

Piotr Pałka\*, Eugeniusz Toczyłowski\*

## **Mechanizmy wyceny dóbr za pomocą uogólnionej metody Yoona i metody analizy parametrycznej**

### **1. Wprowadzenie**

W pracy będziemy traktować rynek jako pewną formę gry (*game form*), która tworzy mechanizm rynkowy obsługujący wymianę handlową między uczestnikami rynku. Każdy mechanizm rynkowy (zgodnie z definicją Krishna [1]), interpretuje sygnały  $\theta \in \Theta$  wysłane mu przez  $N$  uczestników rynku. Następnie zgodnie z regułą alokacji  $\xi$  dokonuje przydziału towarów, a następnie zgodnie z regułą wyceny  $\eta$  przydziela wektor wypłat.

Na rynku aukcyjnym rozważana jest wymiana wielu jednostek jednorodnego, towaru niepodzielnego (dla ustalenia uwagi przyjmujemy wolumen każdej oferty równy 1 jednostce). Rozpatrujemy handel dwustronny, to znaczy, że istnieją dwie aktywne strony handlu: sprzedawcy i nabywcy. Rynek giełdowy różni się od rynku aukcyjnego tym, że towar, którym handlujemy jest całkowicie podzielny, a także tym, że każdy oferent składa w ofercie dowolny wolumen towaru, jakim chce on obracać.

Mechanizmy rynkowe oparte na zasadach aukcji podwójnych posiadają dobrze zdefiniowane reguły wyceny. Co więcej, istnieją mechanizmy rynkowe charakteryzujące się pożądanymi właściwościami (zgodność motywacji, zbilansowanie budżetu, indywidualna racjonalność, efektywność w sensie Pareto) [1]. W niniejszej pracy przeanalizujemy, czy można zastosować reguły wyceny zaczerpnięte z teorii aukcji podwójnych do mechanizmów giełdowych. Przeanalizujemy także różnice pomiędzy rynkiem aukcyjnym a rynkiem giełdowym. W końcu na podstawie analizy własności mechanizmu opartego na własności aukcji podwójnej zaprojektujemy regułę opłat stosowalną do rynków giełdowych.

### **2. Rozpatrywana reguła alokacji**

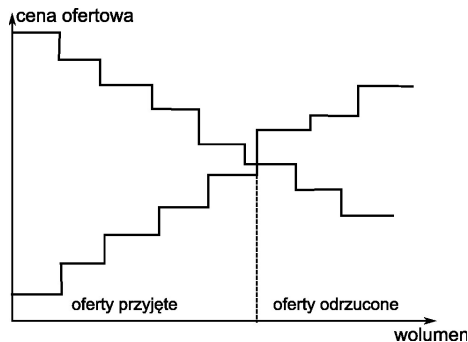
Zakładamy, że w handlu będą aktywnie uczestniczyć obydwie strony: popytu i podaży. Niech w handlu uczestniczy pewna liczba sprzedawców (oznaczymy ich numerację przez

---

\* Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Warszawska

indeks  $l \in S$ ) oraz kupujących (oznaczymy ich numeracją przez indeks  $m \in B$ ). Określają oni swoje preferencje w postaci pewnych sparametryzowanych ofert. Najprostszą ofertą, właściwą dla rynku aukcyjnego, na którym dokonywany jest obrót niepodzielnymi jednostkami dobra, jest złożenie przez uczestników handlu jedynie cen ofertowych. Innymi słowy, każdy kupujący składa ofertę kupna, o określonej przez oferenta maksymalnej cenie, jaką jest on w stanie zapłacić za dany towar ( $e_m$ ). Podobnie, każdy sprzedający składa ofertę sprzedaży, o określonej przez niego minimalnej cenie, za jaką gotów jest on sprzedać dany towar ( $s_l$ ). Dla rynku giełdowego, na którym uczestnicy handlują całkowicie podzielnymi towarami, każdy z nich może posiadać różne maksymalne wielkości zapotrzebowania/produkcji – do parametrów ofertowych dochodzi maksymalny wolumen obrotu, jaki chce zakupić nabywca  $m$ -ty ( $d_m^{\max}$ ), lub sprzedać sprzedawca  $l$ -ty ( $p_l^{\max}$ ).

