

Krzysztof Oprzędkiewicz\*

## Stabilność aperiodyczna układu regulacji z przedziałowym obiektem II rzędu i regulatorem PID

### 1. Uwagi wstępne

W wielu sytuacjach praktycznych zachodzi konieczność syntezy układu regulacji dla obiektu drugiego rzędu, którego parametry znane są jedynie w przybliżeniu lub zmieniają się podczas eksploatacji urządzenia (np. na skutek zużywania się jego elementów), przy czym zmiana wartości parametrów obiektu może zmienić podstawowe własności układu regulacji, przykładowo – zamknięty układ regulacji posiadający własności aperiodyczne może stać się układem oscylacyjnym. Taka zmiana podczas eksploatacji systemu sterowania jest w większości przypadków bardzo niekorzystna, a jednocześnie stosunkowo często spotykana w praktyce, np. podczas zużywania się elementów w układach mechanicznych (zawieszenie samochodu, części ruchome siłowników pneumatycznych).

Z tego względu podczas syntezy regulatora stabilizującego obiekt oscylacyjny należy tak dobrać regulator, aby zapewnić aperiodyczność zamkniętego układu regulacji dla całego przewidywanego zakresu niepewności parametrów obiektu.

W pracy zostaną omówione następujące zagadnienia:

- Przedziałowy obiekt II rzędu.
- Geometryczna interpretacja widma obiektu.
- Zamknięty układ regulacji z regulatorem PID dla rozważanego obiektu.
- Stabilność asymptotyczna i aperiodyczna zamkniętego układu regulacji.
- Przykład syntezy regulatora PID dla rozważanej klasy obiektów.

### 2. Przedziałowy obiekt II rzędu

Rozważmy obiekt II rzędu, opisany następującym równaniem stanu:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(q)x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1}$$

---

\* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

W równaniu (1)  $x(t) \in \mathbf{R}^2$ ,  $u(t) \in \mathbf{R}$ ,  $y(t) \in \mathbf{R}$ . Macierz stanu systemu jest przedziałową macierzą Frobeniusa:

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q_1 & -q_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Elementy macierzy stanu (2) są dodatnimi liczbami przedziałowymi:

$$q_1 = [\underline{q}_1, \overline{q}_1], \quad q_2 = [\underline{q}_2, \overline{q}_2], \quad \underline{q}_1 > 0, \underline{q}_2 > 0 \quad (3)$$

Cały obszar niepewnych parametrów obiektu  $Q$  można zdefiniować następująco:

$$Q = \{q \in \mathbf{R}^2 : \underline{q}_1 \leq q_1 \leq \overline{q}_1, \underline{q}_2 \leq q_2 \leq \overline{q}_2\} \quad (4)$$

Zbiór wierzchołków obszaru niepewnych parametrów  $Q$  jest zdefiniowany następująco:

$$q_w = \{[\underline{q}_1, \underline{q}_2], [\underline{q}_1, \overline{q}_2], [\overline{q}_1, \underline{q}_2], [\overline{q}_1, \overline{q}_2]\} \quad (5)$$

Zakładamy, że macierze sterowania i wyjścia są dokładnie znane i są one równe:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}; \quad C = [0 \quad 1] \quad (6)$$

W (6)  $k > 0$  oznacza wzmocnienie statyczne obiektu, którego wartość jest znana z odpowiednią dokładnością.

Transmitancja operatorowa  $G(s, q) = C(sI - A(q))^{-1}B$  obiektu wyznaczona na podstawie (1)–(6) jest funkcją niepewnych parametrów obiektu i ma ona postać następującą:

$$G(s, q) = \frac{k}{s^2 + q_2s + q_1} \quad (7)$$

Widmo systemu może być wyznaczone jako zbiór rozwiązań przedziałowego równania charakterystycznego systemu o następującej postaci:

$$\det(\Lambda I - A(q)) = 0 \quad (8)$$

Każda przedziałowa wartość własna systemu może być zapisana następująco:

$$\Lambda_i(q) = \{\lambda_i(q) : q = [q_1, q_2]^T \in Q, (\lambda_i(q)I - A(q)) = 0\} \quad (9)$$

W przypadku rozważanej klasy systemów dynamicznych każda z przedziałowych wartości własnych jest w przypadku ogólnym liczbą zespoloną, której część rzeczywista i urojona są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned}\Lambda_i^{\text{Re}}(q) &= \text{Re}(\Lambda_i(q)) \\ \Lambda_i^{\text{Im}}(q) &= \text{Im}(\Lambda_i(q))\end{aligned}\tag{10}$$

Całe widmo przedziałowe systemu jest zbiorem wszystkich przedziałowych wartości własnych:

$$\Lambda(q) = \bigcup_{i=1}^2 \Lambda_i(q)\tag{11}$$

Analogicznie można zdefiniować część rzeczywistą i urojoną całego widma:

$$\begin{aligned}\Lambda^{\text{Re}}(q) &= \bigcup_{i=1}^2 \Lambda_i^{\text{Re}}(q) \\ \Lambda^{\text{Im}}(q) &= \bigcup_{i=1}^2 \Lambda_i^{\text{Im}}(q)\end{aligned}\tag{12}$$

W rozważanym przypadku przedziałowe wartości własne są nieliniowymi funkcjami niepewnych parametrów systemu  $q$ .

