q)G_r(s)}{1 + G(s, q)G_r(s)} R(s) \quad (9)$$

$$U(s) = \frac{G_r(s)}{1 + G(s, q)G_r(s)} R(s) \quad (10)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s, q)G_r(s)} R(s) \quad (11)$$

Założmy, że jako regulator zastosowany został regulator proporcjonalny o wzmacnieniu  $k_r$ , a na wejście układu regulacji podano skok jednostkowy wartości zadanej, co implikuje, że  $R(s) = 1/s$ . Wtedy po uwzględnieniu (5) równania (9)–(11) przyjmą postać:

$$Y(s) = \frac{k_r}{s(s^2 + qs + k_r)} \quad (12)$$

$$U(s) = \frac{k_r(s + q)}{s^2 + qs + k_r} \quad (13)$$

$$E(s) = \frac{s + q}{s^2 + qs + k_r} \quad (14)$$

Zakładamy, że wartość wzmocnienia regulatora jest zdeterminowana przez techniczne możliwości jego realizacji, co można opisać następująco:

$$k_r \in K_r = \left\{ k_r \in R : 0 < k \leq k_r^{\max} \right\} \subset R^+ \quad (15)$$

Na podstawie (12), (13) lub (14) można stwierdzić, że rozważany układ regulacji dla dodatnich wartości niepewnego parametru  $q$  oraz wzmocnienia regulatora  $k_r$  (a tylko takie wartości mają sens fizyczny) jest układem strukturalnie stabilnym.

#### 4. Funkcje kosztu i zadanie syntezy regulatora

Funkcja kosztu dla rozważanego układu sterowania zależy zarówno od niepewnych parametrów obiektu, jak i parametrów regulatora. W rozważanym przypadku powinna ona opisywać zużycie energii podczas sterowania oraz czas regulacji. Dla ustalonej wartości niepewnego parametru obiektu  $q$  może ona być zapisana następująco:

$$I(q, k_r) = w_1 \int_0^{\infty} u^2(t) dt + w_2 T_r \quad (16)$$

W (16)  $u(t)$  oznacza sterowanie,  $T_r$  oznacza czas regulacji (czas dojścia w pobliże zerowego punktu równowagi – zwykle praktyk ustala  $\Delta > 0$  takie, że  $|e(t)| \leq \Delta$  oznacza praktyczne dojście do zera), a  $w_1$  oraz  $w_2$  oznaczają odpowiednie współczynniki wagowe.

W rozważanym wypadku konstrukcja funkcji kosztu musi uwzględniać niepewność parametrów obiektu. Niepewność parametrów obiektu może być uwzględniona z wykorzystaniem dwóch podejść.

Pierwsze podejście polega na syntezie regulatora dla „najgorszego przypadku” – regulator powinien zminimalizować maksymalną wartość funkcji kosztu w całym rozważanym obszarze niepewnych parametrów obiektu. W takiej sytuacji funkcja kosztu może być opisana równaniem (17).

$$I_{\max}(q, k_r) = w_1 \max_Q \left( \int_0^{\infty} u^2(t) dt \right) + w_2 \max_Q(T_r) \quad (17)$$

W (17)  $u(t)$  oznacza sterowanie,  $Q$  oznacza obszar niepewnych parametrów,  $T_r$  oznacza czas regulacji, a  $w_1$  oraz  $w_2$  oznaczają odpowiednie współczynniki wagowe.

W drugim przypadku regulator powinien zminimalizować wypadkową funkcję kosztu wyznaczoną jako „środek ciężkości” funkcji kosztu w całym obszarze niepewnych parametrów obiektu regulacji, która może być zapisana w postaci (18):

$$I_{sr}(q, k_r) = w_3 \frac{1}{\|Q\|} \int_Q \int_0^{\infty} u^2(t) dt + w_4 \frac{1}{\|Q\|} \int_Q T_r \quad (18)$$

W (18)  $u(t)$  oznacza sterowanie,  $Q$  oznacza obszar niepewnych parametrów,  $T_r$  oznacza czas regulacji, a  $w_3$  oraz  $w_4$  oznaczają odpowiednie współczynniki wagowe.