Dla rynków bez dodatkowych ograniczeń reguła alokacji może być dokonywana za pomocą metody zachłannej. Polega ona na uszeregowaniu ofert kupna według malejących cen ofertowych oraz ofert sprzedaży według cen narastających. Następnie oferty do realizacji są przyjmowane kolejno, począwszy od najkorzystniejszych ofert, aż do wyznaczenia ceny, przy której wolumen przyjętych ofert kupna (z cenami ofertowymi nie niższymi od tej ceny) zrówna się z wolumenem przyjętych ofert sprzedaży (z cenami ofertowymi nie wyższymi od danej ceny). Regułę alokacji można także przeanalizować na podstawie diagramu Marshalla (patrz rys. 1).



Rys. 1. Diagram Marshalla obrazujący klasyczną regułę alokacji

Założmy, że oferty sprzedaży są uporządkowane w sposób niemalejący, zaś oferty kupna w sposób nierosnący. Oznaczmy przez indeks  $k$  numer ostatniej oferty sprzedaży, która została przyjęta, zaś przez indeks  $j$  numer ostatniej oferty kupna, która została przyjęta. Indeks  $k+1$  będzie zaś oznaczał numer pierwszej odrzuconej oferty sprzedaży, indeks  $j+1$  będzie oznaczał numer pierwszej odrzuconej oferty kupna.

### 3. Reguły wyceny

W literaturze istnieje wiele reguł wyceny stosowanych zarówno do rynków aukcyjnych, jak i do rynków giełdowych. Mogą to być proste reguły oparte na wyznaczaniu ceny

równowagi, jak i bardziej złożone, oparte na kombinacji wypukłej pewnych cen ofertowych. Dokładniejszy opis kilku reguł wyceny znajduje się w pracy [2].

W pracy rozpatrywane są dwie reguły wyceny. Pierwsza z nich, opisana w pracy [3], dotyczy rynków aukcyjnych. Druga z nich, opisana przez autorów w pracy [2], dotyczy rynków giełdowych. Reguły te zostaną przedstawione w kolejnych rozdziałach.

### 3.1. Reguła wyceny Yoona

Reguła ta dotyczy rynków aukcyjnych i posiada dobre właściwości mechanizmów: zgodność motywacji, Pareto-efektywność wyników, indywidualną racjonalność, oraz słabe zrównoważenie budżetu. Yoon opisuje swoją metodę jako zmodyfikowaną podwójną aukcję Vickreya (*Modified Vickrey Double Auction*). Proponuje on wyznaczenie rozchylnych cen kupna i sprzedaży. I tak cena sprzedaży jest wyznaczana przez mniejszą z wartości pierwszej odrzuconej oferty sprzedaży i ostatniej przyjętej oferty kupna (patrz równanie (1)), zaś cena zakupu jest wyznaczana przez większą z wartości pierwszej odrzuconej oferty zakupu i ostatniej przyjętej oferty sprzedaży (patrz równanie (2)). W dalszej części pracy regułę tę będziemy nazywać regułą Yoona.

$$\pi^S = \min \{s_{k+1}, e_j\} \quad (1)$$

$$\pi^K = \max \{e_{j+1}, s_k\} \quad (2)$$

#### Zastosowanie reguły Yoona do handlu aukcyjnego

W niniejszym rozdziale przedstawione zostanie rozliczenie za pomocą metody Yoona. Założmy istnienie aukcyjnej giełdy towarowej, na której uczestnicy handlują niepodzielnymi towarami. Po stronie popytu występuje dwunastu nabywców, zaś po stronie podaży dwunastu sprzedawców (tab. 1).

**Tabela 1**  
Ceny ofertowe uczestników aukcyjnej giełdy towarowej

Sprzedawcy	$l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$s_l$ [PLN]	106	108	112	124	127	129	131	133	135	140	148	149
Nabywcy	$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$e_m$ [PLN]	171	166	164	159	156	148	146	145	143	137	136	127

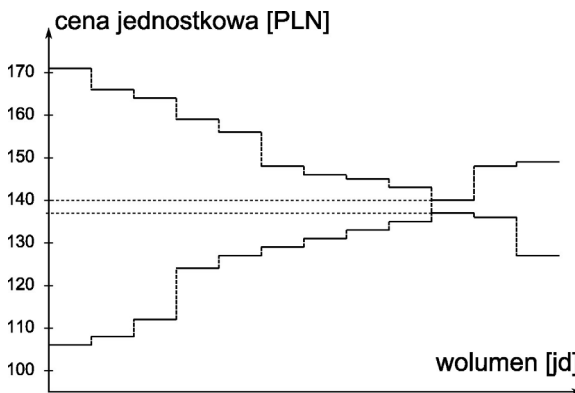
Na podstawie reguły alokacji ustalono, że przyjętych zostało dziewięć ofert sprzedaży oraz dziewięć ofert kupna. Na podstawie wyniku reguły alokacji (patrz rys. 2) widzimy, że indeks ostatniej przyjętej oferty sprzedaży wynosi  $k = 9$ , zaś indeks ostatniej przyjętej ofer-