W przypadku rozważanego systemu widmo może mieć różną postać w zależności od wartości niepewnych parametrów  $q_1$  oraz  $q_2$ : może zawierać dwie różne rzeczywiste wartości własne, jedną podwójną rzeczywistą wartość własną lub też jedną parę wartości własnych zespolonych sprzężonych.

Zauważmy, że w obrębie przestrzeni niepewnych parametrów  $Q$  może wystąpić każda z tych sytuacji.

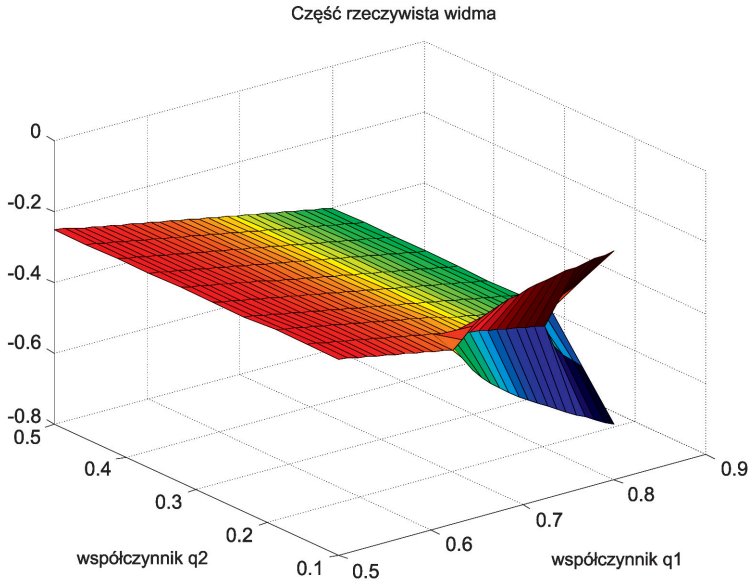
### 3. Geometryczna interpretacja widma obiektu

Ze względu na wymiar przestrzeni niepewnych parametrów równy dwa, widmo punktowe rozważanego systemu posiada prostą interpretację geometryczną [4, 5]. Obie części widma, rzeczywista i urojona mogą być interpretowane jako powierzchnie w odpowiednich przestrzeniach  $\mathbf{R}^3$ , przy czym kształty i lokalizacja tych powierzchni będą zależne od postaci wartości własnych. Przykładowa geometryczna interpretacja części rzeczywistej i urojonej widma pokazana jest na rysunkach 1 oraz 2.

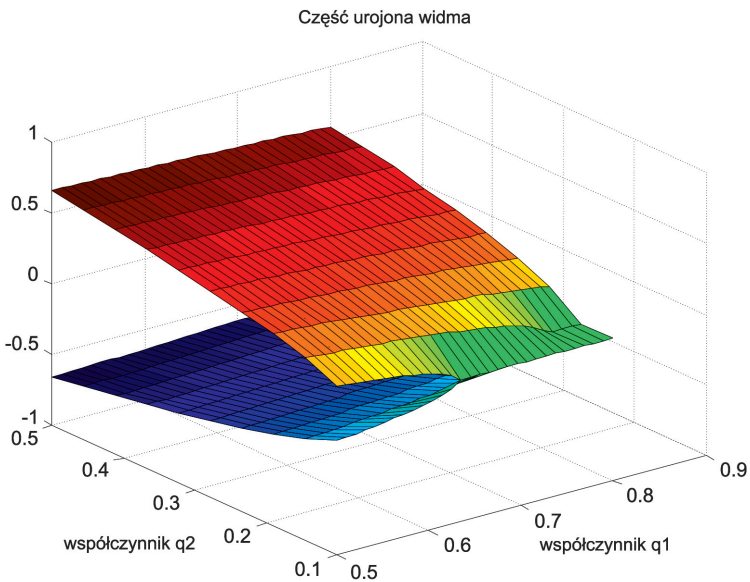
Na podstawie rysunków 1 i 2 oraz znanych własności systemów II rzędu można zauważyć, że:

- Występowanie dwóch różnych rzeczywistych wartości własnych, reprezentowanych przez dwie różne powierzchnie jest równoważne temu, że część urojona danej wartości własnej jest równa zero.
- Dla jednej dwukrotnej rzeczywistej wartości własnej, reprezentowanej przez jedną powierzchnię część urojona jest także równa zero.

- Części urojone różne od zera występują zawsze parami i są reprezentowane przez dwie symetryczne powierzchnie. Część rzeczywista jest wtedy reprezentowana przez jedną powierzchnię.



