

Krzysztof Oprzędkiewicz*

Dobór okresu próbkowania dla obiektów liniowych I i II rzędu z jednym zerem transmitancji**

1. Uwagi wstępne

Podczas projektowania układu regulacji cyfrowej jednym z najważniejszych parametrów, jakie należy dobrać, jest wartość okresu próbkowania. Poprawnie dobrany okres próbkowania powinien zapewnić stabilność i dobrą jakość regulacji w układzie przy jednoczesnym zapewnieniu częściowej filtracji zakłóceń oraz nieprzeciążaniu CPU sterownika. Zasady poprawnego doboru okresu próbkowania pod kątem spełnienia tych podstawowych wymagań są od wielu lat przedmiotem badań wielu autorów. Przykładowo dla systemów skończenie wymiarowych można tu podać prace: T. Kaczorka (1977), R. Isermanna (1989, 1992), W. Gregi (2004), Byrskiego (2007). Zagadnienia doboru okresu próbkowania dla systemu nieskończenie wymiarowego były przedmiotem prac W. Mitkowskiego z lat 1982–1991. Z kolei zagadnienia doboru okresu próbkowania dla systemów skończenie wymiarowych i nieskończenie wymiarowych o niepewnych parametrach były omawiane między innymi w pracach: Mitkowski i Oprzędkiewicz (2004), Oprzędkiewicz (2008).

Wyniki badań praktycznych i symulacyjnych wskazują jednak na jeszcze jedno istotne zagadnienie, nieomawiane zbyt często w literaturze, a związane z doбором okresu próbkowania dla systemu dynamicznego opisanego transmitancją operatorową posiadającą zera. Jest to problem lokalizacji zer transmitancji obiektu dyskretnego, otrzymanego po uzupełnieniu obiektu ciągłego o pracujące synchronicznie impulsator i ekstrapolator zerowego rzędu. Okazuje się, że dla pewnych wartości okresu próbkowania może nastąpić „migracja” zera transmitancji układu dyskretnego na zewnątrz koła jednostkowego. To z kolei oznacza, że ciągły obiekt minimalnofazowy może po dyskretyzacji utracić tę cechę. Takie zjawisko jest wysoce niekorzystne, gdyż obiekty nieminimalnofazowe sprawiają znaczne kłopoty podczas konstrukcji algorytmów sterowania.

* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

** Praca została zrealizowana w ramach umowy nr 11.11.120.817

Z tego względu dodatkowym czynnikiem, który należy wziąć pod uwagę podczas doboru okresu próbkowania dla systemu opisanego transmitancją z zerami, jest zapobiegnięcie „migracji zer” poprzez odpowiedni dobór wartości okresu próbkowania na etapie projektowania układu regulacji. W tym celu należałoby skonstruować warunki analityczne, pozwalające na oszacowanie wartości okresu próbkowania poprawnych z punktu widzenia „migracji zer” w funkcji parametrów transmitancji obiektu ciągłego.

W niniejszej pracy podjęto próbę podania warunków analitycznych, jakie musi spełniać okres próbkowania, aby nie nastąpiła „migracja” zera transmitancji dla obiektów regulacji opisanych transmitancją pierwszego i drugiego rzędu z jednym zerem. W pracy zaprezentowano następujące zagadnienia:

- Rozważana klasa obiektów regulacji (ciągłych i dyskretnych).
- Problem doboru okresu próbkowania zapobiegającego „migracji zer”.
- Warunki na okres próbkowania dla wszystkich obiektów rozważanej klasy.
- Przykłady.

2. Rozważana klasa obiektów regulacji

Rozważmy obiekt I lub II rzędu opisany następującą transmitancją operatorową z jednym zerem:

$$G(s) = \frac{s + v}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (1)$$

Współczynniki transmitancji obiektu spełniają następujące założenia:

$$\begin{aligned} v &> 0 \\ a_2, a_1 &\geq 0, \quad a_0 > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

przy czym dodatkowo zakładamy, że rozważany obiekt musi być realizowalny fizycznie, czyli stopień licznika transmitancji (1) nie może być wyższy od stopnia mianownika, co nakłada dodatkowe ograniczenia na wartości współczynników transmitancji (1): współczynniki a_1 oraz a_2 nie mogą być jednocześnie równe zero.

Na podstawie (2) można także stwierdzić, że rozważany obiekt ciągły jest stabilny oraz minimalnofazowy.