ty kupna wynosi  $j = 9$ . Na podstawie tych danych obliczamy ceny rynkowe. Podstawiając do wzoru (1) otrzymujemy rynkową cenę sprzedaży równą

$$\pi^S = \min \{s_{k+1}, e_j\} = \min \{140, 143\} = 140 \text{ [PLN]}.$$

Aby otrzymać rynkową cenę kupna, korzystamy ze wzoru (2) i otrzymujemy wartość

$$\pi^K = \max \{e_{j+1}, s_k\} = \max \{137, 135\} = 137 \text{ [PLN]}.$$



**Rys. 2.** Diagram Marshalla obrazujący dane do przykładu dotyczącego handlu na rynku aukcyjnym oraz wynik reguły alokacji

Mechanizm Yoona (*Modified Vickrey Double Auction*) posiada własność zgodności motywacji, który stwarza zachęty dla uczestników do składania szczerych ofert (dowód w pracy [3]). Aby zilustrować tę właściwość, załóżmy, że sprzedawca  $k = 9$  usiłuje wpłynąć na cenę rozliczeniową przez spekulację swoją ceną ofertową. Może on podnosić swoją cenę ofertową do wartości  $140 - \varepsilon$  [PLN] (gdzie  $0 < \varepsilon \ll 1$ ), nie zmieniając alokacji. Jednak w tym przypadku nie zmienia się również rozliczeniowa cena sprzedaży, gdyż nie zmieniają się wartości  $s_{k+1}$  oraz  $e_j$ . Jeśli zaś cena ofertowa sprzedawcy marginalnego przekroczy wartość 140 [PLN], wówczas zmieni się alokacja, gdyż okaże się, że istnieje oferta sprzedaży korzystniejsza od zaoferowanej przez sprzedawcę  $k$ -tego, o cenie ofertowej większej od 140 [PLN] – oferta sprzedawcy  $k + 1$  o cenie równej 140 [PLN]. Sprzedawca  $k = 9$  zostanie odrzucony, a na jego miejsce zostanie przyjęty, dotychczasowo odrzucony sprzedawca  $k + 1 = 10$ . Tak więc widzimy, że podmiotowi  $k = 9$  nie opłaca się spekulować ceną ofertową. Identyczną analizę można przeprowadzić dla każdego innego uczestnika rynku. Tak więc widzimy, że metoda Yoona daje wyniki odporne na spekulacje pojedynczych podmiotów.

### Zastosowanie reguły Yoona do handlu giełdowego

W tym rozdziale przedstawimy zastosowanie reguły Yoona do handlu w środowisku giełdowym. Sprawdzimy, czy reguła zachowa dobre własności. Dane do przykładu stworzone zostały bazując na cenach ofertowych z poprzedniego rozdziału, natomiast wolumeny wzięte zostały jako zaokrąglenie wyników rozkładu  $\sim N(10, 3)$  (patrz tab. 2).

**Tabela 2**  
Oferty uczestników giełdy towarowej

Sprzedawcy	$l$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$s_l$ [PLN]	106	108	112	124	127	129	131	133	135	140	148	149
	$p_l^{\max}$ [jd]	9	13	6	6	17	8	8	9	13	10	11	4
Nabywcy	$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$e_m$ [PLN]	171	166	164	159	156	148	146	145	143	137	136	127
	$d_m^{\max}$ [jd]	9	11	8	9	13	7	7	8	8	13	12	8

Na podstawie reguły alokacji aukcji podwójnych ustalono, że przyjęte zostało dziewięć najtańszych ofert sprzedaży ( $k = 9$ ) oraz dziesięć najdroższych ofert kupna ( $j = 10$ ). Oferta kupna o najniższej spośród przyjętych cenie ofertowej została przyjęta częściowo.

Za pomocą reguły opłat Yoona obliczono ceny rozliczeniowe. Rynkowa cena sprzedaży wynosi

$$\pi^S = \min \{s_{k+1}, e_j\} = \min \{140, 137\} = 137 \text{ [PLN]}.$$

Natomiast rynkowa cena zakupu wynosi

$$\pi^K = \max \{e_{j+1}, s_k\} = \max \{136, 135\} = 136 \text{ [PLN]}.$$

Ceny wyznaczone w poprzednim przykładzie posiadały własność zgodności motywacji. Niestety, w przypadku handlu giełdowego nie zawsze zachodzi taka własność (rys. 3).