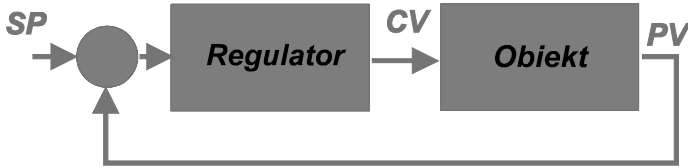
**Rys. 1.** Przykładowa interpretacja geometryczna rzeczywistej części widma systemu



**Rys. 2.** Przykładowa interpretacja geometryczna części urojonej widma

#### 4. Zamknięty układ regulacji dla rozważanego obiektu

Dla opisanego powyżej obiektu rozważmy typowy zamknięty układ regulacji pokazany na rysunku 3.



Rys. 3. Zamknięty układ regulacji rozważanego obiektu

Jako regulator rozważmy idealny regulator PID o transmitancji:

$$G_r(s) = k_r + \frac{\alpha}{s} + \beta s \quad (13)$$

W (13)  $k_r$  oznacza wzmocnienie regulatora,  $\alpha$  oznacza stałą całkowania a  $\beta$  oznacza stałą różniczkowania. W rzeczywistej sytuacji parametry te mają wartości ograniczone przez możliwości realizacji technicznej, co można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} k_r^{\min} &\leq k_r \leq k_r^{\max} \\ \alpha^{\min} &\leq \alpha \leq \alpha^{\max} \\ \beta^{\min} &\leq \beta \leq \beta^{\max} \end{aligned} \quad (14)$$

Parametry (14) budują przestrzeń parametrów realizowanych technicznie, oznaczoną przez  $P$ . Zbiór  $P$  może być zapisany następująco:

$$P = \left\{ p = [k_r, \alpha, \beta]^T \in \mathbf{R}^3 : k_r^{\min} \leq k_r \leq k_r^{\max}, \alpha^{\min} \leq \alpha \leq \alpha^{\max}, \beta^{\min} \leq \beta \leq \beta^{\max} \right\} \quad (15)$$

Zbiór  $P$  opisany przez (15) może być interpretowany jako sześcian w przestrzeni  $\mathbf{R}^3$ .

Zauważmy, że własności całego układu zamkniętego, pokazanego na rysunku 3 są zdefiniowane zarówno przez niepewne parametry obiektu, opisane przez wektor  $q \in Q$ , jak i przez parametry regulatora, opisane przez wektor  $p \in P$ . Z tego względu do dalszego opisu całego układu regulacji, zawierającego obiekt i regulator, można wprowadzić pojęcie uogólnionego wektora parametrów układu regulacji  $v$ :

$$v = [p, q]^T.$$

Z kolei cała przestrzeń parametrów układu regulacji  $V$  może być zdefiniowana następująco:

$$V = P \times Q = \left\{ v = [p, q]^T : p \in P, q \in Q \right\} \subset \mathbf{R}^5 \quad (16)$$

Transmitancja wymuszeniowa układu zamkniętego z rysunku 3 jest równa:

$$G_z(s, v) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L_z(s, v)}{M_z(s, v)} \quad (17)$$

gdzie:

$$L_z(s, v) = k\beta s^2 + kk_r s + k\alpha \quad (18)$$

$$M_z(s, v) = s^3 + (q_2 + k\beta)s^2 + (q_1 + kk_r)s + k\alpha \quad (19)$$

Układ zamknięty opisany przez (17)–(19) jest układem III rzędu o niepewnych parametrach, zależnych od niepewnych parametrów obiektu opisanych przez wektor  $q$  oraz parametrów regulatora opisanych przez wektor  $p$ . Przedziałowe wartości własne tego układu są równe pierwiastkom mianownika transmitancji  $M_z(s, v)$ :

$$\Lambda_i^z(v) = \left\{ \lambda_i^z(v) : M_z(\lambda_i^z, v) = 0 \right\} \quad (20)$$

Podobnie jak w przypadku samego obiektu, każda z wartości własnych zamkniętego układu regulacji jest liczbą zespoloną, której część rzeczywista i urojona są zdefiniowane następująco:

$$\Lambda_i^{z\text{Re}}(v) = \text{Re}\left(\Lambda_i^z(v)\right) \quad (21)$$

$$\Lambda_i^{z\text{Im}}(v) = \text{Im}\left(\Lambda_i^z(v)\right)$$

Całe widmo przedziałowe systemu jest zbiorem wszystkich przedziałowych wartości własnych:

$$\Lambda^z(v) = \bigcup_{i=1}^3 \Lambda_i^z(v) \quad (22)$$

Analogicznie można zdefiniować część rzeczywistą i urojoną całego widma:

$$\Lambda^{z\text{Re}}(v) = \bigcup_{i=1}^3 \Lambda_i^{z\text{Re}}(v) \quad (23)$$

$$\Lambda^{z\text{Im}}(v) = \bigcup_{i=1}^3 \Lambda_i^{z\text{Im}}(v)$$

Części rzeczywista i urojona widma przedziałowego (21)–(23) mogą być interpretowane jako zbiory hiperpowierzchni w przestrzeniach  $\mathbf{R}^6$ .