W przypadku gdy obiekt ciągły opisany transmitancją (1) ma być sterowany z wykorzystaniem regulatora cyfrowego, to musi on być uzupełniony o dwa dodatkowe elementy: impulsator zamieniający ciągły sygnał wyjściowy z obiektu na jego wersję dyskretną w czasie oraz ekstrapolator zamieniający dyskretny sygnał sterujący na jego wersję ciągłą w czasie, możliwą do podania na wejście obiektu ciągłego. Oba te elementy pracują synchronicznie, z zadanyym okresem próbkowania T_s . Impulsator jest modelem matematycznym przetwornika A/C, a ekstrapolator jest modelem matematycznym przetwornika C/A.

Oba te elementy w układzie regulacji cyfrowej wchodzą w skład tzw. interfejsu procesowego. Schemat obiektu regulacji wraz z ekstrapolatorem i impulsatorem pokazany jest na rysunku 1 (zob. np. Mitkowskiego 1991).



Rys. 1. Ciągły obiekt regulacji z ekstrapolatorem i impulsatorem

W przypadku gdy obiekt ciągły jest opisany transmitancją ciągłą (1), transmitancja dyskretna obiektu z impulsatorem i ekstrapolatorem zerowego rzędu opisana jest następująco (zob. np. Grega 2004):

$$G^+(z) = (1 - z^{-1}) Z \left(\frac{G(s)}{s} \right) \quad (3)$$

W (3) $Z(\dots)$ oznacza transformatę „z” odpowiadającą transmitancji ciągłej. Transmitancja dyskretna (3) może być zapisana w postaci analogicznej do (1):

$$G^+(z) = \frac{b_2^+ z^2 + b_1^+ z + b_0^+}{a_2^+ z^2 + a_1^+ z + a_0^+} \quad (4)$$

W (4) b^+ oraz a^+ oznaczają odpowiednio współczynniki licznika i mianownika transmitancji obiektu dyskretnego. W przypadku ogólnym może zajść sytuacja, gdy ilość zer transmitancji układu po dyskretyzacji ulegnie zwiększeniu (Grega 2004). Z tego względu w (4) przyjęto współczynnik b_2^+ , który może być różny od zera.

Podczas budowy systemu dyskretnego pokazanego na rysunku 1 i opisanego przez (4) istotnym zagadnieniem jest dobór wartości okresu próbkowania. Poprawnie dobrany okres próbkowania powinien zapewnić stabilność i dobrą jakość regulacji w układzie. Ogólne zasady doboru okresu próbkowania są znane i były wielokrotnie omawiane w literaturze (zob. np. Isermann 1989, Grega 2004).

W przypadku obiektów rozważanej klasy pojawia się dodatkowy problem związany z lokalizacją zer transmitancji obiektu po dyskretyzacji. W niektórych przypadkach może nastąpić „migracja” zer poza obszar koła jednostkowego, czyli ciągły obiekt minimalnofazowy może nie być minimalnofazowy po dyskretyzacji.

Opisane powyżej zjawisko jest niekorzystne i należy mu zapobiec przez odpowiedni dobór okresu próbkowania podczas pracy układu dyskretnego. Warunki jakie musi spełnić wartość okresu próbkowania, aby „migracja” nie następowała, zostaną przedstawione w dalszych częściach niniejszej pracy.

3. Problem doboru okresu próbkowania dla rozważanej klasy obiektów

Po uwzględnieniu powyższych rozważań problem doboru okresu próbkowania dla rozważanej klasy obiektów może być sformułowany następująco:

Dla stabilnego obiektu minimalnofazowego opisanego transmitancją w postaci (1) należy tak dobrać okres próbkowania T_p , aby obiekt dyskretny opisany transmitancją dyskretną (4) był również minimalnofazowy.

Postawione powyżej zagadnienie jest w rozważanym przypadku (obiekty I i II rzędu) możliwe do rozwiązania analitycznego i warunki na wartości okresu próbkowania dopuszczalne ze względu zachowanie minimalnofazowości zostaną podane w dalszych częściach pracy.

Należy tu zwrócić uwagę, że w przypadku ogólnym (dla układu n -tego rzędu) nie jest możliwe podanie ogólnych analitycznych wzorów określających związek pomiędzy współczynnikami a i b transmitancji obiektu ciągłego (1) oraz odpowiednimi współczynnikami a^+ i b^+ obiektu dyskretnego (4). W takiej sytuacji sprawdzenie ewentualnej „migracji” zer może być wykonane symulacyjnie z wykorzystaniem MATLAB-a.

