AUTOMATYKA • 2011 • Tom 15 • Zeszyt 2

Tomasz Ambroziak*, Roland Jachimowski*

Wybrane aspekty zagadnienia okien czasowych w problemie trasowania pojazdów

1. Wprowadzenie

Minimalizacja kosztów transportu od/do klienta jest zasadniczym celem optymalizacji transportu. Wymierne efekty minimalizacji kosztów transportu najszybciej uzyskuje się przez właściwe zaplanowanie m.in. kolejności obsługi poszczególnych klientów. Problem ten jest przedmiotem badań naukowców od kilkudziesięciu lat i nosi nazwę problemu trasowania pojazdów. Jest on rozwinięciem jednego z najstarszych problemów optymalizacyjnych na sieciach – problemu komiwojażera.

W ogólnym ujęciu problem komiwojażera polega na odwiedzeniu dokładnie raz każdego z wybranych punktów sieci i powrocie do punktu, z którego rozpoczęto podróż. Znane są koszty przejazdu między każdą parą punktów sieci. Należy zaplanować komiwojażerowi drogę przejazdu w taki sposób, aby mógł on odwiedzić każdy punkt dokładnie raz i całkowity koszt podróży był możliwie najmniejszy. Po raz pierwszy problem ten został przedstawiony przez W.R. Hamiltona w 1959 roku. Szczegółowo problem komiwojażera opisany został w pracach [1, 11]. Niestety problem komiwojażera nie podejmuje podstawowych (liczba i ładowność pojazdów wykorzystywanych do realizacji transportu), a także dodatkowych aspektów rzeczywistych problemów optymalizacji transportu, wśród których wyróżnia się chociażby [4]:

- Niesymetryczność kosztów transportu, czyli koszt transportu towaru z punktu **A** do punktu **B** niekoniecznie musi być równy kosztowi transportu z punktu **B** do punktu **A**.
- Charakterystyki pojazdów mogą dostarczać różnego rodzaju ograniczeń oprócz podstawowego ograniczenia, jakim jest ładowności pojazdów. Ograniczenia te mogą dotyczyć chociażby liczby kursów wykonywanych przez pojazdy.
- Całkowity czas trwania trasy danego pojazdu może być ograniczony dobowym czasem pracy kierowcy.
- Liczba baz magazynowych obsługujących dany rejon. Dotyczy to sytuacji, w których istnieje wiele baz magazynowych obsługujących dany rejon i dodatkowo każda z tych baz magazynowych może dysponować swoją własną flotą pojazdów.

* Politechnika Warszawska, Zakład Logistyki i Systemów Transportowych, Wydział Transportu

- Zmieniająca się liczba pojazdów w problemach doboru pojazdów.
- Okna czasowe odbiorców(dostawców) rozumiane jako przedział czasu na dostawę lub odbiór ładunków.

Klasyczny problem trasowania pojazdów (czyli problem komiwojażera z ograniczeniami na liczbę pojazdów i ich ładowność) po raz pierwszy sformułowali przez G.B. Dantzig i J. Ramser w 1959 w pracy [3]. Była to pierwsza praca, w której pojawiła się definicja problemu trasowania pojazdów (*Vehicle routing problem*). Wkrótce potem G. Clarke i J. Wright w pracy [2] zaprezentowali pierwszą heurystykę zachłanną, która okazała się być podstawą do dalszych badań nad trasowaniem pojazdów dla następnych pokoleń naukowców. Dała tym samym początek algorytmom przybliżonym będącym modyfikacjami tej metody i nazywanym w literaturze *heurystykami pierwszej generacji*. Niestety dość szybko okazały się być one mało efektywne w przypadku rozwiązywania rzeczywistych, kompleksowych problemów. Dopiero *druga generacja heurystyk* oparta na programowaniu matematycznym pozwoliła na rozwiązywanie praktycznych problemów. Szczegółowe informacje na temat heurystyk drugiej generacji można znaleźć w pracach [6, 7].

