

Grzegorz Sieklucki*, Tadeusz Orzechowski*

Dyskretne obserwatory momentu obciążenia w napędach elektrycznych

1. Wprowadzenie

W niektórych metodach sterowania napędami konieczna jest znajomość momentu obciążenia. Metodami tymi są:

- sterowanie minimalnoczasowe [7, 20, 23],
- optymalna stabilizacja [6, 19],
- rozruch z momentem obciążenia w układzie regulacji kaskadowej [25].

Problem ten można rozwiązać drogą sprzętową lub przez zastosowanie obserwatora momentu obciążenia.

Pierwszy sposób wymaga zastosowania np. 8 tensometrów umieszczonych na wale silnika, które wyznaczają stopień skręcenia wału, i na podstawie znajomości materiału, z którego wykonany jest wał silnika oraz średnicy wału, można obliczyć moment obciążenia.

Metoda ta wymaga dużej precyzji w zamontowaniu tensometrów i dodatkowo układ pomiarowy jest bardzo czuły na wszelkiego rodzaju uszkodzenia mechaniczne. Metoda wyznaczenia momentu obciążenia z wykorzystaniem obserwatora wymaga dokonywania tylko tych samych pomiarów (I , ω – dla silnika prądu stałego, Me , ω – dla silników prądu przemiennego), które są sygnałami sprzężeń zwrotnych w klasycznych układach regulacji napędami elektrycznymi. Wówczas cały ciężar wyznaczenia momentu jest położony na komputerowy system przetwarzania sygnałów i regulacji napędem.

Bezpośredni pomiar na wale maszyny prowadzi do wyznaczenia jedynie momentu wnoszonego przez maszynę roboczą, natomiast wykorzystanie obserwatora dodatkowo uwzględnia opory tarcia w łożyskach oraz moment wentylatorowy wirnika. Ze względów praktycznych, w układach regulacji, korzystniejsze jest zastosowanie obserwatora zamiast uwzględniania w modelu matematycznym napędu nieliniowych momentów zależnych od prędkości.

* Katedra Automatyki Napędu i Urządzeń Przemysłowych, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Z tego względu w niniejszym artykule zostały przedstawione różne metody i struktury obserwacji momentu obciążenia.

2. Modele matematyczne napędów elektrycznych

Najczęściej wykorzystywane praktycznie napędy elektryczne pracujące ze zmiennymi obciążeniami i prędkościami to:

- napędy z silnikami obcowzbudnymi prądu stałego,
- napędy z klatkowymi silnikami indukcyjnymi.

Modele matematyczne tych dwóch rodzajów napędów zostały omówione w niniejszym punkcie.

Napęd prądu stałego zwykle opisuje się jako ciągły liniowy stacjonarny układ dynamiczny [10, 14, 24, 30]:

$$L\dot{I}(t) = -RI(t) - \Psi_{eN}\omega(t) + K_p U(t) \quad (1a)$$

$$J\dot{\omega}(t) = M_e(t) - M_m(t) \quad (1b)$$

$$M_e(t) = \Psi_{eN}I(t) \quad (1c)$$

gdzie:

- I – prąd twornika,
- M_m – moment obciążenia,
- ω – prędkość kątowna,
- Ψ_{eN} – znamionowy strumień skojarzony,
- T_m – rozruchowa stała elektromechaniczna,
- T – elektromagnetyczna stała czasowa,
- J – moment bezwładności,
- R – rezystancja uogólniona,
- L – indukcyjność całkowita,
- K_p – średnie wzmocnienie wzmacniacza mocy.

Model matematyczny (1) obowiązuje przy następujących założeniach: wzmacniacz mocy jest obiektem bezinercyjnym o stałym wzmocnieniu K_p , napęd pracuje w zakresie prądów ciągłych, proces komutacji nie wpływa na zewnętrzne mierzalne parametry napędu. Powyższe założenia nie ograniczają zakresu stosowalności (1), gdyż są one zawsze spełnione dla układów napędowych o właściwie dobranym silniku i wzmacniaczu mocy. W procesie syntezy regulatora, a także w badaniach symulacyjnych, korzystny jest opis dynamiki w jednostkach względnych. Wprowadza się zatem nowe oznaczenia zmiennych i parametrów układu:

$$\begin{aligned}
u_s(\tau) &= \frac{K_p U_s(t)}{U_N}, & i(\tau) &= \frac{K_p U_s(t)}{U_N}, & a &= \frac{T_m}{T} \\
B &= J \frac{R}{\Psi_{eN}^2}, & v(\tau) &= \frac{\omega(t)}{\omega_0}, & T_m &= J \frac{\omega_0}{M_N} = Bh \\
\mu(\tau) &= \frac{M_m(t)}{M_N}, & \tau &= \frac{t}{T_m}, & h &= \frac{U_N}{I_N R}
\end{aligned} \quad (2)$$

Po podstawieniu (2) do modelu (1) otrzymuje się następujące równania stanu silnika obcowzbudnego

$$\begin{pmatrix} \frac{dv(\tau)}{d\tau} \\ \frac{di(\tau)}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -ah & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(\tau) \\ i(\tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & ah \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu(\tau) \\ u_s(\tau) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Podstawą projektowania obserwatora momentu obciążenia silnika indukcyjnego jest równanie momentów (1b), ale do wyznaczenia bieżącej wartości momentu elektrycznego M_e wykorzystuje się obserwatory bazujące na równaniach elektromagnetycznych zapisanych we wspólnym (dla obwodu stojana i wirnika) wirującym z prędkością ω^K układzie współrzędnych [4, 9, 10, 16, 18, 22, 24, 29]:

$$\underline{u}_S = R_S \dot{\underline{i}}_S + \frac{d\underline{\Psi}_S}{dt} + j\omega^K \underline{\Psi}_S \quad (4a)$$

$$0 = R_R \dot{\underline{i}}_R + \frac{d\underline{\Psi}_R}{dt} + j(\omega^K - p_b \omega_m) \underline{\Psi}_R \quad (4b)$$

$$\underline{\Psi}_S = L_S \dot{\underline{i}}_S + L_\mu \dot{\underline{i}}_R \quad (4c)$$

$$\underline{\Psi}_S = L_R \dot{\underline{i}}_R + L_\mu \dot{\underline{i}}_S \quad (4d)$$

gdzie przyjmuje się następujące oznaczenia:

$\underline{\Psi}_S, \underline{\Psi}_R, \dot{\underline{i}}_S, \dot{\underline{i}}_R$ – wektory przestrzenne strumieni skojarzonych oraz prądów,

i_{Sd}, i_{Sq} – podłużna i poprzeczna składowa wektora prądu stojana zapisanego w ruchomym układzie współrzędnych,

i_{mR} – prąd magnesujący,

L_R – indukcyjność wirnika,

L_S – indukcyjność stojana,

L_μ – indukcyjność wzajemna stojana i wirnika,

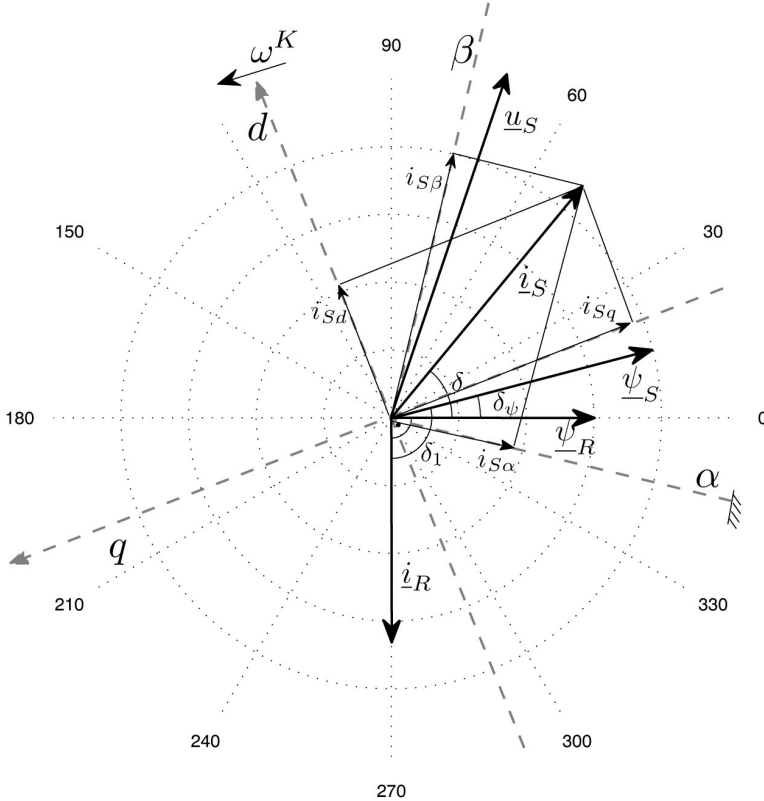
R_R – rezystancja wirnika,

R_S – rezystancja stojana,

T_R – elektromagnetyczna stała czasowa wirnika,

- T_S – elektromagnetyczna stała czasowa stojana,
 δ – kąt obciążenia,
 σ – całkowity współczynnik rozproszenia,
 σ_R – współczynnik rozproszenia wirnika,
 σ_S – współczynnik rozproszenia stojana.

Przykładowy rozkład wektorów przestrzennych (równanie (4)) został przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1. Rozkład wektorów przestrzennych (wirujących) silnika indukcyjnego

Moment elektromagnetyczny silnika indukcyjnego można przedstawić jako iloczyn wektorowy prądu wirnika i strumienia stojana [32]:

$$\begin{aligned}
 M_e &= \frac{3}{2} p_b \underline{\psi}_S \times \underline{i}_S = \frac{3}{2} p_b \underbrace{(L_S \underline{i}_S + L_\mu \underline{i}_R)}_{\underline{\psi}_S} \times \underline{i}_S \\
 &= \frac{3}{2} p_b \underline{\psi}_S \times \underline{i}_S = \frac{3}{2} p_b |\underline{\psi}_S| \cdot |\underline{i}_S| \sin(\delta + \delta_\psi) = \frac{3}{2} p_b (\Psi_{Sd} i_{Sq} - \Psi_{Sq} i_{Sd})
 \end{aligned} \tag{5}$$

lub po przekształceniach otrzymuje się wyrażenie na moment elektromagnetyczny:

$$\begin{aligned}
 M_e &= \frac{3}{2} p_b \underline{\Psi}_S \times i_S = \frac{3}{2} p_b \left[\underline{\Psi}_S \times \left(-\frac{L_R L_S}{L_\mu} \sigma i_S \right) \right] \left[-\frac{L_\mu}{L_R L_S \sigma} \right] \\
 &= \frac{3}{2} p_b \left[\underline{\Psi}_S \times \underbrace{\left(\frac{L_R}{L_\mu} \underline{\Psi}_S - \frac{L_R L_S}{L_\mu} \sigma i_S \right)}_{\underline{\Psi}_R} \right] \left[-\frac{L_\mu}{L_R L_S \sigma} \right] \\
 &= \frac{3}{2} p_b \frac{L_\mu}{L_R L_S \sigma} \underline{\Psi}_R \times \underline{\Psi}_S = \frac{3}{2} p_b \frac{1-\sigma}{\sigma L_\mu} \underline{\Psi}_R \times \underline{\Psi}_S \\
 &= \frac{3}{2} p_b \frac{1-\sigma}{\sigma L_\mu} |\underline{\Psi}_R| \cdot |\underline{\Psi}_S| \sin(\delta_\Psi) = \frac{3}{2} p_b \frac{1-\sigma}{\sigma L_\mu} (\Psi_{Rd} \Psi_{Sq} - \Psi_{Rq} \Psi_{Sd})
 \end{aligned} \tag{6}$$

Równanie (6) ulegnie uproszczeniu jeśli za oś rzeczywistą (d) wirującego układu współrzędnych zostanie przyjęte położenie wektora strumienia stojana lub wirnika:

$$M_e = \frac{3}{2} p_b \frac{1-\sigma}{\sigma L_\mu} (\Psi_{Rd} \Psi_{Sq} - \Psi_{Rq} \Psi_{Sd}) \tag{7a}$$

$$= \frac{3}{2} p_b \frac{1-\sigma}{\sigma L_\mu} (\Psi_{Rd} \Psi_{Sq} - \underbrace{\Psi_{Rq} \Psi_{Sd}}_{=0}) \Bigg|_{ośd \rightarrow \underline{\Psi}_R} = \frac{3}{2} p_b \frac{1-\sigma}{\sigma L_\mu} \Psi_{Rd} \Psi_{Sq} \tag{7b}$$

$$= \frac{3}{2} p_b \frac{1-\sigma}{\sigma L_\mu} (\Psi_{Rd} \underbrace{\Psi_{Sq}}_{=0} - \Psi_{Rq} \Psi_{Sd}) \Bigg|_{ośd \rightarrow \underline{\Psi}_S} = \frac{3}{2} p_b \frac{1-\sigma}{\sigma L_\mu} \Psi_{Rq} \Psi_{Sd} \tag{7c}$$

W celu wyznaczenia bieżącej wartości M_e , można wykorzystać obserwatory strumieni skojarzonych przedstawione w pracach [18, 32].