4. Warunki na wartości okresu próbkowania dla wszystkich obiektów rozważanej klasy

Obiekt I rzędu

Prezentację wyników analitycznych rozpoczniemy od najprostszego przypadku, jakim jest obiekt I rzędu: zakładamy, że współczynnik a_2 w transmitancji (1) jest równy zero. Wtedy transmitancja (1) redukuje się do następującej prostej postaci:

$$G_1(s) = \frac{s + \nu}{a_1 s + a_0} \quad (5)$$

lub też może być zapisana w następującej równoważnej postaci, dogodniejszej do dalszych obliczeń:

$$G_1(s) = k \frac{s + \nu}{s + \lambda} \quad (6)$$

gdzie:

$$k = \frac{1}{a_1}, \quad \lambda = -\frac{a_0}{a_1} \quad (7)$$

Po zastosowaniu do transmitancji (5) wzoru ogólnego (3) otrzymujemy następującą relację na transmitancję dyskretną obiektu (5) połączonego z ekstrapolatorem i impulsatorem:

$$G_1^+(z) = k \cdot \frac{z - \left(1 + (z_1 - 1) \frac{v}{\lambda}\right)}{z - z_1} \quad (8)$$

przy czym:

$$z_1 = e^{-\lambda T_p} \quad (9)$$

Na podstawie (8) i (9) widać, że rozważany obiekt jest stabilny asymptotycznie dla dowolnej wartości okresu próbkowania, gdyż jedyny biegun transmitancji dyskretnej (8) jest równy z_1 określonej przez (9), a $z_1 < 1$ dla każdej wartości okresu próbkowania $T_p > 0$.

Oznaczmy zero transmitancji obiektu dyskretnego (8) przez v_1^+ . Jest ono następującą funkcją parametrów obiektu ciągłego i okresu próbkowania T_p :

$$v_1^+(T_p) = 1 + \left(e^{-\lambda T_p} - 1\right) \frac{v}{\lambda} \quad (10)$$

Warunkiem na to, żeby obiekt dyskretny był minimalnofazowy jest, aby:

$$\left|v_1^+(T_p)\right| < 1 \quad (11)$$

Po wstawieniu (10) do (11) i kilku prostych przekształceniach otrzymujemy następującą relację na wartość okresu próbkowania T_p , dla której jest spełniona zależność (11):

$$T_p < \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{2\lambda}{v}} \right) \quad (12)$$

przy czym nierówność (12) może być rozważana wyłącznie dla wartości v oraz λ spełniających warunek:

$$v > 2\lambda \quad (13)$$

Obiekt II rzędu aperiodyczny

Kolejnym rozważanym przypadkiem jest obiekt II rzędu aperiodyczny z jednym zerem. Transmitancja (1) ma następującą postać:

$$G_2(s) = \frac{s + v}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (14)$$

przy czym zakładamy dla uproszczenia, że współczynnik $a_2 = 1$ i pozostałe współczynniki mianownika transmitancji (14) spełniają warunek:

$$a_1 > 2\sqrt{a_0} \quad (15)$$

Transmitancja (14) może być zapisana w następującej równoważnej postaci, łatwiejszej do dalszej analizy:

$$G_2(s) = \frac{s + v}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} \quad (16)$$

gdzie:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \cdot \left(a_1 + \sqrt{(a_1)^2 - 4a_0} \right) \quad (17)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \cdot \left(a_1 - \sqrt{(a_1)^2 - 4a_0} \right)$$

Transmitancja dyskretna obiektu ciągłego (16) uzupełnionego o impulsator i ekstrapolator i wyznaczona zgodnie z (3) ma postać następującą:

$$G_2^+(z) = k \cdot \frac{b_1^+ z + b_0^+}{(z - z_{21})(z - z_{22})} \quad (18)$$

W (18) parametr k jest opisany przez (17), z_{21} oraz z_{22} oznaczają bieguny transmitancji dyskretny równe:

$$z_{21} = e^{-T_p \lambda_1} \quad (19)$$

$$z_{22} = e^{-T_p \lambda_2}$$

Na podstawie (18) i (19) można stwierdzić, że rozważany obiekt dyskretny jest stabilny asymptotycznie dla dowolnej wartości okresu próbkowania T_p , gdyż oba bieguny transmitancji (18) określone przez (19) zawierają się w kole jednostkowym dla dowolnej wartości T_p oraz dowolnych stabilnych biegunów transmitancji ciągłej λ_1 oraz λ_2 .