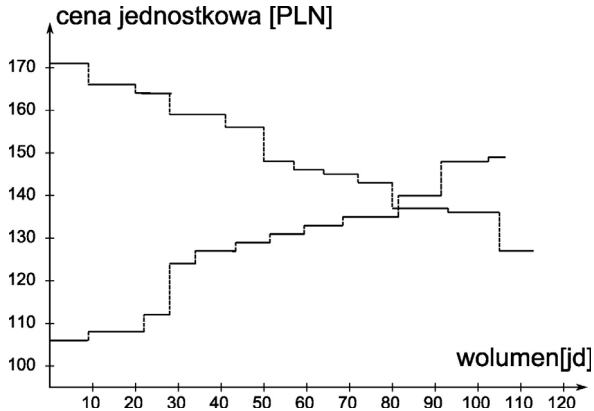
Skupmy się na sprzedawcy  $k = 9$ . Może on podnieść swoją cenę powyżej wartości rynkowej ceny sprzedaży i nie zostaje on odrzucony. Zmienia się jednak jego alokacja. Dla ustalenia uwagi, założmy, że podniósł on swoją cenę rozliczeniową do wartości 138 [PLN]. Jak wspomniano wcześniej, zmienia się jego alokacja. Podwyższenie ceny ofertowej sprzedawcy marginalnego spowodowało odrzucenie marginalnego nabywcy. Zmniejszył się również udział samego marginalnego sprzedawcy (jednak nie został on odrzucony jak w poprzednim przykładzie). Sprzedawca marginalny, podnosząc cenę, usiłował podnieść także cenę rozliczeniową. Rynkowa cena sprzedaży wynosi teraz

$$\pi^S = \min \{140, 143\} = 140 \text{ [PLN]},$$

zaś rynkowa cena zakupu wynosi

$$\pi^K = \max\{137, 138\} = 138 \text{ [PLN]}.$$

Widzimy więc, że sprzedawca marginalny podniósł obydwie ceny rozliczeniowe, w szczególności cenę sprzedaży. Widzimy, że pojawiły się zachęty dla uczestników, aby wpływać na cenę rozliczeniową.



**Rys. 3.** Diagram Marshalla obrazujący dane do przykładu dotyczącego handlu na rynku giełdowym oraz wynik reguły alokacji

Dobre własności mechanizmu Yoona występujące dla rynków aukcyjnych są traczone przy zastosowaniu go do rynków giełdowych. W przypadku klasycznych aukcji podwójnych, równe kwanty wymienianych towarów w aukcjach powodowały, że żaden przyjęty sprzedawca nie mógł zwiększyć swojej ceny ofertowej powyżej wartości  $s_{k+1}$  (bądź obniżyć jej poniżej  $e_{j+1}$  dla nabywców), ponieważ zostawał odrzucony.

W modelu giełdowym nie istnieje przymus wymiany towarów o równych maksymalnych wolumenach. W sytuacji, gdy maksymalne oferowane wolumeny są różne, istnieje możliwość, że sprzedawca (nabywca) marginalny (w ogólności każdy przyjęty podmiot) będzie w stanie zwiększyć swoją cenę ofertową do wartości większej niż  $s_{k+1}$  (mniejszej od  $e_{j+1}$ ) bez pozostania odrzuconymi. Taka możliwość zachodzi w szczególności dla podmiotów o dużym wolumenie. Tak więc w ogólnym przypadku, reguła opłat Yoona zastosowana do modelu giełdowego traci właściwość zgodności motywacji. Sytuacja ta występuje zwłaszcza w przypadku istnienia podmiotów o dużym udziale w rynku.

### 3.2. Parametryczna reguła wyceny

Naszym celem jest zaprojektowanie reguły opłat posiadającej pozytywne właściwości na rynku giełdowym. W szczególności interesuje nas taki mechanizm wyceny, który osłabi

siłę rynkową uczestników. Aby tego dokonać, musimy przeanalizować regułę opłat Yoona (która posiada dobre właściwości w dziedzinie aukcji podwójnych), a następnie przenieść te właściwości uwzględniając specyficzne cechy modelu giełdowego.

Przeanalizujemy szczegółowo sposób wyznaczania ceny sprzedaży w metodzie Yoona. Cena sprzedaży jest równa mniejszej z dwóch wartości: cenie pierwszej nieprzyjętej oferty sprzedaży i cenie ostatniej przyjętej oferty kupna. Obie te ceny wyznaczają wartości, po przekroczeniu których (przez dowolną cenę ofertową przyjętej oferty sprzedaży), po pierwsze zmieni się alokacja towaru, a po drugie (dla aukcji Yoona) oferta ta zostanie odrzucona, a jej miejsce bądź zastąpi pierwsza nieprzyjęta oferta sprzedaży (jeżeli to ona będzie niższa) bądź też odrzucona zostanie także ostatnia przyjęta oferta kupna (jeśli to ona będzie niższa).