Z uwagi na fakt, że równanie (1b) jest niezależne od rodzaju silnika, to dla obu napędów można stosować identyczne rodzaje obserwatorów momentu obciążenia.

3. Dyskretyzacja ciągłego obserwatora momentu obciążenia

Problem ciągłego obserwatora momentu obciążenia napędu prądu stałego został przedstawiony w pracach [6, 28] i można go stosunkowo łatwo rozszerzyć dla innych rodzajów

napędu. W tym przypadku obserwator jest projektowany z wykorzystaniem prostych układów dynamicznych i zakłada się, że moment elektryczny silnika jest łatwo identyfikowalny. Podstawą teorii jest równanie mechaniki napędu (1b), które w postaci operatorowej można zapisać w jednostkach względnych których oznaczenia podano zależnościami (2).

$$v(s) = \frac{\mu_e(s) - \mu_0(s)}{T_m s} \quad (8)$$

Dla modelu układu napędowego zależność (8) przyjmuje postać

$$\hat{v}(s) = \frac{\mu_e(s) - \hat{\mu}_0(s)}{\hat{T}_m s} \quad (9)$$

gdzie:

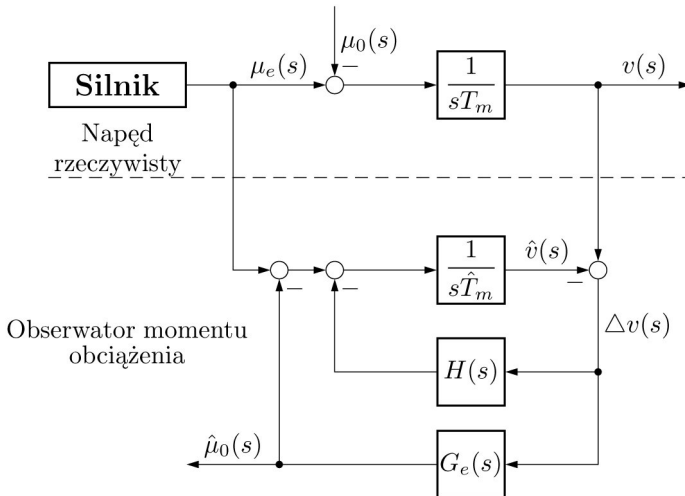
\hat{T}_m – identyfikowana wartość stałej T_m ,
 $\hat{\mu}_0(s)$ – estymowana wartość momentu obciążenia.

W celu uniknięcia błędów estymacji momentu $\hat{\mu}_0$ związanych z niedokładnością modelu (błędy identyfikacji stałej T_m) wykorzystuje się do korekcji sygnał błędu prędkości

$$\Delta v(s) = v(s) - \hat{v}(s)$$

wprowadzony do obserwatora (rys. 2) dwoma torami:

- jako sprzężenie zwrotne wokół elementu całkującego $\frac{1}{\hat{T}_m s}$ (transmitancja $H(s)$),
- jako estymowany moment obciążenia $\hat{\mu}_0(s)$ (transmitancja $G_e(s)$).



Rys. 2. Ciągły obserwator momentu obciążenia

Tak więc błąd prędkości po uwzględnieniu struktury obserwatora (przedstawionej na rys. 2) można zapisać w postaci

$$\Delta v(s) = [\mu_e(s) - \mu_0(s)] \frac{1}{T_m s} - \{[\mu_e(s) - \hat{\mu}_0(s)] - \Delta v(s)H(s)\} \frac{1}{\hat{T}_m s} \quad (10)$$

natomiast estymowany moment obciążenia wynosi

$$\hat{\mu}_0(s) = G_e(s)\Delta v(s) \quad (11)$$

Podstawiając za $\Delta v(s)$ zależności (11) do lewej strony równania (10) i po pomnożeniu obu stron tego równania przez $-\hat{T}_m s$ uzyskuje się

$$\hat{\mu}_0(s) = \frac{\mu_{01}(s)}{\frac{H(s)}{G_e(s)} - \frac{\hat{T}_m s}{G_e(s)} + 1} \quad (12)$$

gdzie

$$\mu_{01}(s) = \mu_e(s) \left(1 + \frac{\hat{T}_m}{T_m} \right) + \mu_0(s) \frac{\hat{T}_m}{T_m}.$$

Przyjmując prawidłową identyfikację rozruchowej stałej elektromechanicznej (tzn. $\hat{T}_m = T_m$), błąd estymacji momentu obciążenia jest zależny wyłącznie od postaci transmitancji $H(s)$ i $G_e(s)$. Transmitancje te mogą być dobierane wg założonego sposobu odtwarzania momentu obciążenia:

- estymacji układem inercyjnym drugiego rzędu,
- estymacji układem oscylacyjnym z tłumieniem bliskim wartości krytycznej.

W obydwu przypadkach estymowanie momentu obciążenia następuje za pomocą układu drugiego rzędu, czyli wg zależności

$$\hat{\mu}_0(s) = \frac{\mu_{01}(s)}{\hat{T}_m T_e s^2 + k_e T_e s + 1} \quad (13)$$

Zakłada się, że $G_e(s)$ jest transmitancją układu całkującego, czyli

$$G_e(s) = -\frac{1}{T_c s}.$$

Dla tak przyjętego założenia, porównując mianowniki zależności (12) i (13), otrzymuje się

$$\hat{T}_m T_c s^2 - H(s) T_c s + 1 = \hat{T}_m T_e s^2 + k_e T_e s + 1.$$

Zakładając, że stała $T_c = T_e$, uzyskuje się w torze sprzężenia zwrotnego układ wzmacniająca cy o transmitancji

$$H(s) = -k_e$$

Dobór wartości współczynników k_e oraz T_c obserwatora odbywa się przez przyrównanie wielomianu charakterystycznego obserwatora z:

- **Układem inercyjnym drugiego rzędu:** przy założeniu, że mianownik wyrażenia (13) powinien mieć postać

$$\hat{T}_m T_e s^2 + k_e T_e s + 1 = (T_a s + 1)^2 = T_a^2 s^2 + 2T_a s + 1 \quad (14)$$

parametr obserwatora wynosi:

$$T_c = T_e = \frac{T_a^2}{\hat{T}_m} \quad (15)$$

i powinien być dobrany na poziomie minimalnym wynikającym z możliwości realizacyjnych układu całkującego. Po założeniu stałej T_c można określić wartość stałej T_a oraz współczynnik wzmocnienia

$$k_e = 2 \frac{T_a}{T_e} = 2 \frac{\hat{T}_m}{T_a} \quad (16)$$

- **Układem oscylacyjnym z tłumieniem bliskim wartości krytycznej:** przy założeniu, że mianownik wyrażenia (13) powinien mieć postać

$$\hat{T}_m T_e s^2 + k_e T_e s + 1 = T_0^2 s^2 + 2\xi T_0 s + 1.$$

Stała czasowa T_0 powinna być dobrana na dopuszczalnym poziomie minimalnym, natomiast współczynnik tłumienia ξ w granicach 0,8 do 0,9. Stąd parametry obserwatora są równe:

$$T_c = \frac{T_0^2}{\hat{T}_m} \quad (17)$$

$$k_e = 2\xi \frac{\hat{T}_m}{T_0} \quad (18)$$

Przez dobór parametrów transmitancji $G_e(s)$ i $H(s)$ uzyskuje się prawie dokładną aproksymację przebiegu momentu obciążenia napędu.

Można również określić związek estymowanego momentu obciążenia $\hat{\mu}_0(s)$ z sygnałami pomiarowymi [6]:

$$\hat{\mu}_0(s) = \frac{\mu_e(s) - v(s)\hat{T}_m s}{\hat{T}_m T_e s^2 + k_e T_e s + 1} \quad (19)$$

Związek (19) podany jest w jednostkach względnych. Chcąc go zastosować w rzeczywistym układzie napędowym, należy powrócić do jednostek mianowanych (2):

$$\begin{aligned} \hat{M}_m(s) &= \frac{M_e(s)}{\hat{T}_m T_e s^2 + k_e T_e s + 1} - \frac{\omega(s)Js}{\hat{T}_m T_e s^2 + k_e T_e s + 1} = \\ &= G_1(s)M_e(s) - G_2(s)\omega(s) \end{aligned} \quad (20)$$

W dalszej części rozważań wykorzystano zależność (20) jako matematyczny opis obserwatora ciągłego i przeprowadzono jego dyskretyzację, przyjmując wielomian charakterystyczny inercyjny drugiego rzędu (14). W procesie dyskretyzacji wykorzystano ekstrapolator (*zero order hold*) zerowego rzędu (podaną np. w [3])

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{L} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right] \quad (21)$$

gdzie Z oznacza dyskretną transformatę, a \mathcal{L}^{-1} odwrotną transformatę Laplace'a.

W wyniku uzyskuje się

$$G_1(z) = \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{z^2 + \beta_1 z + \beta_2}, \quad G_2(z) = \frac{\delta_1 z + \delta_2}{z^2 + \beta_1 z + \beta_2} \quad (22)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -e^{-\frac{T_s}{T_a}} \left(1 + \frac{T_s}{T_a} \right) - 1, & \alpha_2 &= e^{-\frac{2T_s}{T_a}} - e^{-\frac{T_s}{T_a}} \left(1 - \frac{T_s}{T_a} \right), \\ \beta_1 &= -2e^{-\frac{T_s}{T_a}}, & \beta_2 &= e^{-\frac{2T_s}{T_a}}, \\ \delta_1 &= J \frac{T_s}{T_a^2} e^{-\frac{T_s}{T_a}}, & \delta_2 &= -J \frac{T_s}{T_a^2} e^{-\frac{T_s}{T_a}}. \end{aligned}$$

Po wymnożeniu przez z^{-1} transmitancji $G_1(z) = \frac{M_1(z)}{M_e(z)}$ i $G_2(z) = \frac{M_2(z)}{\omega(z)}$ uzyskuje się

$$M_1(z) = \alpha_1 z^{-1} M_e(z) + \alpha_2 z^{-2} M_e(z) - \beta_1 z^{-1} M_1(z) - \beta_2 z^{-2} M_1(z) \quad (23a)$$

i w postaci algorytmu

$$M_1(k) = \alpha_1 M_e(k-1) + \alpha_2 M_e(k-2) - \beta_1 M_1(k-1) - \beta_2 M_1(k-2) \quad (23b)$$

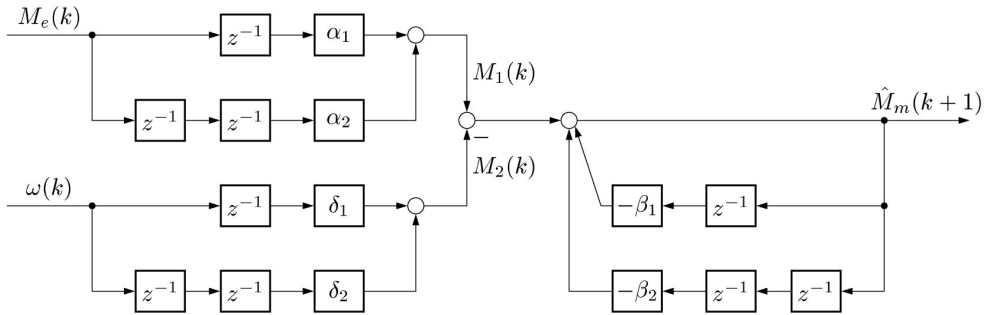
oraz

$$M_2(z) = \delta_1 z^{-1} \omega(z) + \delta_2 z^{-2} \omega(z) - \beta_1 z^{-1} M_2(z) - \beta_2 z^{-2} M_2(z) \quad (23c)$$

i w postaci algorytmu

$$M_2(k) = \delta_1 \omega(k-1) + \delta_2 \omega(k-2) - \beta_1 M_2(k-1) - \beta_2 M_2(k-2) \quad (23d)$$

Wykorzystując zależności (23b) i (23d), można wyznaczyć strukturę cyfrową przedstawiającą algorytm estymacji momentu obciążenia (rys. 3). Na rysunku celowo zapisano z^{-2} rozłożone na dwa bloki. Dzięki temu można zaobserwować dokładnie, ile zmiennych i obliczeń jest konieczne do wykonania podczas realizacji algorytmu.