Transmitancja (17) układu zamkniętego posiada również dwa zera, które są funkcją wektora  $v$ :

$$Z_j^z(v) = \left\{ z_j^z(v) : L_z(z_j^z(v), v) = 0 \right\} \quad (24)$$

Zera układu opisane przez (24) są funkcją parametrów regulatora opisanych przez wektor  $p$ . Są one w przypadku ogólnym liczbami zespolonymi:

$$\begin{aligned} Z_j^{z\text{Re}}(v) &= \text{Re}\left(Z_j^z(v)\right) \\ Z_j^{z\text{Im}}(v) &= \text{Im}\left(Z_j^z(v)\right) \end{aligned} \quad (25)$$

Interpretacja geometryczna części rzeczywistych i urojonych zer (25) jest analogiczna jak widma – mogą one być interpretowane jako hiperpowierzchnie w przestrzeniach  $\mathbf{R}^6$ . Podobnie, jak w przypadku obiektów o niepewnych parametrach z dwuwymiarową przestrzenią niepewnych parametrów, wzajemna lokalizacja przestrzenna tych hiperpowierzchni determinuje wiele istotnych własności układu (stabilność, sterowalność i obserwowalność).

## 5. Stabilność zamkniętego układu regulacji

W obrębie przestrzeni parametrów regulatora  $P$  opisanej przez (15), można wskazać takie wektory  $p$ , dla których zamknięty układ regulacji pokazany na rysunku 3 jest asymptotycznie stabilny. Te wektory budują przestrzeń parametrów zapewniającą stabilność asymptotyczną zamkniętego układu regulacji, która będzie oznaczona przez  $P_s$ :

$$P_s = \{p_s \in P_c : \text{Re}(\Lambda_z(v)) < 0 \forall q \in Q\} \quad (26)$$

W rozważanym wypadku do określenia zbioru  $P_s$  parametrów regulatora gwarantujących stabilność aperiodyczną układu można wykorzystać klasyczne podejście stosowane podczas badania stabilności systemów przedziałowych, jakim jest twierdzenie Charitonova (zob. np. Mitkowski 1991, Białas 2002). Przypomnijmy, że zbadanie stabilności systemu przedziałowego z wykorzystaniem tego twierdzenia polega na zbadaniu stabilności asymptotycznej wszystkich wielomianów wierzchołkowych dla danego wielomianu przedziałowego.

W rozważanym wypadku wielomiany wierzchołkowe dla wielomianu (19) opisującego mianownik transmitancji układu zamkniętego mają następującą postać:

$$\begin{aligned} M_z^{ll}(s, v) &= s^3 + (\underline{q}_2 + k\beta)s^2 + (\underline{q}_1 + kk_r)s + k\alpha \\ M_z^{lh}(s, v) &= s^3 + (\overline{q}_2 + k\beta)s^2 + (\underline{q}_1 + kk_r)s + k\alpha \\ M_z^{hl}(s, v) &= s^3 + (\underline{q}_2 + k\beta)s^2 + (\overline{q}_1 + kk_r)s + k\alpha \\ M_z^{hh}(s, v) &= s^3 + (\overline{q}_2 + k\beta)s^2 + (\overline{q}_1 + kk_r)s + k\alpha \end{aligned} \quad (27)$$

Macierz Hurwitza dla wielomianu (27) ma postać następującą:

$$H(v) = \begin{bmatrix} q_2 + k\beta & k\alpha & 0 \\ 1 & q_1 + k_r & 0 \\ 0 & q_2 + k\beta & k\alpha \end{bmatrix} \quad (28)$$

Na podstawie (28) można zauważyć, że o stabilności rozważanego systemu decyduje wyłącznie podwyznacznik  $H_2$ , gdyż  $H_1$  jest zawsze dodatni dla każdej dodatniej wartości  $q_2, k$  lub  $\beta$ , a wyznacznik z macierzy  $H$  jest dodatni, jeżeli dodatni jest  $H_2$  oraz dodatnie są parametry  $k$  oraz  $\alpha$ . Podwyznacznik  $H_2$  macierzy Hurwitza (28) jest równy:

$$H_2(v) = \begin{vmatrix} q_2 + k\beta & k\alpha \\ 1 & q_1 + k_r \end{vmatrix} = q_1 q_2 + q_1 k\beta + q_2 k k_r - k\alpha \quad (29)$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności asymptotycznej rozważanego układu zamkniętego z obiektem przedziałowym jest, aby podwyznacznik  $H_2(v)$  opisany przez (29) był dodatni dla wszystkich wielomianów wierzchołkowych (27).

Na podstawie powyższych rozważań zbiór parametrów regulatora  $P_s$ , gwarantujących stabilność asymptotyczną zamkniętego układu regulacji dla zadanego obszaru niepewnych parametrów obiektu  $Q$  może być opisany następująco:

$$P_s = \left\{ p_s = [k_r, \alpha, \beta]^T \in P : \forall q = [q_1, q_2]^T \in q_w : q_1 q_2 + q_1 k\beta + q_2 k k_r - k\alpha > 0 \right\} \quad (30)$$

Zauważmy, że zbiór  $P_s$  zdefiniowany przez (30) nie musi być w przypadku ogólnym zbiorem spójnym. Dla zadanego obszaru niepewnych parametrów  $Q$  oraz obszaru realizowalnych fizycznie nastaw regulatora  $P_c$  zbiór  $P$  może być wyznaczony metodami obliczeniowymi na podstawie (30).