Na podstawie wcześniejszych rozważań zadanie konstrukcji optymalnego regulatora proporcjonalnego dla rozważanego obiektu o niepewnych parametrach można sformułować następująco:

*Spośród wszystkich regulatorów o wzmacnieniu  $k_r$ , należy wybrać regulator o takim wzmacnieniu  $k_r^0$ , dla którego funkcja kosztu  $I_{max}$  lub  $I_{sr}$  opisana przez (17) lub (18) osiągnie wartość minimalną:*

$$I(q, k_r^0) \leq I(q, k_r), \quad k_r \in K_r = \left\{ k_r \in R : 0 < k \leq k_r^{\max} \right\} \subset R^+ \quad (19)$$

Powyższe zadanie dla podanego zakresu niepewności parametru obiektu  $q$  może zostać rozwiązane symulacyjnie zużyciem MATLABA. Zostanie to pokazane poniżej.

#### 4.1. Oszacowanie składników funkcji kosztu

Każda z funkcji kosztu (16), (17) lub (18) zawiera dwa składniki, z których pierwszy opisuje zużycie energii podczas sterowania, a drugi – czas regulacji. Składnik związany ze zużyciem energii może być wyznaczony analitycznie na podstawie równania (13) z użyciem znanych wzorów podanych w wielu pracach, natomiast analityczne wyznaczenie wartości czasu regulacji na podstawie równania (14) w przypadku rozważanego obiektu o niepewnych parametrach jest trudne.

Składnik funkcji kosztu (16), (17) lub (18) związany bezpośrednio ze zużyciem energii ma w obu przypadkach postać:

$$I_u(q, k_r) = \int_0^{\infty} u^2(t) dt \quad (20)$$

Całka (20) może być wyliczona analitycznie na podstawie równania (13) z użyciem znanych wzorów podanych np. w pracy [2]. W rozważanym wypadku jest ona równa:

$$I_u(q, k_r) = \frac{k_r^2 + k_r q}{2q} \quad (21)$$

Na podstawie (21) można zauważyć, że zużycie energii:

- rośnie wraz ze wzrostem wartości wzmacnienia regulatora w funkcji kwadratowej,
- jest funkcją wymierną niepewnego parametru obiektu  $q$ .

Z kolei analityczne wyznaczenie czasu regulacji, który występuje w drugim ze składników, jest trudne i z tego względu poniżej zaprezentowana zostanie przybliżona analiza zależności wartości tego wskaźnika od niepewnego parametru obiektu oraz wzmacnienia

regulatora, przy czym wyniki tej analizy pozwolą na znaczne uproszczenie syntezy regulatora.

Transformata Laplace'a uchybu regulacji przy wymuszeniu skokiem jednostkowym wartości zadanej jest określona zależnością (14) i stąd przebieg czasowy uchybu regulacji w rozważanym układzie może być określony jako:

$$e(t) = L^{-1} \{E(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{s + q}{s^2 + qs + k_r} \right\} \quad (22)$$

Czas regulacji  $T_r$  jest to czas, po jakim moduł uchybu regulacji jest w sposób trwały mniejszy od pewnej granicznej wartości  $\Delta$ . Można to zapisać następująco:

$$|e(t)|_{t \geq T_r} < \Delta \quad (23)$$

W (23)  $e(t)$  oznacza uchyb regulacji (zob. również rys. 1) opisany przez (14) i (22). Wykorzystanie zależności do analitycznego wyznaczania czasu regulacji jest kłopotliwe, natomiast została ona zastosowana do numerycznego wyznaczania czasu regulacji z użyciem środowiska MATLAB, co zostanie omówione w przykładzie.

Zauważmy, że przebieg czasowy uchybu  $e(t)$  może mieć różną postać zależności od wartości niepewnego parametru obiektu  $q$  oraz wzmocnienia regulatora  $k_r$ . Dla pewnych wartości tych parametrów w układzie wystąpią oscylacje, a dla innych te oscylacje nie wystąpią i podczas analizy rozważanego układu nie można przyjąć żadnego ścisłego założenia na temat ich występowania lub nie. Warunek na wystąpienie oscylacji jest opisany przez (24):

$$q < 2\sqrt{k_r} \quad (24)$$

W przypadku gdy warunek na wystąpienie oscylacji jest spełniony, to ogólna postać funkcji czasowej  $e(t)$  jest równa:

$$e(t) = e^{-0,5qt} (\cos \omega t + a \sin \omega t) \quad (25)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{0,75q^2 + k_r} \\ a &= \frac{q}{2\omega} \end{aligned} \quad (26)$$

Na podstawie (25) oraz (26) można zauważyć, że wartość czasu regulacji maleje w funkcji wzmocnienia regulatora i jest to zgodne z intuicyjnymi oczekiwaniami w przypadku rozważanego systemu sterowania.