Rys. 3. Struktura cyfrowa dyskretnego analogu ciągłego obserwatora momentu obciążenia

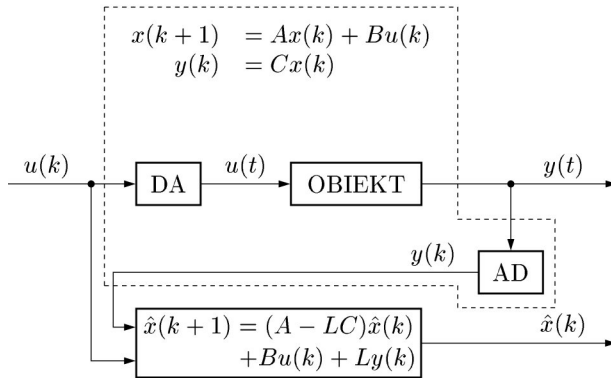
4. Dyskretny obserwator momentu obciążenia

Wykorzystano tu *obserwator zmiennych stanu pełnego rzędu* [15, 31], którego strukturę wraz z obiektem przedstawiono na rysunku 4. Macierz L jest macierzą wzmocnień obserwatora i to ona jest poddawana optymalizacji.

Błąd estymacji zmiennych stanu wynosi

$$e(k) = y(k) - C\hat{x}(k) = C(x(k) - \hat{x}(k)) \quad (24)$$

Dobór macierzy L powinien zapewnić poprawne działanie obserwatora przy nieznanym warunkowi początkowym $x(0)$, przez co rozumie się, że $\hat{x}(k) \rightarrow x(k)$, nawet jeśli $x(k)$ zmienia się oraz proces zbieżności $\hat{x}(k)$ do $x(k)$ jest szybki.



Rys. 4. Dyskretny obserwator w pętli sprzężenia zwrotnego

Proces optymalizacji macierzy L obserwatora rozpoczyna się od zdefiniowania sygnału błędu (24) oraz założenia, że $e(0) \neq 0$. Następnie zapisuje się równanie stanu obiektu

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (25)$$

oraz równanie obserwatora

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + LC(x(k) - \hat{x}(k)) \quad (26)$$

Po podstawieniu (25) do (26) (za $Bu(k)$) otrzymuje się układ autonomiczny

$$e(k+1) = Ae(k) - LCe(k) = (A - LC)e(k) \quad (27)$$

którego rozwiązaniem jest

$$e(k) = (A - LC)^k e(0) \quad (28)$$

W sytuacji gdy wartości własne macierzy $A - LC$ leżą wewnątrz koła jednostkowego, to macierz $(A - LC)^k$ zmierza do macierzy zerowej ze wzrostem k . Oznacza to, że wektor błędu $e(k)$ również zmierza do zera bez względu na błąd początkowy $e(0)$. W wyniku takiego działania minimalizowany jest wpływ błędów identyfikacji modelu matematycznego obiektu (obserwator jest asymptotycznie stabilny). Do celów implementacji algorytmu obserwatora w systemie komputerowym dobrze jest przekształcić równanie (26) do następującej postaci

$$\hat{x}(k+1) = (A - LC)\hat{x}(k) + Bu(k) + Ly(k) \quad (29)$$

Dla napędu podobnie jak dla ciągłego obserwatora momentu obciążenia wykorzystuje się równanie (1b), które w postaci ciągłego równania stanu można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (30)$$

gdzie:

$$u(t) = M_e(t), \quad x(t) = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ M_m(t) \end{pmatrix} \quad (31a)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1/J \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1/J \\ 0 \end{pmatrix} \quad (31b)$$

Natomiast macierz wyjść przyjmuje się *a priori*

$$C = (1 \ 0) \quad (32)$$

System (30) jest obserwowalny. Wynika stąd, że system dyskretny będzie również obserwowalny, jeśli częstotliwość próbkowania nie będzie *patologiczna* [5]. Wtedy można zaprojektować dyskretny obserwator zmiennych stanu (rys. 4). Przyjmuje się macierz korekcji błędu estymacji w postaci

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

gdzie projektowanie obserwatora momentu obciążenia polega na wyznaczeniu elementów l_1 i l_2 .

4.1. Lokalizacja biegunów obserwatora

Zwykle problem lokalizacji pierwiastków równania charakterystycznego rozwiązuje się z wykorzystaniem formuły Ackermanna [3, 31] dla układów z jednym wyjściem (MIMO) lub wykorzystując lokalizację biegunów wg [17] dla układów z wieloma wyjściami. W przypadku obserwatora momentu obciążenia dla układu napędowego nie jest konieczne wykorzystywanie żadnej z tych metod, ponieważ układ jest stosunkowo prosty i obliczenia można przeprowadzić analitycznie.

Pierwszym etapem projektowania dyskretnego obserwatora jest dyskretyzacja macierzy (31b)

$$A = I + \tilde{A}T_s + \tilde{A}^2T_s^2/2 + \dots = \begin{pmatrix} 1 & -T_s/J \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (34a)$$

$$B = \int_0^{T_s} e^{\tilde{A}\xi} d\xi \tilde{B} = \begin{pmatrix} T_s/J \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34b)$$

$$C = (1 \ 0) \quad (34c)$$

Drugim etapem jest wyznaczenie wielomianu charakterystycznego obserwatora

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A + LC) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 + l_1 & T_s/J \\ l_2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \\ &= \lambda^2 + \lambda(l_1 - 2) + \left(1 - l_1 - \frac{T_s}{J} l_2\right) \end{aligned} \quad (35)$$

i porównanie go z wzorcowym wielomianem

$$p(\lambda) = (\lambda - z_1)(\lambda - z_2) = \lambda^2 + \lambda(-z_1 - z_2) + z_1 z_2 = \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0 \quad (36)$$

gdzie z_1, z_2 są biegunami pożądanego układu. W wyniku uzyskuje się zależności

$$l_1 = 2 - z_1 - z_2 \quad (37a)$$

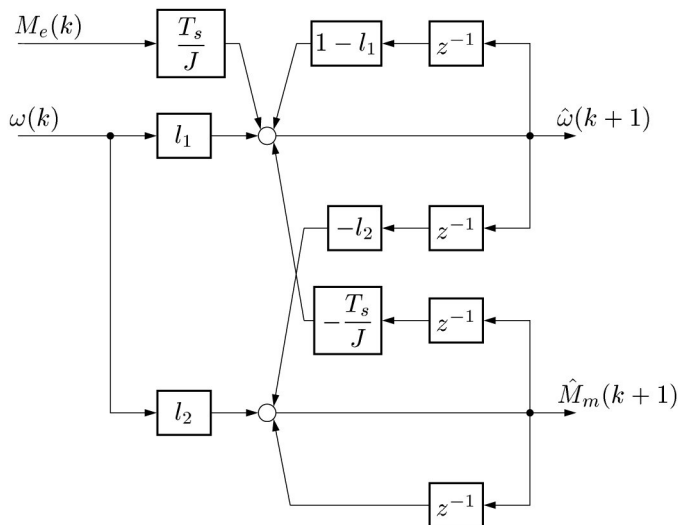
$$l_2 = \frac{J}{T_s} (-1 + z_1 + z_2 - z_1 z_2) \quad (37b)$$

Równanie obserwatora (29) z uwzględnieniem (34) oraz (33) można zapisać w postaci skalarnej

$$\hat{\omega}(k+1) = (1-l_1)\hat{\omega}(k) - \frac{T_s}{J}\hat{M}_m(k) + \frac{T_s}{J}M_e(k) + l_1\omega(k) \quad (38a)$$

$$\hat{M}_m(k+1) = -l_2\hat{\omega}(k) + \hat{M}_m(k) + l_2\omega(k) \quad (38b)$$

Na podstawie równań (38) można wyznaczyć strukturę cyfrową obserwatora (rys. 5).