W sytuacji, gdy od układu regulacji wymagana jest dodatkowo stabilność aperiodyczna, do wyznaczenia obszarów parametrów można zastosować warunek dostateczny stabilności aperiodycznej wielomianu przedziałowego podany jako twierdzenie 6.2 w pracy S. Białasa (Białas 2002, s. 110).

W przypadku rozważanego mianownika transmitancji układu zamkniętego, opisanego przez (19) badanie stabilności aperiodycznej wielomianu przedziałowego trzeciego stopnia z wykorzystaniem tego twierdzenia polega na sprawdzeniu stabilności asymptotycznej czterech wielomianów Charitonova dla następującego wielomianu przedziałowego stopnia szóstego:

$$B(x) = x^6 + 3x^5 + b_2 x^4 + b_3 x^3 + b_4 x^2 + b_5 x + b_6 \quad (31)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} b_2 &= q_2 + k\beta \\ b_3 &= 2(q_2 + k\beta) \\ b_4 &= q_1 + k k_r \\ b_5 &= q_1 + k k_r \\ b_6 &= k\alpha \end{aligned} \quad (32)$$



Na podstawie twierdzenia 6.2 można stwierdzić, że jeżeli wszystkie cztery wielomiany Charitonova wielomianu przedziałowego (31)–(32) są stabilne w sensie Hurwitza, to wielomian przedziałowy (19) jest stabilny aperiodycznie w całym obszarze niepewnych parametrów obiektu  $Q$  oraz dla ustalonego wektora parametrów regulatora  $p$ . Wszystkie wektory  $p$ , dla których wielomian (19) jest stabilny aperiodycznie, budują zbiór  $P_a$  parametrów regulatora zapewniających stabilność aperiodyczną.

Tablica Hurwitza dla wielomianu (31) ma następującą postać:

$$H_x(v) = \begin{bmatrix} 3 & b_3 & b_5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b_2 & b_4 & b_6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & b_3 & b_5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & b_4 & b_6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & b_3 & b_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 & b_4 & b_6 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (33)$$

Elementy tablicy Hurwitza (33) są opisane przez (32). W celu sprawdzenia stabilności w sensie Hurwitza wielomianu (31) wystarczy sprawdzić co drugi podwyznacznik tablicy Hurwitza (33) dla wszystkich czterech wierzchołków obszaru niepewnych parametrów  $Q$ , czyli np. podwyznaczniki  $H_{x3}(v)$  oraz  $H_{x5}(v)$ . W rozważanym wypadku mają one postać:

$$H_{x3}(v) = \begin{vmatrix} 3 & b_3 & b_5 \\ 1 & b_2 & b_4 \\ 0 & 3 & b_3 \end{vmatrix}_{3 \times 3} \quad (34)$$

$$H_{x5}(v) = \begin{vmatrix} 3 & b_3 & b_5 & 0 & 0 \\ 1 & b_2 & b_4 & b_6 & 0 \\ 0 & 3 & b_3 & b_5 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & b_4 & b_6 \\ 0 & 0 & 3 & b_3 & b_5 \end{vmatrix}_{5 \times 5} \quad (35)$$

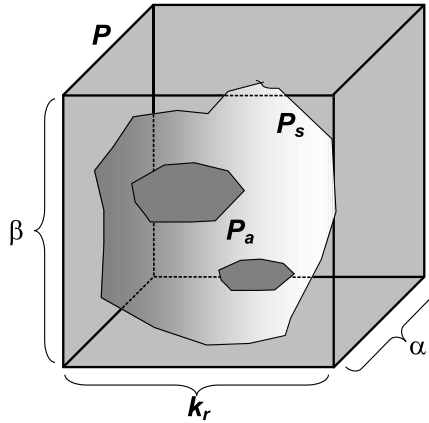
Podsumowując: obszar  $P_a$  parametrów regulatora PID gwarantujących stabilność aperiodyczną może być zdefiniowany następująco:

$$P_a = \left\{ p = [k_r, \alpha, \beta]^T \in P : \forall q = [q_1, q_2]^T \in q_w : H_{x3}(v) > 0, H_{x5}(v) > 0 \right\} \quad (36)$$

W (36) podwyznaczniki  $H_{x3}(v)$  oraz  $H_{x5}(v)$  są opisane przez (34) oraz (35). Należy zauważyć, że zbiór  $P_a$ , podobnie jak zbiór  $P_s$ , nie musi być w przypadku ogólnym zbiorem spójnym, tzn. może zawierać kilka rozłącznych części. Można też zauważyć następujący związek pomiędzy zbiorami  $P$ ,  $P_s$  oraz  $P_a$ :

$$P_a \subset P_s \subset P \quad (37)$$

Interpretacja geometryczna zbiorów  $P_s$  oraz  $P_a$  jest pokazana na rysunku 4. Zbiory te mogą się składać w przypadku ogólnym z pewnej liczby brył trójwymiarowych, zawartych w sześcianie  $P$ .