Współczynniki b_1^+ oraz b_0^+ transmitancji dyskretny (18) są określone następująco:

$$b_1^+ = -(A(z_{21} + z_{22} - 1) + Bz_{22} + Cz_{21}) \quad (20)$$

$$b_0^+ = Az_{21}z_{22} + Bz_{22} + Cz_{21}$$

Współczynniki A , B oraz C zostały wprowadzone dla zwiększenia czytelności zapisu i są one równe:

$$A = \frac{v}{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$B = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - v \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (21)$$

$$C = \frac{v \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)}$$

Zero v_2^+ transmitancji dyskretnej (18) po uwzględnieniu (20) ma następującą postać:

$$v_2^+ = \frac{Az_{21}z_{22} + Bz_{22} + Cz_{21}}{A(z_{21} + z_{22} - 1) + Bz_{22} + Cz_{21}} \quad (22)$$

Wartość zera transmitancji dyskretnej v_2^+ jest funkcją zarówno biegunów i zera transmitancji ciągłej, jak i okresu próbkowania T_p . Jeżeli przypomnimy zależność (19), to zero opisane przez (22) jako funkcja okresu próbkowania T_p przyjmie następującą postać:

$$v_2^+(T_p) = \frac{Az_{21}e^{-T_p(\lambda_1+\lambda_2)} + Be^{-T_p\lambda_2} + Ce^{-T_p\lambda_1}}{A(e^{-T_p\lambda_1} + e^{-T_p\lambda_2} - 1) + Be^{-T_p\lambda_2} + Ce^{-T_p\lambda_1}} \quad (23)$$

Warunek, żeby obiekt dyskretny opisany transmitancją (20) był minimalnofazowy, ma postać (11), przy czym w rozważanym wypadku, po uwzględnieniu (23) i kilku przekształceniach można wykazać, że będzie on spełniony wyłącznie wtedy, gdy jednocześnie będą zachodzić nierówności (24) i (25) o następującej postaci:

$$e^{-T_p(\lambda_1+\lambda_2)} < e^{-T_p\lambda_1} + e^{-T_p\lambda_2} - 1 \quad (24)$$

$$e^{-T_p\lambda_1} > \frac{A + (A + 2C)e^{-T_p\lambda_2}}{Ae^{-T_p\lambda_2} + (A + 2C)} \quad (25)$$

Można sprawdzić, że nierówności (24) oraz (25) są spełnione dla każdej nieujemnej wartości okresu próbkowania T_p oraz każdych dodatnich wartości λ_1 oraz λ_2 .

Powyższa uwaga pozwala na sformułowanie wniosku, że obiekt aperiodyczny II rzędu minimalnofazowy będzie również minimalnofazowy po dyskretyzacji dla dowolnych wartości okresu próbkowania.

Obiekt II rzędu aperiodyczny krytyczny

Obiekt ten jest przypadkiem szczególnym obiektu (16) przy założeniu, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Transmitancja (16) przyjmie wtedy postać:

$$G_3(s) = \frac{s + v}{(s + \lambda)^2} \quad (26)$$

Po zastosowaniu wzoru (3), transmitancja dyskretna obiektu (26) przyjmie postać następującą:

$$G_3^+(z) = \frac{b_1^+ z - b_0^+}{(z - z_3)^2} \quad (27)$$

Współczynniki transmitancji dyskretnej (27) są w tym wypadku równe:

$$\begin{aligned} b_1^+ &= \frac{v}{\lambda^2}(1-z_3) + \frac{\lambda-v}{\lambda}T_p z_3 \\ b_0^+ &= \frac{v}{\lambda^2}(1-z_3)z_3 + \frac{\lambda-v}{\lambda}T_p z_3 \\ z_3 &= e^{-T_p \lambda} \end{aligned} \quad (28)$$

Na podstawie (27) oraz (28) można zauważyć, że rozważany układ po dyskretyzacji będzie stabilny asymptotycznie dla dowolnej wartości okresu próbkowania T_p .

Oznaczmy zero transmitancji dyskretnej (27) przez v_3^+ . Jako funkcja okresu próbkowania jest opisane w rozważanym wypadku następująco:

$$v_3^+(T_p) = \frac{b_0^+}{b_1^+} \quad (29)$$

Warunkiem tego, żeby obiekt dyskretny (27) był minimalnofazowy, jest, aby zero transmitancji dyskretnej opisane przez (29) spełniało warunek (11). W rozważanym wypadku, po uwzględnieniu (28) i (29) będzie on mieć następującą postać:

$$\left| \frac{\frac{v}{\lambda^2}(1-e^{-T_p \lambda})e^{-T_p \lambda} + \frac{\lambda-v}{\lambda}T_p e^{-T_p \lambda}}{\frac{v}{\lambda^2}(1-e^{-T_p \lambda}) + \frac{\lambda-v}{\lambda}T_p e^{-T_p \lambda}} \right| < 1 \quad (30)$$

Można sprawdzić, że warunek (30) jest spełniony dla każdej wartości $\lambda > 0$, $v < 0$ oraz $T_p > 0$.