Z kolei w przypadku, gdy warunek (24) nie jest spełniony, to przebieg czasowy uchybu jest opisany następująco:

$$e(t) = \frac{\lambda_{z1} - q}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} e^{-\lambda_{z1}t} + \frac{q - \lambda_{z2}}{\lambda_{z1} - \lambda_{z2}} e^{-\lambda_{z2}t} \quad (27)$$

gdzie  $\lambda_{z1}$  oraz  $\lambda_{z2}$  są wartościami własnymi układu zamkniętego, określonymi następująco:

$$\begin{aligned} \lambda_{z1} &= -0,5 \left( q + \sqrt{q^2 - 4k_r} \right) \\ \lambda_{z2} &= -0,5 \left( q - \sqrt{q^2 - 4k_r} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Na podstawie równań (25) oraz (27) można zauważyć następujące zależności:

- zwiększenie wartości wzmocnienia  $k_r$  powoduje skrócenie czasu regulacji, przy czym zwiększenie wzmocnienia powodujące zmianę warunku (24) jest przyczyną powstania oscylacji w układzie,
- zwiększenie wartości niepewnego parametru obiektu  $q$  powoduje wydłużenie czasu regulacji.

Podsumowując powyższe rozważania, można oczekiwać, że funkcja kosztu będąca sumą zużycia energii i czasu regulacji posiada minimum w obrębie zbioru  $q \times K_r$ , gdzie  $q$  jest liczbą przedziałową określającą niepewny parametr obiektu regulacji, a  $K_r$  jest zbiorem wartości współczynnika wzmocnienia regulatora możliwych do technicznej realizacji.

Dodatkowo można zauważyć, że funkcja kosztu (18) opisująca „najgorszy przypadek” może być wyznaczona wprost jako funkcja kosztu (16) dla górnej granicy wartości niepewnego parametru  $q$ , co można zapisać następująco:

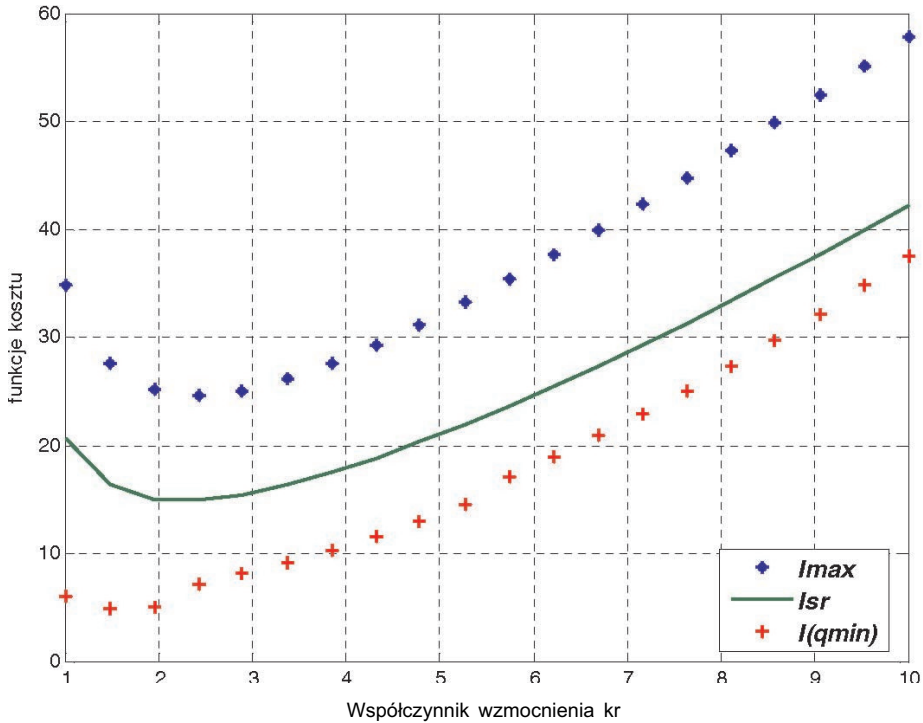
$$I_{\max}(q, k_r) = I(\bar{q}, k_r) \quad (29)$$

## 5. Przykład

Jako przykład rozważmy obiekt opisany równaniem stanu (1)–(4) lub transmitancją (5), którego niepewny parametr jest opisany liczbą przedziałową  $q$  równą:  $q = [2,0; 10,0]$ . Dalej założmy, że wzmocnienie regulatora możliwe do technicznej realizacji zawiera się w przedziale  $K_r$  równym:  $K_r = [0,5; 10,0]$ .