Rys. 4. Interpretacja geometryczna zbiorów  $P$ ,  $P_a$  oraz  $P_s$

Dokładne wzory analityczne na obszary stabilności aperiodycznej  $P_a$  na podstawie (33), (34) oraz (35) są bardzo złożone i nie zostaną podane, natomiast obszar  $P_a$  dla zadanego obszaru niepewnych parametrów obiektu  $Q$  może być bez problemu wyznaczony metodami obliczeniowymi z wykorzystaniem np. MATLAB-a. Zostanie to pokazane na przykładzie.

## 6. Przykład

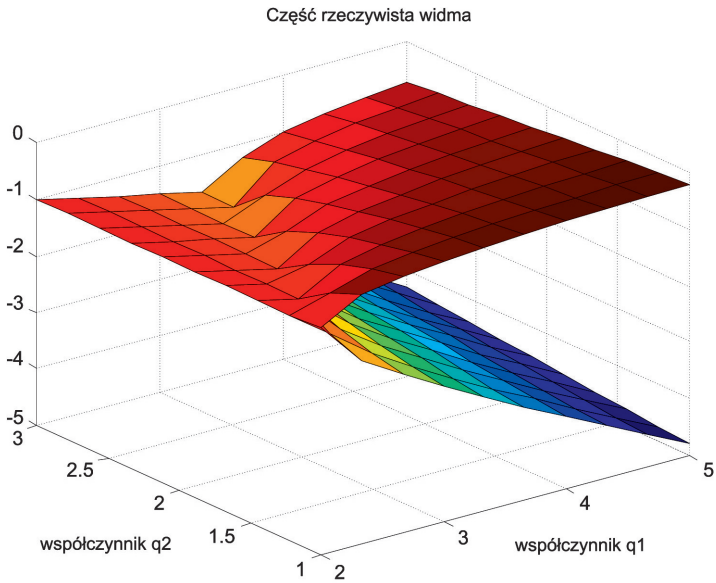
Jako przykład rozważmy wyznaczenie obszaru stabilności aperiodycznej w obszarze parametrów regulatora PID stabilizującego obiekt drugiego rzędu o niepewnych parametrach, opisanego transmitancją (7) o następujących parametrach:  $k = 1$ ,  $q_1 = [2; 5]$ ,  $q_2 = [1; 3]$ . Obszar niepewnych parametrów  $Q$  dla rozważanego obiektu jest zdefiniowany zgodnie z (4):

$$Q = \{q \in R^2 : 2 \leq q_1 \leq 5, \quad 1 \leq q_2 \leq 3\} \quad (38)$$

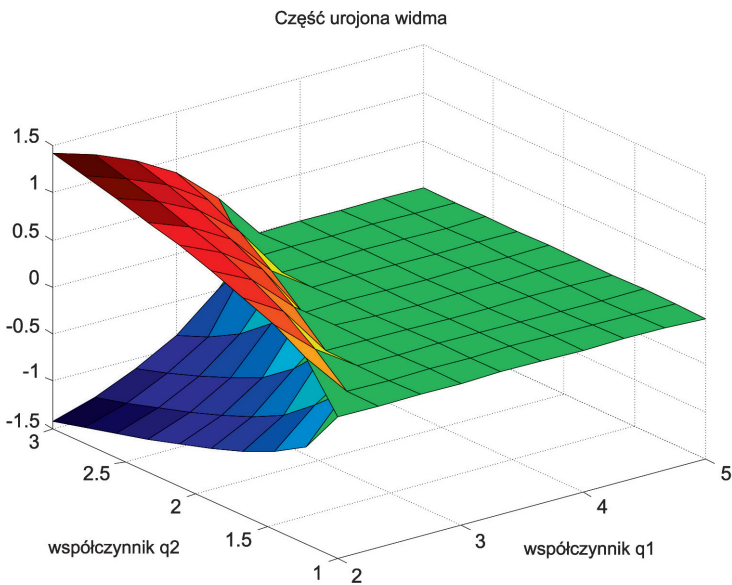
Zbiór wierzchołków obszaru  $Q$  na podstawie (5) ma w rozważanym przypadku postać następującą:

$$q_w = \{[2, 1], [2, 3], [5, 1], [5, 3]\} \quad (39)$$

Geometryczna interpretacja części rzeczywistej i urojonej widma rozważanego obiektu pokazana jest na rysunkach 5 i 6.