Obiekt II rzędu oscylacyjny tłumiony

Obiekt taki jest opisany transmitancją (14) po przyjęciu $a_2 = 1$ oraz dodatkowego założenia na współczynniki mianownika transmitancji:

$$0 < a_1 < 2\sqrt{a_0} \quad (31)$$

Transmitancja (14) w przypadku obiektu oscylacyjnego tłumionego może być zapisana w następującej równoważnej postaci:

$$G_4(s) = \frac{s+v}{(s+\xi)^2 + \omega^2} \quad (32)$$

gdzie:

$$\xi = \frac{a_1}{2}$$

$$\omega = \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$$
(33)

Transmitancja obiektu dyskretnego, otrzymanego po uzupełnieniu obiektu ciągłego o impulsator i estrapolator zgodnie z rysunkiem 1 jest w rozważanym przypadku równa:

$$G_4^+(z) = E \cdot \frac{(v - vz_4 \cos \omega T_p + Fz_4 \sin \omega T_p)z - vz_4 (\cos \omega T_p - z_4)}{z^2 - 2z_4 z \cos \omega T_p + z_4^2}$$
(34)

przy czym:

$$z_4 = e^{-\xi T_p}$$

$$E = \frac{1}{\xi^2 + \omega^2}$$

$$F = \frac{\xi^2 + \omega^2 - \xi v}{\omega}$$
(35)

Transmitancja dyskretna (34) ma jedno zero v_4^+ , które jest równe:

$$v_4^+(T_p) = \frac{vz_4 (\cos \omega T_p - z_4)}{v - vz_4 \cos \omega T_p + Fz_4 \sin \omega T_p}$$
(36)

Aby obiekt dyskretny (34) był minimalnofazowy, to zero transmitancji (34) powinno spełniać warunek (11). Spełnienie tego warunku jest równoważne jednoczesnemu spełnieniu układu nierówności (37a) oraz (37b):

$$2z_4 \cos \omega T_p - \frac{F}{v} z_4 \sin \omega T_p - 1 - z_4^2 < 0$$
(37a)

$$Fz_4 \sin \omega T_p + v(1 - z_4^2) > 0$$
(37b)

Przy czym F oraz z_4 są określone przez (35) a ω jest określona przez (33).

Postać nierówności (37a i b) pozwala zauważyć, że w przypadku rozważanego obiektu mogą istnieć takie rzeczywiste wartości ξ , ω oraz T_p , dla których układ nierówności (37a i b) nie jest spełniony. To z kolei oznacza, że w przypadku obiektu oscylacyjnego tłumionego II rzędu może nastąpić „migracja” zera transmitancji na zewnątrz koła jednostkowego.

W rozważanym wypadku podanie ogólnego analitycznego wzoru o postaci podobnej do (12) jest skomplikowane ze względu na stopień komplikacji analitycznego rozwiązania układu nierówności (37a i b). W celu wyznaczania zależności w postaci analitycznej można użyć narzędzia programowego do obliczeń symbolicznych, np. MAPLE-a. Natomiast bez problemu można wyznaczyć (z użyciem MATLAB-a) zakres dopuszczalnych wartości okresu próbkowania T_p dla zadanych wartości współczynników ξ oraz ω , które są z kolei zależne od współczynników mianownika transmitancji. Zostanie to pokazane na przykładzie obliczeniowym.

Obiekt II rzędu oscylacyjny nietłumiony

Obiekt oscylacyjny nietłumiony jest przypadkiem szczególnym obiektu (32) przy założeniu, że współczynnik $\xi = 0$:

$$G_5(s) = \frac{s + v}{s^2 + \omega^2} \quad (38)$$

W (38) pulsacja ω opisana jest przez (33) przy założeniu, że współczynnik mianownika transmitancji $a_1 = 0$.

Transmitancja obiektu dyskretnego, zawierającego obiekt ciągły o transmitancji (38) oraz pracujące synchronicznie impulsator i ekstrapolator zerowego rzędu, może być (analogicznie jak wcześniej) wyznaczona na podstawie (3). W rozważanym wypadku ma ona następującą postać:

$$G_5^+(z) = \frac{v}{\omega^2} \cdot \frac{\left(1 - \cos \omega T_p + v + \frac{\omega^2}{v} \sin \omega T_p\right) z + \left(1 - \cos \omega T_p - \frac{\omega^2}{v} \sin \omega T_p\right)}{z^2 - 2 \cos \omega T_p + 1} \quad (39)$$

Można zauważyć, że układ dyskretny (39) będzie stabilny (ale nie asymptotycznie) dla dowolnej wartości okresu próbkowania T_p .