Dla modeli ciągłych (jakim jest model giełdowy), takie rozważania mogą zostać przeprowadzone dzięki analizie wrażliwości zadania. Dla poszczególnych parametrów wyznacza ona zakresy zmienności, które nie spowodują zmiany rozwiązania zadania (w szczególności alokacji towarów). W szczególności analiza wrażliwości parametrów funkcji celu modelu giełdowego, daje nam wyniki, które mówią nam o tym, o ile można zwiększyć (bądź zmniejszyć) ceny ofertowe poszczególnych sprzedawców (nabywców), aby nie zmieniła się alokacja towarów. Można to interpretować jako maksymalne zmiany na plus (dla ofert sprzedaży, oznaczmy ten parametr jako  $s_l^+$ ) bądź na minus (dla ofert zakupu, oznaczmy ten parametr jako  $e_m^-$ ) poszczególnych cen ofertowych, jakich może dokonać oferent, nie zmieniając rozwiązania zadania.

Gdy rozpatrzmy rynek, na którym wszyscy oferenci składają oferty o równych maksymalnych wolumenach, wówczas analiza wrażliwości daje nam informację o tym, o ile możemy podnieść poszczególne ceny sprzedaży oraz o ile możemy obniżyć poszczególne ceny zakupu, aby nie zmienić alokacji towarów. Tak więc jeśli chcemy wyznaczyć ceny jak w metodzie Yoona – takie, aby żadnemu podmiotowi nie opłacało się spekulować – cena rozliczeniowa dla każdego przyjętego sprzedawcy będzie wynosiła  $\pi^S = s_l + s_l^+, \forall l \in S: p_l > 0$ , zaś dla każdego przyjętego nabywcy będzie wynosiła  $\pi^K = e_j - e_j^-, \forall m \in B, d_m > 0$ . Jednakże gdy mamy do czynienia z różnymi maksymalnymi wolumenami, wyznaczone w powyższy sposób ceny są wrażliwe na spekulacje – niektóre podmioty mogą zyskiwać pewne nieuzasadnione przychodu spekulując ceną ofertową. Rozwiązaniem tego problemu jest zastosowanie parametrycznej analizy wrażliwości zadania, która jest wielokrotnie wykonywaną analizą wrażliwości. Analizę wrażliwości przeprowadza się aż do chwili, gdy dana oferta zostanie odrzucona.

Algorytm wyznaczania cen rozliczeniowych dla ofert sprzedaży  $l \in S$  przedstawia się następująco:

1. Niech  $\kappa_l := 1$  oraz  $s_l^{(0)} = s_l$ .
2. Przeprowadź analizę wrażliwości zadanie – otrzymujemy parametr  $s_l^{+,(\kappa_l)}$ .
3. Jeśli podmiot nie został odrzucony (tzn.  $p_l > 0$ ), niech:  $s_l^{(\kappa_l)} := s_l^{(\kappa_l-1)} + s_l^{+,(\kappa_l)} + \varepsilon$ , gdzie  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\kappa_l := \kappa_l + 1$ , wróć do punktu (2).

4. Jeśli podmiot został odrzucony wówczas:  $\kappa_l^* := \kappa_l$ , wyznaczamy cenę rozliczeniową dla sprzedawcy  $l$  równą  $\pi_l^S = s_l + \sum_{\kappa_l=1}^{\kappa_l^*} s_l^{+,(\kappa_l)}$ .

Algorytm dla strony zakupu jest analogiczny. Zgodnie z powyższym algorytmem, będziemy kolejno rozwiązywać zadanie ze zmienionym jednym parametrem  $s_l$  (lub  $e_m$ ). Wraz ze zmianą cen ofertowych na wyższe (niższe dla nabywców) badany podmiot będzie zmniejszał swój udział w danym rynku, lecz będzie także wpływał na cenę rynkową. Mechanizm wyznaczania cen rozliczeniowych jest analogiczny do mechanizmu Yoona – dla każdego podmiotu określa cenę rozliczeniową na takim poziomie, aby podmiot nie mógł osiągnąć wyższej ceny poprzez spekulacje.