Trzecią generację heurystyk stosowanych do rozwiązywania problemu trasowania pojazdów stanowią metaheurystyki, czyli heurystyki stosowane „piętrowo". Są one tzw. heurystykami nadrzędnymi, sterującymi w procesie iteracyjnego przeszukiwania heurystykami niższego rzędu. Wśród najpopularniejszych metod metaheurystycznych stosowanych do rozwiązywania problemu trasowania pojazdów wyróżnia się metody genetyczne, metody tabu-search oraz metody symulowanego wyżarzania. Kompleksowego przeglądu metaheurystycznych metod trasowania pojazdów dokonano w pracy [8].

2. Problem trasowania pojazdów z oknami czasowymi w literaturze

Problem trasowania pojazdów uwzględniający dodatkowy aspekt rzeczywistości w postaci okien czasowych nosi w literaturze miano problemu trasowania pojazdów z oknami czasowymi (*Vehicle Routing Problem with Time Windows – VRPTW*). Podobnie jak problem trasowania pojazdów tak i *VRPTW* jest zagadnieniem NP-trudnym, tzn. nie istnieją dla tego zagadnienia algorytmy dokładne rozwiązujące ten problem w czasie zależącym wielomianowo od liczby analizowanych danych. Np-trudności problemu *VRPTW* dowiedziono w pracy [13]. Pierwsze publikacje poruszające problem trasowania pojazdów z oknami czasowymi dotyczyły analizy konkretnych przypadków [12, 9].

VRPTW polega on na zaplanowaniu zbioru tras o minimalnym koszcie zaczynających się i kończących w bazie magazynowej dla floty pojazdów obsługującej klientów o znanym zapotrzebowaniu. Dodatkowo zakłada się, że każdy klient może zostać obsłużony tylko przez jeden pojazd przy założeniu nieprzekroczenia ładowności pojazdu. Obsługa każdego klienta musi następować w jego oknie czasowym, czyli w przedziale czasu, w którym dopuszcza on rozładunek pojazdu. Są to typowe problemy, z jakim muszą mierzyć się przedsiębiorstwa świadczące kompleksowe usługi transportowe, którym zależy na układaniu możliwie rzetelnych planów dostaw.

Na potrzeby obliczania kosztów ewentualnych nieprawidłowości w terminowości dostaw w literaturze wprowadzono pojęcia twardych i miękkich okien czasowych. W przypadku twardych okien czasowych zbyt wczesna próba obsługi klienta (przed rozpoczęciem jego okna czasowego) skutkuje koniecznością oczekiwania pojazdu na rozładunek aż do momentu rozpoczęcia okna czasowego klienta. Czas oczekiwania pojazdu na rozładunek utożsamiany jest z umownym kosztem ponoszonym przez przewoźnika za nieefektywne wykorzystanie pojazdu oraz czasu pracy kierowcy, lecz koszt ten nie jest uwzględniany w funkcji kosztów. Natomiast próba obsługi klienta po zakończeniu jego okna czasowego (czyli w przypadku, kiedy pojazd spóźni się na rozładunek) skutkuje całkowitym brakiem możliwości rozładunku pojazdu. Tego typu okna czasowe w rzeczywistości dotyczą m.in. dostaw bankowych, czy pocztowych i w literaturze zarówno polsko-, jak i obcojęzycznej poświęcane jest im najwięcej miejsca.

W przypadku miękkich okien czasowych dopuszczalny jest rozładunek pojazdu po zakończeniu okna czasowego pod warunkiem uiszczenia przez przewoźnika umownej kary za spóźnienie obsługi. W sytuacji kiedy pojazd pojawi się u klienta w celu jego obsługi przed rozpoczęciem czasowego klienta, podobnie jak to ma miejsce w przypadku twardych okien czasowych, zobowiązany jest do oczekiwania na obsługę aż do momentu rozpoczęcia się okna czasowego obsługiwanego klienta [10].