Transmitancja dyskretna (39) ma jedno zero v_5^+ , które jest w rozważanym wypadku następującą funkcją okresu próbkowania T_p oraz parametrów transmitancji ciągłej:

$$v_5^+(T_p) = \frac{\cos \omega T_p - 1 + \frac{\omega^2}{v} \sin \omega T_p}{1 - \cos \omega T_p + \frac{\omega^2}{v} \sin \omega T_p} \quad (40)$$

Obiekt dyskretny (39) będzie minimalnofazowy dla takich wartości okresu próbkowania T_p , dla których zero transmitancji (39) opisane przez (40) będzie spełniać nierówność (11). W rozważanym wypadku nierówność (11) może być przekształcona do układu nierówności (41) i (42), które muszą być jednocześnie spełnione:

$$\cos \omega T_p < 1 \quad (41)$$

$$2 \frac{\omega^2}{\nu} \sin \omega T_p > 0 \quad (42)$$

Nierówność (41) jest spełniona dla każdej wartości $\omega T_p \neq 2\pi n$, dla $n = 0, 1, 2, \dots$, a nierówność (42) jest spełniona dla wartości $\omega T_p \in [2n\pi; (2n+1)\pi]$, $n = 0, 1, 2, \dots$

5. Przykłady

W pierwszym przykładzie rozważmy obiekt I rzędu z jednym zerem, opisany transmitancją (6), której współczynniki są równe: $\nu = 5$, $\lambda = 1$, $k = 1$:

$$G_1(s) = \frac{s+5}{s+1} \quad (43)$$

Założmy, że obiekt ciągle opisany transmitancją (43) został uzupełniony o pracujące synchronicznie: impulsator i esktrapolator zerowego rzędu, zgodnie ze schematem z rysunku 1. Transmitancja dyskretna obiektu (43) jest wtedy równa zgodnie z (8):

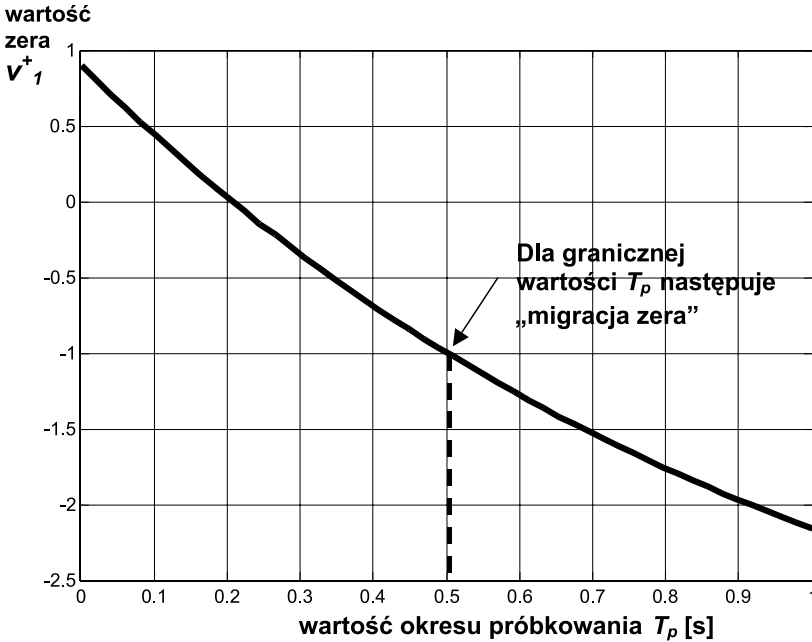
$$G_1^+(z) = \frac{z - \left(1 + 5 \left(e^{-T_p} - 1\right)\right)}{z - e^{-T_p}} \quad (44)$$

Obiekt dyskretny (44) będzie minimalnofazowy wtedy i tylko wtedy, gdy zero transmitancji dyskretny (44) będzie spełniać warunek (12), który w rozważanym przykładzie ma następującą postać:

$$T_p < \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{5}} \right) \Leftrightarrow T_p < \ln \left(\frac{5}{3} \right) \Leftrightarrow T_p < 0,5108 \quad (45)$$

Dla sprawdzenia poprawności powyższego wyniku, na rysunku 2 pokazano przebieg wartości zera transmitancji dyskretny otrzymanej po dyskretyzacji transmitancji (43) w funkcji okresu próbkowania T_p w przedziale od 0 do 1 s, przy czym współczynniki transmitancji dyskretny określonej przez wzór ogólny (3) dla poszczególnych rozważanych wartości okresu próbkowania T_p wyznaczano z użyciem standardowej funkcji MATLAB-a *c2dm*, a wartość zera transmitancji (44) wyznaczono z użyciem funkcji standardowej *roots*.