Rys. 5. Struktura cyfrowa dyskretnego obserwatora momentu obciążenia

Przy doborze biegunów obserwatora można wykorzystać znormalizowane wielomiany Bessela [31], które podano w tabeli 1. Pierwiastki te korespondują z czasem regulacji T_r , po którym sygnał wyjściowy obiektu uzyskuje ok. 99% wartości ustalonej.

Tabela 1
Pierwiastki znormalizowanych wielomianów Bessela

n	Pierwiastki wielomianu $B_n(s)$
1	-4,6200
2	-4,0530 + j 2,3400
3	-5,0093, -3,9668 $\pm j$ 3,7845
4	-4,0156 $\pm j$ 5,0723, -5,5281 $\pm j$ 1,6553

Procedura projektowania układu dyskretnego o założonym czasie T_r jest następująca:

1. Wybrać pierwiastki s_i , $i = 1, \dots, n$ z tabeli 1 dla ustalonego rzędu systemu n .
2. Podzielić pierwiastki przez czas regulacji T_r .
3. Wykorzystać odwzorowanie pierwiastków z dziedziny s do z

$$z_i = e^{s_i T_r} \quad (39)$$

4. Wymnożyć uzyskane pierwiastki tak, aby uzyskać wielomian (36) – jest to wielomian charakterystyczny układu.

Przy projektowaniu obserwatorów momentu obciążenia nie należy stosować zbyt krótkich czasów T_r , ponieważ obserwator traci wówczas naturalne właściwości filtrujące. Z tego względu nie należy stosować obserwatorów typu „DEADBEAT” ($z_1 = z_2 = 0$). Obserwator charakteryzuje się poprawną szybkością i dokładnością jeśli $T_r \geq 12T_s$.

4.2. Zastosowanie problemu LQ do wyznaczenia macierzy L

W dyskusji nad sterowalnością i obserwowalnością można zauważyć bezpośrednią analogię między tymi właściwościami, która wynika z wprowadzenia idei dualizmu [12]. W tym celu rozważa się **system dualny** do

$$\left. \begin{array}{l} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \\ x(0) = x_0 \\ x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m, y(k) \in \mathbb{R}^r \end{array} \right\} \quad (40)$$

w postaci

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{x}(k+1) = A^T \tilde{x}(k) + C^T \tilde{u}(k) \\ \tilde{y}(k) = B^T \tilde{x}(k) \\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}(k) \in \mathbb{R}^n, \tilde{u}(k) \in \mathbb{R}^r, \tilde{y}(k) \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\} \quad (41)$$

Wówczas wynikiem optymalizacji jest statyczne sprzężenie zwrotne o macierzy wzmocnień K i wektor obserwatora można wyznaczyć z zależności [26, 27]:

$$L = K^T \quad (42)$$

W procesie optymalizacji wektora L nie jest możliwe zastosowanie dyskretyzacji ciągłego wskaźnika jakości dla problemu LQ. Z tego względu problem optymalnej estymacji momentu obciążenia można rozważać tylko dla dyskretnego systemu dualnego do (40) o macierzach (34) w postaci (41). Dla którego zapisuje się wskaźnik jakości

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\tilde{x}^T(k) Q \tilde{x}(k) + \tilde{u}^T(k) R \tilde{u}(k) \right] \quad (43)$$

i rozwiązuje dyskretne algebraiczne równanie Riccatiego (ARE)

$$P = Q + A P A^T - A P C^T [R + C P C^T]^{-1} C P A^T \quad (44)$$

gdzie $P = P^T \geq 0$ jest rozwiązaniem i macierz wzmocnień wynosi

$$K = [R + C P C^T]^{-1} C P A^T \quad (45)$$

Następnie stosuje się zależność (42), otrzymując wektor $L = (l_1 \ l_2)^T$ i rozpisując zależność (29) uzyskuje się (38).

Macierze wag $Q^T = Q \geq 0$ i $R^T = R > 0$ wskaźnika (43) najlepiej jest przyjąć w postaci

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}, \quad R = r \quad (46)$$

gdzie $q_1 > 0, q_2 > 0, r > 0$. Jeśli $q_2 = 0$, to para (Q, A) nie jest wykrywalna i nie można rozwiązać problemu LQ.

Rozwiązanie dyskretnego problemu LQ można przeprowadzić z wykorzystaniem metod numerycznych i wyróżnia się tu następujące algorytmy:

- 1) Metoda równania różnicowego [8, 17].
- 2) Zdwojony algorytm [1].
- 3) Metoda Newtona [11].
- 4) Metoda Schura [2, 13, 21].

Algorytm 2) posiada założenie: macierz A musi być nieosobliwa, co jest spełnione w przypadku macierzy (34a). Wymienione algorytmy prowadzą do identycznych wyników, ale różnią się szybkością wykonania. W tym przypadku najlepiej zachowują się algorytmy 2) i 3), przy czym algorytm 2) jest mniej skomplikowany.

Zależności (38) obowiązują również dla przypadku obserwatora LQ (struktura cyfrowa została przedstawiona na rys. 5).

W obu przypadkach obserwatora optymalizowanego z wykorzystaniem dyskretnego modelu ruchu (34) występuje ten sam algorytm, przy czym w obserwatorze LQ posługujemy się wskaźnikiem jakości (43), w którym dobiera się wartości macierzy wag Q i R . Macierze te muszą mieć określoną strukturę i spełniać pewne założenia. W przypadku obserwatora LQ nie ma się bezpośredniego wpływu na czas jego odpowiedzi. Z tego względu zalecane jest przeprowadzenie badań symulacyjnych przed wdrożeniem w układzie przemysłowym tego obserwatora. Wady tej nie ma obserwator wykorzystujący lokalizację biegunów i pierwiastki znormalizowanych wielomianów Bessela. W tym przypadku w procesie doboru wektora L wiadomo ile będzie wynosił czas odpowiedzi obserwatora T_p . W związku z tym obserwatory tego typu mogą być wykorzystywane w układach przemysłowych z samodostrajaniem do parametrów układu technologicznego.