Zatem miękkie ona czasowe są niejako rozwinięciem twardych okien czasowych o dodatkowy koszt spóźnienia obsługi i oczekiwania na rozładunek [14]. Ten koszt w literaturze określany jest jako kara za nieterminową obsługę klienta. Funkcja kar w zadaniu optymalizacyjnym dla miękkich okien czasowych uzależniona jest od momentu rozpoczęcia obsługi danego klienta i przyjmuje następującą postać:

$$k_i(m_i) = \begin{cases} kp(m_i), & \text{dla} \quad m_i < a_i \\ 0 & \text{dla} \quad m_i \in [a_i, b_i] \\ ks(m_i), & \text{dla} \quad m_i > b_i \end{cases}$$

gdzie:

$k_i\,(m_i)$ – funkcja kary dla i-tego klienta,

$kp\,(m_i)$ – funkcja kary za przedwczesna próbę obsługi i-tego klienta,

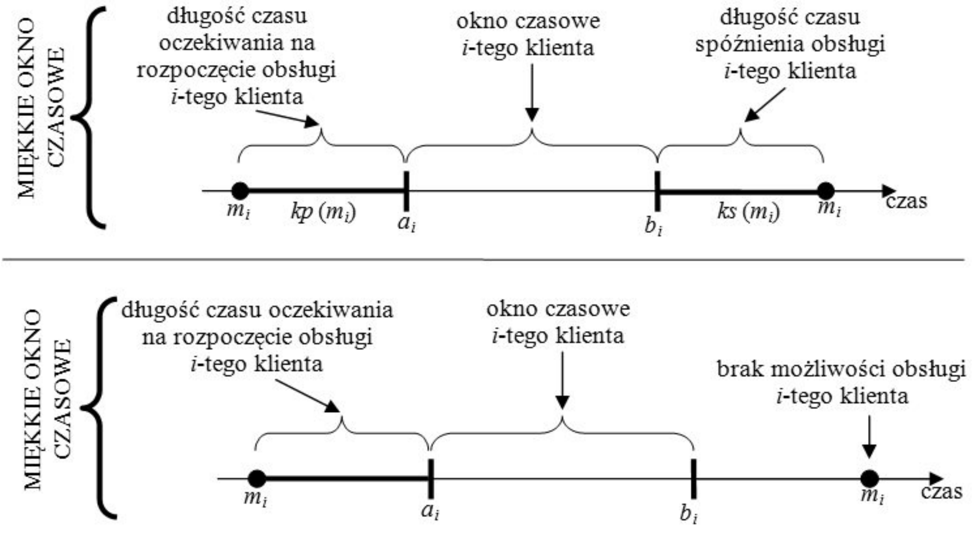
$ks\,(m_i)$ – funkcja kary za spóźnienie obsługi i-tego klienta,

m_i – moment przyjazdu do i-tego klienta,

a_i – początek okna czasowego i-tego klienta,

b_i – koniec okna czasowego i-tego klienta.

Schematycznie specyfikę twardych i miękkich okien czasowych w problemie trasowania pojazdów przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Ilustracja twardych i miękkich okien czasowych w problemie trasowania pojazdów

3. Sformułowanie problemu trasowania pojazdów z twardymi i miękkimi oknami czasowymi

Problemem rozpatrywanym w niniejszym artykule jest optymalizacja planów zwózki/rozwózki towarów od/do klientów opatrzonych znanym zapotrzebowaniem na przewóz oraz przedziałami czasu na ich obsługę (oknami czasowymi). Celem referatu jest oddzielne wyznaczenie optymalnych planów obsługi klientów z twardymi oknami czasowymi i oddzielnie planów obsługi klientów z miękkimi oknami czasowymi.

Na potrzeby realizacji założonego celu referatu sformułowano dwukryterialne zadania optymalizacyjne zarówno dla przypadku z twardymi, jak i miękkimi oknami czasowymi

W przypadku twardych okien czasowych jedna funkcja kryterium minimalizuje koszty realizacji transportu, a druga minimalizuje łączny czasu trwania wykonywanych przez pojazdy tras. W przypadku miękkich okien czasowych na koszty realizacji transportu dodatkowo mają wpływ kary za nieterminową obsługę klientów.