### Zastosowanie parametrycznej reguły wyceny

Na podstawie powyższej analizy przeprowadźmy przykład, wyznaczający indywidualne ceny rozliczeniowe dla każdego podmiotu. Dane do przykładu są zawarte w tabeli 2. Wektory cen indywidualnych wyznaczonych tą metodą wynoszą:

$$\pi^S = [140 \ 143 \ 140 \ 140 \ 140 \ 140 \ 140 \ 140 \ 143 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\pi^K = [137 \ 137 \ 137 \ 137 \ 136 \ 137 \ 137 \ 137 \ 137 \ 136 \ 0 \ 0]$$

Każdy podmiot został rozliczony taką ceną, która zniechęca go do spekulacji. Każda próba spekulacji ceną ofertową spowoduje odrzucenie podmiotu, który usiłował uzyskać nieuzasadniony przychód. Weźmy dla przykładu sprzedawcę numer  $k = 9$ . Jego cena ofertowa wynosi 135 [PLN], próba podniesienia tej ceny do wartości  $143 - \varepsilon$  [PLN] (gdzie  $0 < \varepsilon \ll 1$ ) nie spowoduje wzrostu ceny rozliczeniowej dla tego sprzedawcy – spowoduje co najwyżej zmniejszenie przyjętego wolumenu. Gdy sprzedawca  $k = 9$  zaoferuje sprzedaż za więcej niż 143 [PLN], wówczas zostanie odrzucony. Taka analiza może zostać przeprowadzona dla każdego podmiotu i przyniesie takie same wyniki.

### Niezbilansowanie budżetu

Parametryczna reguła wyceny daje nam ceny sprzedaży nie mniejsze od cen zakupu. Taka sytuacja powoduje ujemne niezbilansowanie budżetu, co oznacza, że operator rynku musi dopłacać do rozliczenia. Zdefiniujmy wartość niezbilansowania liczoną jako stosunek kosztów jakie ponosi operator do osiągniętej nadwyżki ekonomicznej (patrz równanie (3)).

$$NB = \frac{NK - ZS}{Q} * 100\% \quad (3)$$

Wartość  $NK$  oznacza wartość nakładów jakie ponosi operator aby zakupić towar od sprzedawców, wartość  $ZS$  oznacza zwrot jaki osiąga operator odsprzedając towar nabywcom.  $Q$  oznacza osiąganą nadwyżkę ekonomiczną. W sytuacji gdy zachodzi własność zbilansowania budżetu, wartość niezbilansowania jest równa zero. Obliczmy wartość nie-



zbilansowania dla tego przykładu. Wartość nakładów na zakup towarów wynosi  $NK = \sum_{l \in S} p_l \pi_l^S = 11\,418$  [PLN], zaś zwrot z odsprzedaży wynosi  $ZS = \sum_{m \in B} d_m \pi_m^K = 11\,083$  [PLN], osiągnana nadwyżka ekonomiczna wynosi  $Q = 2686$  [PLN]. Tak więc wartość niezbilansowania wynosi  $NB = 12,4\%$ . Dla porównania, wartość osiąganego niezbilansowania dla przykładu z regułą Yoon i sytuacją rynku aukcyjnego wynosi  $NB = 9,2\%$ . Widzimy więc, że dla tych reguł wyceny zachodzi sytuacja niezbilansowania budżetu – zapewnienie dobrych własności jaką jest osłabienie siły rynkowej poszczególnych uczestników kosztuje. Ceną jaką za to trzeba zapłacić, jest m.in. niezbilansowanie budżetu.

W literaturze istnieją jednak metody przywrócenia zbilansowania budżetu. W pracy [3] Yoon proponuje wprowadzenie opłat za uczestnictwo w handlu dla każdego uczestnika rynku. Wartość opłaty, jaką powinni wnieść uczestnicy, jest obliczana na podstawie rozkładów prawdopodobieństwa wycen poszczególnych uczestników. W ten sposób osiągnane jest zbilansowanie budżetu w sensie wartości oczekiwanej. W przypadku mechanizmów wymiany towarowej działających cyklicznie, takich jak np. rynek bilansujący energii elektrycznej, autorzy niniejszej pracy proponują inną metodę przywrócenia zbilansowania budżetu, jaką jest wprowadzenie opłaty za uczestnictwo w handlu rozliczane *ex post* w sposób skumulowany (np. opłaty tygodniowe, miesięczne itd.). Oprócz tego, można uzależnić wartość opłaty od wolumenu obrotu jakim obraca dany podmiot.