**Rys. 5.** Część rzeczywista widma rozważanego obiektu



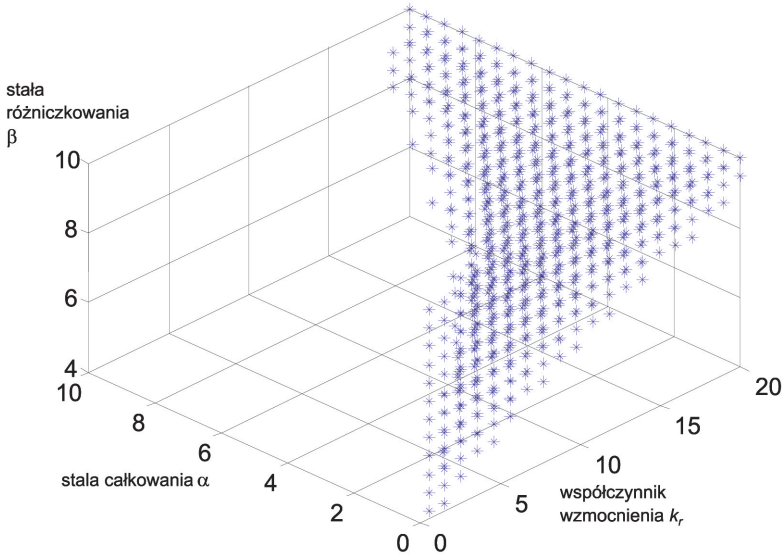
**Rys. 6.** Część urojona widma rozważanego obiektu

Na podstawie rysunków 5 i 6 można zauważyć, że widmo rozważanego obiektu jest częściowo rzeczywiste, a częściowo zespolone w obrębie obszaru niepewnych parametrów  $Q$ .

Załóżmy, że dla rozważanego obiektu należy zbudować układ regulacji z regulatorem PID, który ma zapewnić stabilność aperiodyczną zamkniętego układu regulacji w całym obszarze niepewnych parametrów obiektu  $Q$ , opisanych przez (39). Obszar  $P$  możliwych do realizacji nastaw regulatora jest zdefiniowany następująco:

$$P = \left\{ p = [k_r, \alpha, \beta]^T \in R^3 : k_r \in [0.5; 20.0], \alpha \in [0.005; 10.0], \beta \in [0.0; 10.0] \right\} \quad (40)$$

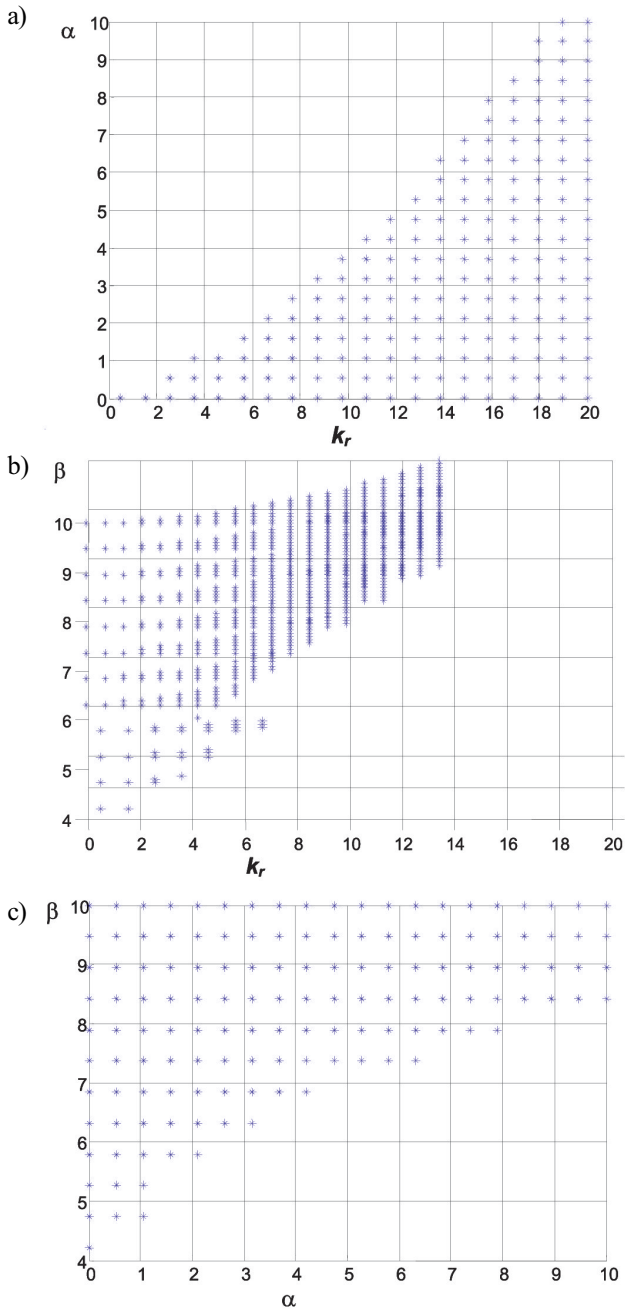
Dla podanego obszaru  $P$  dokonano wyznaczenia zbioru  $P_a$  z wykorzystaniem środowiska MATLAB, na podstawie (34)–(36). W wyniku obliczeń otrzymano zbiór przedstawiony graficznie na rysunku 7. Ma on postać bryły trójwymiarowej, której rzuty na trzy płaszczyzny parametrów regulatora zostały pokazane na rysunkach 8a, b i c.