Dla powyższego układu wyznaczono przebiegi funkcji kosztu (16) dla minimalnej wartości niepewnego parametru obiektu  $q$  oraz obu funkcji kosztu (17) i (18). Przyjęto wartości współczynnika wzmocnienia  $k_r$  zawierającego się w całym przedziale  $K_r$  oraz oba współczynniki wagowe  $w_1$  oraz  $w_2$  równe jeden. Przebiegi wszystkich trzech funkcji kosztu

są pokazane na rysunku 2. Składową związaną ze zużyciem energii wyznaczano analitycznie z użyciem wzoru (21), czas regulacji  $T_r$  wyznaczano numerycznie z użyciem wzoru (23), przy  $\Delta = 0,05$ .



**Rys. 2.** Przebiegi rozważanych funkcji kosztu (17) i (18) oraz funkcji kosztu (16) dla minimalnej wartości niepewnego parametru obiektu  $q$

Dla funkcji kosztu pokazanych na rysunku 2 wyznaczono optymalne wartości współczynnika wzmocnienia regulatora. Do ich wyznaczenia wykorzystano funkcję matlabowską  $fminbnd$ . Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 1.

**Tabela 1**

Wartości wzmocnienia  $k_r^0$  minimalizujące funkcje kosztu

Funkcja kosztu	Optymalna wartość $k_r^0$	$I(k_r^0)$
$I_{max}(q, k_r)$ opisana przez (17)	2,4129	24,5557
$I_{sr}(q, k_r)$ opisana przez (18)	2,3128	14,9108
$i(q)$ opisana przez (16)	1,6456	4,8726



Na podstawie przebiegów na rysunku 2 oraz wyników zamieszczonych w tabeli 1 można zauważyć, że:

- Przebiegi wszystkich trzech funkcji kosztu są zbliżone do siebie.
- Wszystkie rozważane funkcje kosztu mają minimum w obrębie dopuszczalnego zakresu wartości współczynnika  $K_r$  dla obu skrajnych wartości niepewnego parametru  $q$ .
- W przypadku funkcji uśrednionej (18) oraz funkcji „najgorszego przypadku” opisanej przez (17) i (29) lokalizacja tego minimum jest stosunkowo mało wrażliwa na niepewność parametru obiektu  $q$ .

## 6. Uwagi końcowe

Uwagi końcowe do pracy można sformułować następująco:

- Zaprezentowana w pracy metoda syntezy regulatora optymalnego może być zastosowana dla dużej klasy rzeczywistych obiektów regulacji niepewnych parametrach, do których należą np. napędy elektryczne i serwomechanizmy.
- W przypadku niepewności parametru obiektu rozważanej w pracy zastosowanie dwóch różnych funkcji kosztu daje bardzo zbliżone wyniki.
- Otrzymane wyniki numeryczne są zgodne z intuicją i oczekiwaniami, gdyż w każdej rzeczywistej sytuacji zwiększenie wzmocnienia regulatora powoduje zwiększenie zużycia energii w układzie.

*Praca została częściowo sfinansowana ze środków NCN, umowa nr 6693/B/T02/2011/40.*

## Literatura

- [1] Athans M., Falb P.L., *Sterowanie optymalne*. WNT, 1966.
- [2] Byrski W., *Obserwacja i sterowanie w systemach dynamicznych*. Wyd. AGH, 2007.
- [3] Mitkowski W., *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, 1991.
- [4] Mitkowski W., Oprędkiewicz K., *A sample time assign for a discrete interval parabolic system with the two-dimensional uncertain parameter space*. Systems Science, vol. 30, no. 1, 2004, 43–50,
- [5] Mitkowski W., Oprędkiewicz K., *Dyskretne sterowanie minimalnoenergetyczne obiektem II rzędu o niepewnych parametrach*. Referat przyjęty do ogłoszenia na KKA 11, 2011 (w druku).
- [6] Oprędkiewicz K., *Praktyczne sterowanie systemów dynamicznych z widmem punktowym parametrami przedziałowymi*. UWND AGH, Kraków 2008.