5. Porównanie dyskretnego analogu obserwatora ciągłego z dyskretnym obserwatorem momentu obciążenia

Porównując obie struktury obserwatorów przedstawione na rysunkach 3 i 5, można zauważyć, że:

- obydwa układy są drugiego rzędu,
- dyskretny analog obserwatora ciągłego w realizacji algorytmu potrzebuje minimalnie sześć zmiennych, natomiast obserwator dyskretny cztery,
- minimalna liczba mnożeń w obu obserwatorach wynosi sześć,
- dyskretny analog obserwatora ciągłego wykonuje sześć dodawań w realizacji algorytmu, natomiast obserwator dyskretny siedem.

Jak widać, różnice techniczne pomiędzy oboma obserwatorami są niewielkie. Badania symulacyjne przy zakłóconych sygnałach pomiarowych i po przyjęciu niedokładnej identyfikacji parametrów napędu wykazały, że oba rodzaje obserwatorów działają podobnie. Oznacza to, że czułość tych układów na zakłócenia wzrasta wraz ze skróceniem czasu odpowiedzi, a niedokładność identyfikacji parametrów objawia się błędem w stanie ustalonym (statyzm) oraz błędnym wykrywaniem momentu obciążenia przy szybkich zmianach momentu elektrycznego. W praktycznych zastosowaniach obserwatora momentu obciążenia jest mało istotne, która struktura zostanie wybrana, ale najbardziej naturalnym podejściem wydaje się określenie zadanego czasu odpowiedzi i synteza obserwatora zgodnie ze strukturą z rysunku 5.

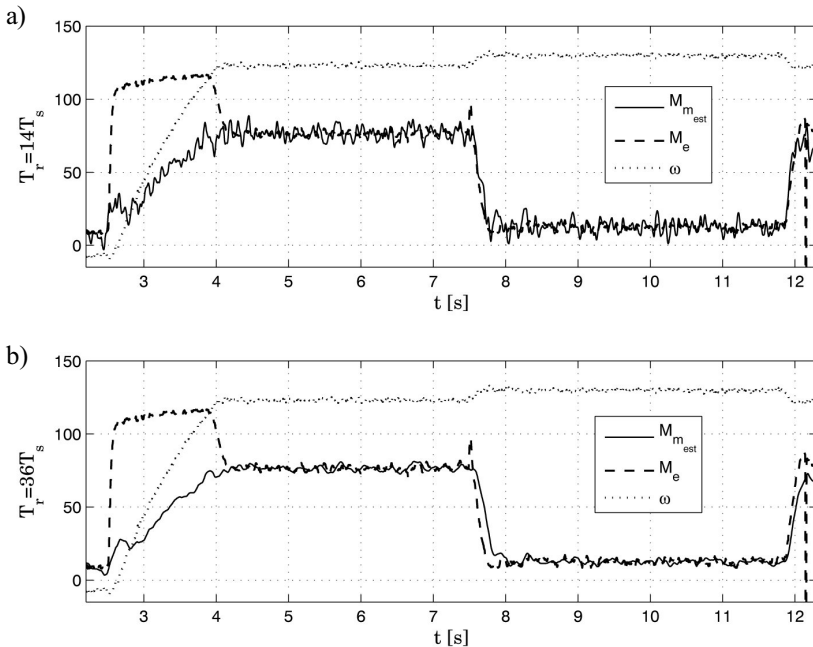
6. Przykłady zastosowań obserwatorów momentu obciążenia

Na rysunku 6 przedstawiona została estymacja M_m dla napędu prądu stałego z obciążeniem generatorowym przy różnych czasach T_r . Z tego powodu w przebiegu momentu widoczna jest liniowa zależność od prędkości kątowej.

Parametry napędu:

$$\begin{array}{lll}
 P_N = 18 \text{ [kW]}, & U_N = 440 \text{ [V]}, & I_N = 47 \text{ [A]}, \\
 n_N = 1800 \text{ [rpm]}, & \omega_N = 188 \text{ [rad/s]}, & \omega_0 = 200,3 \text{ [rad/s]}, \\
 R = 1,8 \text{ [\Omega]}, & L = 99 \text{ [mH]}, & T = L/R = 55 \text{ [ms]}, \\
 \Psi_{eN} = 2,197 \text{ [Vs/rad]}, & \lambda_N = 2 [I_{\max}/I_N], & J = 0,69 \text{ [kgm}^2], \\
 K_p = 75 \text{ [V/V]}, & p = 50I_N \text{ [A/s]}. &
 \end{array}$$

Badania przeprowadzono w kaskadowej strukturze regulacji napędem prądu stałego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej [6]. Czas próbkowania wynosił 0,5 ms. Przedstawione przebiegi zostały uzyskane w systemie bez dodatkowych układów filtrujących. Z tego powodu występują tu dość znaczne zakłócenia. Przykłady przetwarzania sygnałów rzeczywistych dla różnych wartości elementów macierzy wag wskaźnika jakości (43) przedstawiono w pracy [26].



Rys. 6. Odtwarzanie momentu obciążenia na stanowisku badawczym z napędem prądu stałego o mocy 18 kW przy wykorzystaniu obserwatora dyskretnego wg struktury z rysunku 5

7. Podsumowanie

W artykule zaprezentowano dwa podejścia do realizacji problemu dyskretnego obserwatora momentu obciążenia w napędach elektrycznych:

Podejście I wynika ze spojrzenia na problem od strony napędu jako obiektu sterowania. Ten sposób sprowadza się do dyskretyzacji wcześniej utworzonego ciągłego obserwatora momentu obciążenia.

Podejście II jest wynikiem spojrzenia na problem od strony układu sterowania i jego realizacji praktycznej. Sprowadza się do utworzenia obserwatora dyskretnego, po wcześniej przeprowadzonej dyskretyzacji modelu obiektu.

Wybór właściwego rozwiązania wynikającego z obu sposobów podejścia jest istotny z uwagi na szansę unifikacji rozwiązania technicznego, prowadzącej do prostszej budowy układu sterowania wraz z obserwatorem, niższego kosztu i łatwiejszej obsługi. Pod tymi względami korzystniejszym rozwiązaniem jest podejście II tj. obserwator wykonany wg struktury z rysunku 5.