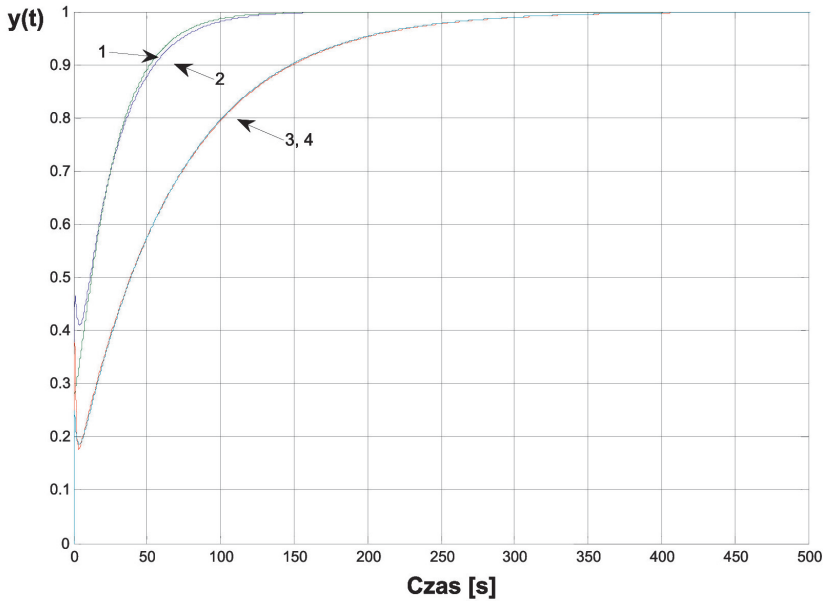
**Rys. 7.** Przestrzeń  $P_a$  parametrów regulatora gwarantująca stabilność aperiodyczną układu regulacji dla dowolnej wartości niepewnych parametrów obiektu

Przykładowe przebiegi odpowiedzi skokowej układu zamkniętego, opisanego transmiacją (18) dla jednej przykładowej wartości wektora  $P_a$  oraz wszystkich czterech wierzchołków obszaru niepewnych parametrów  $Q$  są podane na rysunku 9. Nastawy regulatora i widmo układu zamkniętego dla wykresów z rysunku 9 są podane w tabeli 1.

Na podstawie wyników eksperymentu symulacyjnego można stwierdzić, że zaproponowana metoda syntezy układu regulacji gwarantującego stabilność aperiodyczną obiektu przedziałowego jest poprawna.



**Rys. 8.** Rzut przestrzeni  $P_a$  na płaszczyznę parametrów regulatora  $k_r$  oraz  $\alpha$  (a); rzut przestrzeni  $P_a$  na płaszczyznę parametrów regulatora  $k_r$  oraz  $\beta$  (b); rzut przestrzeni  $P_a$  na płaszczyznę parametrów regulatora  $\alpha$  oraz  $\beta$  (c)



Rys. 9. Odpowiedź skokowa zamkniętego układu regulacji

Tabela 1

Nastawy regulatora PID i widmo układu zamkniętego dla wykresów z rysunku 9

Nastawy regulatora: $k_r = 0,5$ , $\alpha = 0,05$ , $\beta = 1,7949$				
Nr wykresu	(1)	(2)	(3)	(4)
Wierzchołek obszaru niepewnych parametrów $Q$	[1;2]	[1;5]	[3;2]	[3;5]
Widmo układu zamkniętego $\Lambda_z(v)$	-3,3518 -0,4064 -0,0367	-6,5676 -0,1864 -0,0408	-2,2475 -1,5329 -0,0145	-6,2348 -0,5454 -0,0147

## 7. Uwagi końcowe

Uwagi końcowe mogą być sformułowane następująco:

- 1) Zaproponowana metoda syntezy regulatora PID zapewniającego stabilność aperiodyczną zamkniętego układu regulacji dla obiektu przedziałowego II rzędu jest poprawna, ale dość złożona obliczeniowo, co jednak nie stanowi obecnie problemu ze względu na możliwość stosowania środowiska MATLAB.
- 2) Dodatkowo, należy pamiętać, że wykorzystywany w pracy warunek stabilności jest tylko warunkiem dostatecznym, co oznacza, że rzeczywisty obszar stabilności aperiodycznej może być większy od zbioru  $P_a$ .

- 3) Dalszy rozwój zaprezentowanej tematyki będzie obejmował zagadnienia stabilności aperiodycznej z zadaniem współczynnikiem tłumienia układu zamkniętego oraz problemy stabilizacji aperiodycznej z wykorzystaniem innych typów regulatorów (np. regulator redukcyjny).

### Literatura

- Białas S., *Odporna stabilność wielomianów i macierzy*. UWND AGH, Kraków 2002.
- Byrski W., *Obserwacja i sterowanie w systemach dynamicznych*. UWND AGH, Kraków 2007.
- Mitkowski W., *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, 1991.
- Oprzędkiewicz K., *Praktyczne sterowanie systemami dynamicznymi z widmem punktowym i parametrami przedziałowymi*. UWND AGH, seria Rozprawy. Monografie, nr 186, 2008.
- Oprzędkiewicz K., *Odporny regulator PID dla systemu dynamicznego o niepewnych parametrach*. Przegląd Elektrotechniczny, nr 3, 2009, 22–27.
- Turowicz A., *Geometria zer wielomianów*. PWN, 1967.