### Metoda poprawy niezbilansowania

Pomimo istniejących metod przywrócenia bilansu budżetowego, należy zadbać o to, aby wartość niezbilansowania była możliwie mała. Zbyt duża wartość niezbilansowania wpływa negatywnie na odbiór modelu obrotu przez uczestników, zwłaszcza z powodu dużych opłat jakie będą oni ponosić. Należy więc poszukać metody zmniejszenia niezbilansowania, jednocześnie nie tracąc dobrych właściwości osłabienia siły rynkowej.

Metoda poprawy rozwiązania ze względu na osiągnany przez podmioty przychód opiera się na analizie wartości ceny ofertowej wynikającej z użyteczności podmiotu. Każdy podmiot może składać cenę ofertową, której wartość wynika z jego użyteczności oraz ze stosowanej strategii. Jeśli założymy, że podmiot stosuje strategię polegającą na szczerym zgłaszaniu swojej użyteczności, wówczas cena ofertowa zgłaszana do operatora rynku jest właśnie prawdziwą ceną ofertową wynikającą z użyteczności podmiotu (cena ta będzie nazywana prawdziwą ceną ofertową).

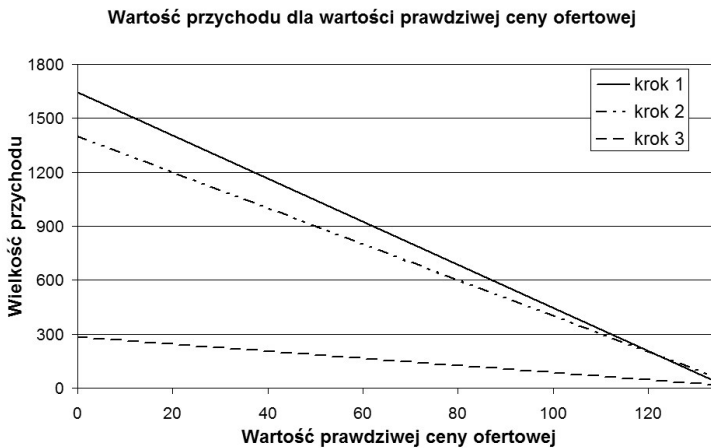
Zauważmy, że nasze analizy reguły wyceny zakładały zwiększanie ceny ofertowej do momentu odrzucenia danego podmiotu. Podnoszenie ceny ofertowej powodowało wzrost ceny rozliczeniowej, ale jednocześnie spadek udziału dla danego podmiotu. W pewnym momencie mimo wzrostu ceny rozliczeniowej, przychód podmiotu zaczyna maleć – ze względu na malejący udział. Zdefiniujmy rzeczywisty przychód osiągnany przez każdego sprzedawcę (4) oraz każdego nabywcę (5) na rynku.

$$I_l = p_l * (\pi_l^S - s_l^0) \quad (4)$$

$$I_m = d_m * (e_m^0 - \pi_m^K) \quad (5)$$

Wartości  $s_l^0$  oraz  $e_m^0$  oznaczają „prawdziwe” ceny ofertowe oznaczające odpowiednio minimalną cenę za którą sprzedawca byłby w stanie sprzedać dany towar, oraz maksymalną cenę za jaką nabywca byłby w stanie za niego zapłacić. Zauważmy, że wartości prawdziwych cen stanowią prywatną informację dla każdego podmiotu. Ponadto może zaistnieć sytuacja, że sam podmiot nie jest w stanie określić dokładnej wartości  $s_l^0$  lub  $e_m^0$ . Dla sprzedawców wartość prawdziwej ceny jest ograniczona z góry przez wartość  $s_l$ . Ograniczenie z dołu trudno jest oszacować, ale może w tym pomóc wiedza ekspercka, znajomość technologii wytwarzania produktu, dane historyczne. Dla nabywców prawdziwa cena jest ograniczona z dołu przez wartość  $e_m$ . Wartość ograniczenia górnego można również oszacować na podstawie podobnych czynników jak w przypadku sprzedawców.

Dla ustalenia uwagi, przyjmiemy, że wartość prawdziwej ceny dla sprzedawcy  $k = 9$  zawiera się w przedziale  $(0,135)$  [PLN]. Ograniczenie od dołu oznacza, że podmiot ten może mieć bardzo małe koszty produkcji (a więc nawet zerowe koszty uzyskania towaru, bądź też chce się pozbyć towaru). Ograniczenie od góry jest równe oferowanej cenie – zakładamy, że oferent postępuje w sposób racjonalny i nie zgłasza ofert na których przyjęciu by stracił.