Zastosowanie obserwatora momentu obciążenia w napędach, w których silnik pracuje przy wartościach strumienia mniejszych od wartości znamionowej $\Psi_e < \Psi_{eN}$ (osłabienie pola) może powodować:

- błędy wyznaczenia aktualnej wartości strumienia $b = \frac{\Psi_{e_{rz}}}{\Psi_e}$ ($\Psi_{e_{rz}}$ – wartość rzeczywista, e – wartość przyjęta w optymalizacji obserwatora);
- błędy odtwarzania momentu elektromagnetycznego M_e z równań (1c) dla silnika obcowzbudnego lub z (5), (6), (7) dla silnika indukcyjnego;
- zmianę macierzy A z (34a) do postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -bT_s/J \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

oraz wielomianu charakterystycznego (35) do

$$\det(\lambda I - A + LC) = \lambda^2 + \lambda(l_1 - 2) + \left(1 - l_1 - \frac{bT_s}{J} l_2\right) \quad (48)$$

Jeśli bieguny wielomianu (48) leżą w kole jednostkowym, to obserwator zachowa stabilność. Niestety błędy odtwarzania momentu M_e , czyli sygnału wejściowego obserwatora, wywołają błędy odtwarzanego momentu obciążenia.

Wniosek

Do prawidłowego odtwarzania momentu obciążenia silnika, oprócz właściwego doboru parametrów obserwatora, niezbędny jest dokładny pomiar lub odtwarzanie momentu elektrycznego.

Literatura

- [1] Anderson B.D.O., *Second-order convergent algorithms for the steady-state Riccati equation*. Int. J. Control, 28(2), 1978, 295–306.
- [2] Arnold W.F.III, Laub A.J., *Generalized Eigenproblem Algorithms and Software for Algebraic Riccati Equation*. Proceedings of the IEEE, 72(12), 1984, 1746–1754.
- [3] Astrom K.J., Wittenmark B., *Computer-Controlled Systems*. Prentice Hall, New York 1997.
- [4] Bisztyga K., *Sterowanie i regulacja silników elektrycznych*. WNT, Warszawa 1989.
- [5] Chen T., Francis B., *Optimal Sampled-Data Control Systems*. London, Springer-Verlag, 1995.
- [6] Ciepela A., *Automatyka przekształtnikowego napędu prądu stałego*. Skrypty uczelniane, Nr 1317, Wydawnictwa AGH, Kraków 1992.
- [7] Ciepela A., Koziół R., *Automatyka kompleksowa procesów przemysłowych na przykładzie walcowni*. WNT, Warszawa 1978.
- [8] Dorato P., Levis A.H., *Optimal Linear Regulators: The discrete-Time Case*. IEEE Transaction on Automatic Control, AC-16(6), 1971, 613–320.
- [9] Kaźmierkowski M.P., Krishnan R., Blaabjerg F., *Control in Power Electronics*. Academic Press, San Diego 2002.
- [10] Kaźmierkowski M.P., Tunia H., *Automatic Control of Converter-Fed Drives*. Elsevier, Warszawa 1994.
- [11] Kleinman D.L., *On an Iterative Technique for Riccati Equation Computations*. IEEE Transaction on Automatic Control, AC-13(1), 1968, 114–115.
- [12] Kwakernaak H., Sivan R., *Linear Optimal Control Systems*. Wiley Interscience, New York 1972.
- [13] Laub A.J., Schur A., *Method for Solving Algebraic Riccati Equations*. IEEE Transaction on Automatic Control, AC-24(6), 1979, 913–921.
- [14] Leonhard W., *Control of Electrical Drives*. Springer-Verlag, Berlin 2001.
- [15] Luenberger D.G., *An introduction to observers*. IEEE Trans. on Aut. Control, AC-16(6), 596–602, 1971.
- [16] Novotny D.W., Lipo T.A., *Vector Control and Dynamics of AC Drives*. Oxford University Press, 1996.
- [17] Ogata K., *Discrete-Time Control Systems*. Prentice Hall, 1995.
- [18] Orłowska Kowalska T., *Bezczujnikowe układy napędowe z silnikami indukcyjnymi*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2003.
- [19] Orzechowski T., Sieklucki G., *Zastosowanie metody spektralnej faktoryzacji w doborze regulatora I_q dla napędu prądu stałego*. Elektrotechnika (półrocznik AGH), 17(2), 1998.
- [20] Orzechowski T., Sieklucki G., *Control of Dynamic System with State Variables Constraints, Applied to DC Drive*. SAMS, 38, 2000, 601–620.
- [21] Pappas T., Laub A.J., Sandell N.R., *On the Numerical Solution of the Discrete-time Algebraic Riccati Equation*. IEEE Transaction on Automatic Control, AC-25(4), 1980, 631–641.
- [22] Pełczewski W., Krynce M., *Metoda zmiennych stanu w analizie dynamiki układów napędowych*. WNT, Warszawa 1984.
- [23] Sieklucki G., *Problemy dyskretnego sterowania napędami prądu stałego z uwzględnieniem ograniczeń zmiennych stanu – rozprawa doktorska*. AGH, Kraków 2000.
- [24] Sieklucki G., *Automatyka napędu*. Wydawnictwa AGH, Kraków 2009.
- [25] Sieklucki G., Orzechowski T., Sykulski R., Szostak B., *Start-up of DC drive under load*. Archives of Control Sciences, 17(3), 2007, 283–293.
- [26] Sieklucki G., Orzechowski T., Tondos M., Sykulski R., *Optimalizacja obserwatora momentu przy kwadratowym wskaźniku jakości*. Przegląd Elektrotechniczny, 7, 2008, 29–35.

-
- [27] Sieklucki G., Tondos M., *Linear-quadratic optimization for discrete-time load torque observer*. 11th international Power Electronics and Motion Control conference : 2–4 September 2004, Riga, Latvia, EPE – PEMC(dok. elektroniczny), 2004.
- [28] Tondos M., *Odtwarzanie momentu obciążenia w napędach hutniczych*. Elektrotechnika (półrocznik AGH), z. 17, 1990.
- [29] Trzynadlowski A.M., *Control of Induction Motors*. Academic Press, San Diego 2000.
- [30] Tunia H., Kaźmierkowski M.P., *Podstawy automatyki napędu elektrycznego*. WNT, Warszawa 1983.
- [31] Vaccaro J.R., *Digital Control. A State-Space Approach*. Mc Graw-Hill, Inc., 1995.
- [32] Vas P., *Sensorless Vector and Direct Torque Control*. Oxford University Press, 1998.