Wykres z rysunku 2 potwierdza poprawność proponowanego analitycznego warunku na „utrzymanie” zera transmitancji dyskretny wewnątrz koła jednostkowego, opisanego przez nierówność (12), gdyż zero „migruje” poza obszar koła jednostkowego dla wartości okresu próbkowania T_p większych od wartości granicznej, określonej przez (45), która została wyznaczona na podstawie wzoru na transmitancję dyskretną (44).



Rys. 2. Wartość zera transmitancji (44) w funkcji okresu próbkowania

Jako drugi przykład rozważmy wyznaczenie zakresu wartości okresu próbkowania gwarantujących lokalizację zera transmitancji dyskretnej wewnątrz koła jednostkowego dla obiektu oscylacyjnego tłumionego, opisanego transmitancją ciągłą (32). Załóżmy, że parametry tej transmitancji są równe: $\nu = 5$, $\xi = 0,01$, $\omega = 1$.

Dla tych parametrów transmitancja ciągła (32) jest równa:

$$G_4(s) = \frac{s+5}{(s+0,01)^2+1} \quad (46)$$

Transmitancja dyskretna (34) jest w rozważanym wypadku równa:

$$G_4^+(z) = 0,99 \cdot \frac{(5 - 5e^{-0,01T_p} \cos T_p + 0,95e^{-0,01T_p} \sin T_p)z - 5e^{-0,01T_p} (\cos \omega T_p - e^{-0,01T_p})}{z^2 - 2e^{-0,01T_p} z \cos T_p + e^{-0,02T_p}} \quad (47)$$

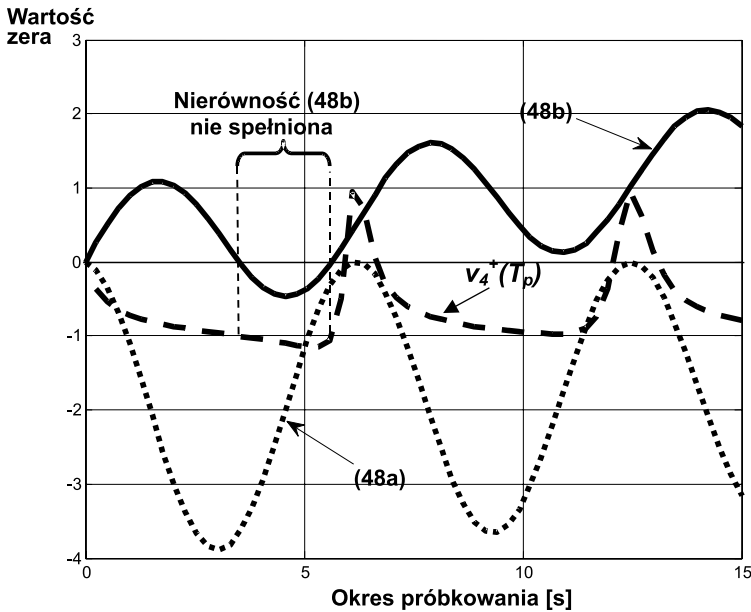
Układ równań (37a) i (37b) zapewniających utrzymanie zera transmitancji (46) wewnątrz koła jednostkowego ma dla rozważanego przykładu postać następującą:

$$2e^{-0,01T_p} \cos T_p - 0,19e^{-0,01T_p} \sin T_p - 1 - e^{-0,02T_p} < 0 \quad (48a)$$

$$0,95e^{-0,01T_p} \sin T_p + 5(1 - e^{-0,02T_p}) > 0 \quad (48b)$$

W celu sprawdzenia poprawności warunków (48a) i (48b) dokonano dyskretyzacji transmitancji ciągłej (46) z wykorzystaniem standardowej funkcji matlabowskiej *c2dm* dla wartości okresu próbkowania T_p z zakresu od 0 do 15 s. Wartość zera transmitancji dyskretnej wyznaczono z użyciem funkcji standardowej *roots*.

Przebieg zera transmitancji dyskretnej w przedziale od 0 do 15 s oraz przebiegi nierówności (48a) oraz (48b) pokazano na rysunku 3.