**Rys. 4.** Wartości przychodu obliczonego na podstawie oszacowanej wartości prawdziwej ceny dla poszczególnych kroków algorytmu. Rysunek dotyczy sprzedawcy  $l = 9$

Na rysunku 4 widzimy jakie relacje zachodzą pomiędzy poszczególnymi prostymi obrazującymi poszczególne kroki algorytmu analizy parametrycznej. Widzimy, że dla kroku  $\kappa_9^3$  wartość przychodu dla każdej ceny prawdziwej z rozważanego przedziału, jest zdominowana przez przychód osiągnięty w krokach  $\kappa_9^1$  i  $\kappa_9^2$ . Tak więc nie musimy włączać kroku  $\kappa_9^3$  do analizy parametrycznej, gdyż sprzedawca marginalny nie uzyska większej wartości przychodu, niezależnie jaką wartość ceny szczerzej ten podmiot posiada (przy założeniu, że jego prawdziwa cena ofertowa zawiera się w przewidzianym przez nas przedziale).

Algorytm poprawy rozwiązania dla sprzedawcy  $l \in S$  przedstawia się następująco. Dla każdego kroku  $\kappa_l = 1, \dots, \kappa_l^*$ :

1. Sprawdź czy zachodzi warunek  $\exists_{s_l^0 \in \langle \underline{s}_l^0, \overline{s}_l^0 \rangle} I^\kappa(s_l^0) \geq I^\lambda(s_l^0), \quad \forall_{\lambda \neq \kappa}$ .
2. Jeśli warunek zachodzi, należy uwzględnić krok  $\kappa$  w algorytmie (obliczaniu ceny rozliczeniowej);
3. Jeśli warunek nie zachodzi dla kroku  $\kappa$ , oraz dla wszystkich kroków  $\lambda: \lambda > \kappa$ , możemy pominąć krok  $\kappa$  (oraz wszystkie kolejne kroki) w obliczaniu ceny rozliczeniowej.

Wyniki zastosowania algorytmu do przykładu są następujące. Widzimy, że niektóre z cen sprzedaży zmniejszyły się, zaś niektóre z cen zakupu wzrosły:

$$\pi^S = [137 \quad 140 \quad 137 \quad 140 \quad 140 \quad 140 \quad 140 \quad 140 \quad 140 \quad 140 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\pi^K = [137 \quad 137 \quad 137 \quad 137 \quad 137 \quad 137 \quad 137 \quad 137 \quad 137 \quad 137 \quad 136 \quad 0 \quad 0]$$

Obliczmy wartość niezbilansowania dla tego przykładu. Wartość nakładów na zakup towarów wynosi  $NK = 11295$  [PLN], zaś zwrot z odsprzedaży wynosi  $ZS = 11096$  [PLN], co daje nam wartość niezbilansowania równą  $NB = 7,4\%$ . Widzimy, że algorytm poprawił wartość niezbilansowania z wartości 12,4% do 7,4%, znacząco zmniejszając koszt osiągnięcia dobrego rozwiązania.

#### 4. Podsumowanie

W pracy przedstawiono dwie reguły wyceny. Reguła wyceny Yoona charakteryzuje się dobrymi właściwościami dla rynków aukcyjnych. My skupiamy się na własności osłabienia siły rynkowej, którą to własność reguła wyceny Yoona posiada dla rynków aukcyjnych lecz traci je dla rynków giełdowych. Na podstawie analizy reguły wyceny Yoona, a także na obserwacji różnic pomiędzy rynkami aukcyjnym a giełdowym, została zdefiniowana nowa, parametryczna reguła wyceny. Na podstawie przedstawionego przykładu widzimy, że nowa reguła zniechęca uczestników do czerpania nieuzasadnionych przychodów z handlu. Tak więc nowa reguła wyceny osłabia siłę rynkową.

Następnie przeprowadzono analizę wartości niezbilansowania jakie występuje zarówno w przypadku aukcji Yoona, jak i w przypadku parametrycznej reguły wyceny. Opracowany algorytm poprawy rozwiązania zmniejszył wartość niezbilansowania, jednocześnie zachowując dobre cechy rozwiązania.

Dalsze prace obejmują badanie kolejnych własności reguły, w szczególności badanie czy reguła zachowuje dobre własności na rynkach wielotowarowych, a także na rynkach z dodatkowymi ograniczeniami.

**Literatura**

- [1] Krishna V., *Auction theory*. Academic Press, 2002.
- [2] Pałka P., Toczyłowski E., *Spełnienie preferencji uczestników dla różnych metod wyznaczania cen w mechanizmach rynkowych*. [w:] Modelowanie preferencji a ryzyko red. T. Trzaskalika, Przyjęto do druku.
- [3] Yoon K., *The modified Vickrey double auction*. Journal of Economic Theory, 101, 2001, 572–584.