4. Zadania optymalizacyjne w problemie trasowania pojazdów z twardymi i miękkimi oknami czasowymi

Na potrzeby formułowania zadań optymalizacyjnych dla problemów trasowania pojazdów z miękkimi oraz twardymi oknami czasowymi strukturę sieci dystrybucji towarów z bazy magazynowej do klientów przedstawiono w postaci skierowanego grafu $\boldsymbol{G}$:

$$\boldsymbol{G} = \langle \boldsymbol{W}, \boldsymbol{L} \rangle$$

gdzie:

$\boldsymbol{W}$ – zbiór węzłów sieci, przy czym zbiór numerów klientów $\boldsymbol{S}$ oraz zbiór numerów baz magazynowych $\boldsymbol{D}^v$ są podzbiorami zbioru $\boldsymbol{W}$

$\boldsymbol{L}$ – zbiór połączeń (łuków) pomiędzy wyróżnionymi węzłami sieci, przy $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$;

$$\boldsymbol{L} = \{(i,j) : (i,j) \in \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}\}$$

Wyróżnione węzły o interpretacji klientów i baz magazynowych, a także zbiór typów pojazdów wykorzystywanych do realizacji transportu scharakteryzowano w następujący sposób:

$\boldsymbol{S} = \{1, 2, \ldots i, \ldots j, \ldots S\}$ – zbiór numerów klientów, przy czym i – oznacza numer i-tego klienta (j oznacza j-tego klienta);

$\boldsymbol{D}^v = \{d_p^{\,v}, d_k^{\,v}\}$ – zbiór numerów baz magazynowych, przy czym $d_p^{\,v}$ – oznacza bazę magazynową, z której v-ty pojazd rozpoczyna obsługę klientów, a $d_k^{\,v}$ – oznacza bazę magazynową, do której v-ty pojazd wraca po zakończeniu obsługi klientów;

$\boldsymbol{V} = \{1, 2, \ldots v \ldots, V\}$ – zbiór numerów pojazdów, przy czym v – oznacza v-ty numer pojazdu wykorzystywanego do obsługi klientów.

Charakterystyki niezbędne do sformułowania zadania optymalizacyjnego dla rozpatrywanego problemu dotyczą:

– Kosztów przejazdu pomiędzy poszczególnymi węzłami struktury:

  $\boldsymbol{C} = \left[c_{i,j}^{v}\right]$ – macierz kosztów przejazdu v-tego pojazdu pomiędzy poszczególnymi węzłami struktury, $(i,j) \in \boldsymbol{L}$.

– Czasów przejazdu pomiędzy poszczególnymi węzłami struktury, czasu obsługi i-tego klienta, momentów przyjazdu do i-tego klienta oraz okna czasowego i-tego klienta

  $\boldsymbol{T} = \left[t_{i,j}\right]$ – macierz czasów przejazdu pomiędzy poszczególnymi węzłami struktury, $(i,j) \in \boldsymbol{L}$,

  t_i^v – czas obsługi v-tego pojazdu u i-tego klienta,

  $[a_i, b_i]$ – okno czasowe i-tego klienta.

– Kosztów kar za nieterminową obsługę i-tego klienta oraz wielkości naruszenia okien czasowych

  kp_i – koszt kary za przedwczesna próbę obsługi i-tego klienta,

  ks_i – koszt kary za spóźnienie obsługi i-tego klienta,

  ks_i – koszt kary za spóźnienie obsługi i-tego klienta,

  Δa_i – długość czasu oczekiwania na rozpoczęcie okna czasowego i-tego klienta,

  Δb_i – długość czasu spóźnienia obsługi i-tego klienta.

– Wielkości zapotrzebowania przewozowego i-tego klienta oraz ładowności pojazdów

  q_i – wielkość zapotrzebowania przewozowego i-tego klienta,

  Q^v – ładowność v-tego pojazdu.

Matematyczne sformułowanie ogólne rozpatrywanego problemu zawiera dwa rodzaje zmiennych decyzyjnych:

– Binarną zmienną decyzyjną określającą przebywanie pojazdu na danym łuku sieci dystrybucji postaci:

$$x_{i,j}^{v} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli łuk}(i,\ j) \text{ wchodzi do trasy } v\text{-tego pojazdu,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

– Zmienną decyzyjną o interpretacji momentu przyjazdu v-tego pojazdu do i-tego klienta postaci:

$$m_i^v, \quad i \in \boldsymbol{S}, v \in \boldsymbol{V}$$

4.1. Dwukryterialne zadanie optymalizacyjne problemu trasowania pojazdów z twardymi oknami czasowymi

Biorąc pod uwagę sformułowane w poprzednim rozdziale charakterystyki parametrów oraz zmiennych decyzyjnych zadania, należy wyznaczyć takie wartości zmiennych decyzyjnych, dla których funkcje kryterium postaci:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \sum_{v \in \boldsymbol{V}} \sum_{(i,j) \in \boldsymbol{L}} c_{ij}^v x_{ij}^v \rightarrow \min \tag{1}$$

oraz

$$\boldsymbol{H} = \sum_{v \in \boldsymbol{V}} \sum_{i \in \boldsymbol{S}} m_i^v \rightarrow \min \tag{2}$$

przyjmować będą wartość minimalną przy następujących ograniczeniach:

– Każdy dostawca może być obsługiwany tylko przez jeden pojazd

$$\forall i \in \boldsymbol{S} = \sum_{i \in \boldsymbol{S} \cup \{d_k^v\}} \sum_{v \in \boldsymbol{V}} x_{ij}^v = 1 \tag{3}$$

– Liczba pojazdów obsługujących dostawców nie może przekraczać liczby klientów

$$\sum_{j \in \boldsymbol{S}} \sum_{v \in \boldsymbol{V}} x_{d_k^v, j}^v \leq \boldsymbol{S} \tag{4}$$

– Każdy dostawca może wystąpić tylko raz jako węzeł początkowy trasy v-go pojazdu

$$\forall v \in \boldsymbol{V} \quad \sum_{j \in \boldsymbol{S} \cup \{d_k^v\}} x_{ij}^v = 1 \tag{5}$$

– Każdy dostawca może wystąpić tylko raz jako węzeł końcowy trasy v-go pojazdu

$$\forall v \in \boldsymbol{V} \quad \sum_{i \in \boldsymbol{S} \cup \{d_p^v\}} x_{ij}^v = 1 \tag{6}$$

– Kurs v-go pojazdu zaczyna się i kończy w bazie magazynowej

$$\forall v \in \boldsymbol{V}, \forall j \in \boldsymbol{S} \quad \sum_{i \in \boldsymbol{S} \cup \{d_p^v\}} x_{ij}^v - \sum_{i \in \boldsymbol{S} \cup \{d_k^v\}} x_{ji}^v = 0 \tag{7}$$

– Ładowność v-go pojazdu nie może zostać przekroczona

$$\forall v \in \boldsymbol{V} \quad \sum_{i \in \boldsymbol{S}} q_i \cdot \sum_{j \in \boldsymbol{S}} x_{ij}^v \le Q^v \tag{8}$$

– Ograniczenie na moment przybycia do klienta

$$\forall v \in \boldsymbol{V}, \forall (i,\ j) \in \boldsymbol{L} \quad x_{ij}^v (m_i^v + t_{ij} - m_j^v) \le 0 \tag{9}$$

– Moment przyjazdu v-go pojazdu do i-tego klienta musi się znaleźć w jego oknie czasowym

$$\forall v \in \boldsymbol{V}, \forall i \in \boldsymbol{S} \quad a_i \le m_i^v \le b_i \tag{10}$$

4.2. Dwukryterialne zadanie optymalizacyjne problemu trasowania pojazdów z miękkimi oknami czasowymi

W zadaniu optymalizacyjnym trasowania pojazdów z miękkimi oknami czasowymi w porównaniu do zadania z twardymi oknami czasowymi zmianie rozszerzeniu ulega funkcja kryterium. Zmieniają się również ograniczenia dotyczące czasu. Pozostałe ograniczeni, czyli dotyczące kolejności odwiedzania klientów, ładowności, liczby wykorzystywanych pojazdów oraz zmienne decyzyjne są takie same dla obu przypadków.

W związku z tym w celu rozwiązania zadania trasowania pojazdów z miękkimi oknami czasowymi należy wyznaczyć takie wartości zmiennych decyzyjnych, dla których funkcje kryterium postaci:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \sum_{v \in \boldsymbol{V}} \sum_{(i,j) \in \boldsymbol{L}} c_{ij}^v x_{ij}^v + \sum_{i \in \boldsymbol{S}} kp_i \cdot (a_i - m_i^v) + \sum_{i \in \boldsymbol{S}} ks_i \cdot (m_i^v - b_i) \to \min \tag{11}$$

oraz

$$\boldsymbol{H} = \sum_{v \in \boldsymbol{V}} \sum_{i \in \boldsymbol{S}} m_i^v \to \min \tag{12}$$

przyjmować będą wartość minimalną przy następujących ograniczeniach:

– Warunek na nieprzyjechanie pojazdu na rozładunek przed rozpoczęciem okna czasowego odbiorcy

$$\forall i \in \boldsymbol{S}, \forall v \in \boldsymbol{V} \quad \Delta a_i \geq a_i - m_i^v \tag{13}$$

– Warunek na niespóźnienie na rozładunek

$$\forall i \in \boldsymbol{S}, \forall v \in \boldsymbol{V} \quad \Delta b_i \geq m_i^v - b_i \tag{14}$$

– Moment przyjazdu do *i*-tego klienta z bazy magazynowej musi być większy bądź równy czasowi przejazdu łukiem (d_p^v, i)

$$\forall i \in \boldsymbol{S}, \forall v \in \boldsymbol{V} \quad m_i^v \geq t_{d_p^v, i} \cdot x_{d_p^v, i}^v \tag{15}$$

– Ograniczenie na moment przyjazdu do *j*-tego odbiorcy

$$\forall j \in \boldsymbol{S}, \forall v \in \boldsymbol{V} \quad m_j^v \geq (m_i^v + t_i + t_{ij}) \cdot x_{ij}^v \tag{16}$$

pozostałe ograniczenia z wyjątkiem ograniczeń dotyczących czasu (ograniczenia (9) i (10)) z zadania optymalizacyjnego dla twardych okien czasowych.

5. Podsumowanie

W artykule dokonano porównania twardych i miękkich okien czasowych rozpatrywanych w problemie trasowania pojazdów z oknami czasowymi. Pojawiające się w literaturze przedmiotu sformułowania zadań optymalizacyjnych rozbudowano o dodatkową funkcje kryterium minimalizującą łączny czas realizacji transportu. Zaprezentowane dwukryterialne zadania optymalizacyjne dla problemu trasowania pojazdów z oknami czasowymi z powodzeniem mogą zostać zaimplementowane w komputerowych narzędziach optymalizacyjnych np. LINGO.

Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2010–2012 jako projekt badawczy". Projekt N N509 601839 pt. Metodyka kształtowania sieci transportowo-logistycznej w wybranych obszarach.

Literatura

[1] Całczyński A., *Metody optymalizacyjne w obsłudze transportowej rynku*. PWE, Warszawa 1992.
[2] Clarke G., Wright J., *Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points*. Oper. Res. 12, 1964, 568–581.
[3] Dantzig G.B., Ramser J.H., *The truck dispatching problem*. Manage. Sci. 6, 80–91 (1959).
[4] Fisher M., *Vehicle routing*. Handbooks in OR & MS, vol. 8, 1995 Elsevier Science.

[5] Fisher M.L., Jaikumar R., *A generalized assignment heuristic for vehicle routing*. Networks 11, 1981, 109–124.

[6] Fisher M.L., Kedia P., *Optimal solution of set covering/partitioning problems using dual heuristics*. Manage. Sci., 36, 1990, 674–688.

[7] Foster B.A., Ryan D.M., *An integer programming approach to the vehicle scheduling problem*. Oper. Res., 27, 1976, 367–384.

[8] Gendreau M., Potvin J., Laporte G., *Vehicle routing*: Modern heuristics. [w:] Local Search In Combinatorial Optimization. John Wiley and sons, 1997, 311–336.

[9] Knight K., Hofer J., *Vehicle scheduling with timed and connected calls: a case study*. (9per. Res. Q., 19, 1968, 299–310.

[10] Koskosidis Y.A., Powell W.B., Solomon M.M., *An Optimization-Based Heuristic for Vehicle Routing and Scheduling with Soft Time Window Constraints*. Transportation Science, 26, 1992, 69–85.

[11] Laporte G., *The traveling salesman problem: an overview of exact and approximate algorithms*. European Journal of Operational Research, 1992, 59:231–47.

[12] Pullen H., Webb M., *A computer application to a transport scheduling problem*. Comput. J., 10, 1967, 10–13.

[13] Savelsbergh M.W.P., *Local search in routing problems with time windows*. Ann. Oper. Res., 4, 1985, 285–305.

[14] Toth P., Vigo D., *The vehicle routing problem*. Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Bologna 1992.