Rys. 3. Zero transmitancji w funkcji okresu próbkowania dla przykładowego obiektu oscylacyjnego tłumionego

Na podstawie analizy wykresów z rysunku 3 można stwierdzić, że warunki na utrzymanie zera transmitancji dyskretnej wewnątrz koła jednostkowego przy zmieniającym się okresie próbkowania, opisane przez (48a) oraz (48b), są sformułowane poprawnie, gdyż „migracja” zera na zewnątrz koła jednostkowego następuje dokładnie tam, gdzie nie jest spełniona nierówność (48b).

6. Uwagi końcowe

Uwagi końcowe do pracy mogą być sformułowane następująco:

- W przypadku obiektu aperiodycznego II rzędu z jednym zerem zjawisko „migracji zera” nie występuje dla żadnej realizowalnej fizycznie wartości okresu próbkowania.
- W przypadku obiektu I rzędu oraz II rzędu oscylacyjnego nietłumionego podano dokładne wzory analityczne określające, dla jakich wartości okresu próbkowania może nastąpić „migracja zera”.

- W przypadku obiektu II rzędu oscylacyjnego tłumionego podano ogólne oszacowania, pozwalające stwierdzić, czy dla zadanych parametrów obiektu ciągłego i zadanej wartości okresu próbkowania nastąpi „migracja” zera, czy nie nastąpi.
- Na podstawie przedstawionej w pracy analizy zachowania się jednego zera transmitancji układu II rzędu, można zauważyć, że zagadnienia te nawet dla najprostszego przypadku są dość trudne do analizy teoretycznej ze względu na typ zależności współczynników licznika transmitancji od okresu próbkowania. Wydaje się więc, że w przypadku ogólnym (systemy wyższego rzędu i większa ilość zer transmitancji) najprostsza i najbardziej zalecana jest analiza z wykorzystaniem odpowiednich narzędzi programistycznych, np. MATLAB-a.
- Przedmiotem dalszych prac w ramach prezentowanej tematyki będzie podanie efektywnych warunków na utrzymanie zer transmitancji wewnątrz koła jednostkowego dla systemów o niepewnych parametrach oraz podanie efektywnych metod szacowania położenia zer transmitancji dyskretniej dla systemów wyższych rzędów.

Literatura

- Byrski W. (2007): *Obserwacja i sterowanie w systemach dynamicznych*. UWND AGH.
- Grega W. (2004): *Metody i algorytmy sterowania cyfrowego w układach scentralizowanych i rozproszonych*. UWND AGH.
- Isermann R. (1989): *Digital Control Systems*. Vol. 1, Springer.
- Isermann R. (1992): *Digital Control Systems*. Vol. 2, Springer.
- Kaczorek T. (1977): *Teoria sterowania*. Tom 1, PWN.
- Mitkowski W. (1982): *Stabilizacja systemów dyskretno-ciągłych*. Elektrotechnika (kwartalnik AGH), t. 1, z. 1, 59–65.
- Mitkowski W. (1985): *Stabilizacja liniowego systemu parabolicznego za pomocą dyskretnego kompensatora dynamicznego*. Elektrotechnika (kwartalnik AGH), t. 4, z. 2, 189–197.
- Mitkowski W. (1988): *Stabilizacja liniowych układów nieskończenie wymiarowych za pomocą dynamicznego sprzężenia zwrotnego* (Stabilization of infinite-dimensional linear systems by dynamic feedback). Arch. Automatyki i Telemekhaniki, t. 33, z. 4, 515–528.
- Mitkowski W. (1989): *Ewolucyjnyje urawnienija wtorowo poriadka s dyskretnoj obratnoj swiazju*. Międzynarodowe Seminarium „Matematyczne metody sterowania optymalnego i ich zastosowania”. Instytut Matematyczny Białoruskiej Akademii Nauk, Mińsk, 86.
- Mitkowski W. (1989): *Dyskretny kompensator dynamiczny-przykłady*. Zeszyty Naukowe AGH, nr 1260, Automatyka, z. 47, 87–94.
- Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT.
- Mitkowski W., Oprzędkiewicz K. (2004): *A sample time assign for a discrete interval parabolic system with the two-dimensional uncertain parameter space*. Systems Science, vol. 30, No. 1, 43–50.
- Mitkowski W., Oprzędkiewicz K. (2009): *Optimal sample time estimation for the digital control system*. [w:] „System modeling and optimization”, selected revised papers from 23rd IFIP TC 7 Conf., Springer.
- Oprzędkiewicz K. (2008a): *Dyskretny system paraboliczny o niepewnych parametrach*. Przegląd Elektrotechniczny, nr 9, 179–187.
- Oprzędkiewicz K. (2008b): *Praktyczne sterowanie systemów dynamicznych z widmem punktowym i parametrami przedziałowymi*. UWND AGH.