

Adam Piłat*

Analiza sprężystości i tłumienia przy lokowaniu biegunów w systemie aktywnego zawieszenia magnetycznego

1. Wprowadzenie

Motyacją do powstania niniejszego opracowania była konieczność dokonania pełnej analizy matematycznej i podobieństwa zawieszenia elektromagnetycznego do systemu mechanicznego. Więcej, ze względu na możliwość przemieszczania się obiektu lewitującego bądź zmiany jego kształtu skutkujące zmianami objętości obszaru działania siły elektromagnetycznej, zachodzi zmiana własności statycznych i dynamicznych układu automatyckiej regulacji zapewniającego stabilizację obiektu lewitującego.

Idea zawieszania ciał w polu magnetycznym sięga 1842 roku. Wtedy to Ernshaw opisał pomysł zawieszenia ciała w polu magnetycznym stałych magnesów. Lata 30. minionego stulecia umożliwiły pierwsze praktyczne zawieszenia obiektów w polu magnetycznym.

W latach 60. zawieszenie magnetyczne zastosowano w satelitach do łożyskowania żyrostabilizatorów oraz kinematycznych akumulatorów energii. Rozwój kolei magnetycznych został zapoczątkowany w 1984 przez Girarda (Sinha 1987). W latach 80. ubiegłego stulecia powstawały pierwsze pociągi magnetyczne w Niemczech (Bohn 1981), Japonii (Suzuki *et al.* 1984), USA, Wielkiej Brytanii (Sinha 1984). Aktualnie prowadzone są prace nad metrem w Szwajcarii, kolejami magnetycznymi w Japonii, Chinach, Stanach Zjednoczonych i Korei.

System magnetycznego zawieszenia został zastosowany także do bezkontaktowego wykonywania pomiarów: ciężaru próbki, sorpcji i rozpuszczalności, termograwimetrii w niskich i wysokich ciśnieniach, mieszaniu cieczy. Zjawisko magnetycznej lewitacji zastosowano w precyzyjnym pozycjonowaniu próbek na potrzeby biotechnologii i produkcji zintegrowanych układów scalonych (Auer i Beek 1994).

Aktywne zawieszenie magnetyczne stanowi podstawę aktywnych łożysk magnetycznych (Maslen 1999), które umożliwiają osiąganie znacznych prędkości obrotowych wirnika przy jednoczesnej eliminacji tarcia mechanicznego oraz medium smarującego, co po-

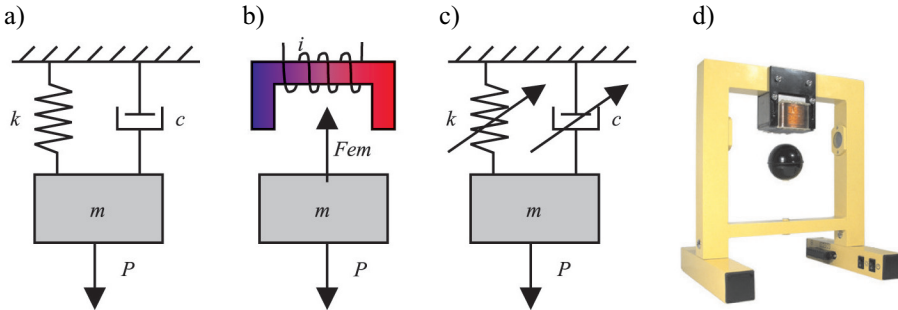
* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

zwala realizować nowe aplikacje. Zastosowanie układu automatycznej regulacji wnoszą możliwość doboru własności dynamicznych łożysk takich jak sprężystość i tłumienie, oraz pełną kontrolę i monitorowanie stanu urządzenia. Przykładowo łożyska magnetyczne zastosowano w następujących aplikacjach: łożyskowanie próbek celem pomiaru lepkości, masowego natężenia przepływu i bardzo niskich ciśnień w ultrapróżni, miniaturowa pompa w sztucznym sercu (Hilton *et al.* 1998), akumulatory energii (Miyagawa *et al.* 1998), wrzeciona obrabiarek (Taniguchi i Veyanna 1996), kompresory dla rurociągów gazowych (Ahrens i Sturgess 2000), napędy dysków twardej (Vuillemin i Awschlimann 1998), żyroskop (Gosiewski *et al.* 1996), turbogeneratory (Canders *et al.* 1994), tłumienie drgań wirników giętkich (Kozanecka 2000) i wiele innych.

2. Aktywne zawieszenie magnetyczne

Elementem wspomnianych we wstępie systemów jest elektromagnes oddziałujący na obiekt ferromagnetyczny (zwoję) zlokalizowany w jego sąsiedztwie. Na zwoję działa pole grawitacyjne lub inna siła elektromagnetyczna przeciwnie skierowana do siły generowanej przez sterowany elektromagnes – zobacz rysunek 1 (Piłat 2002).

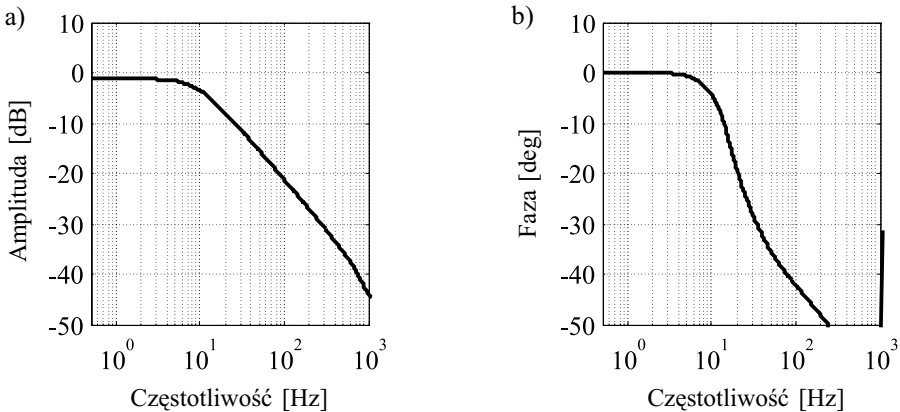
Do sterowania prądem w cewce elektromagnesu używa się trzech typowych rodzajów źródeł zasilania bazujących na sterowaniu napięciem analogowym, sterowaniu sygnałem PWM, sterowaniu natężeniem prądu z użyciem regulatora dla wcześniej wspomnianych wariantów zasilania. Każdy z układów elektronicznych charakteryzuje się odrębnymi właściwościami i ma określony wpływ na dynamikę systemu zawieszenia magnetycznego.



Rys. 1. Idea aktywnego zawieszenia: a) typowa konstrukcja mechaniczna w konfiguracji masa-sprężyna-tłumik; b) zawieszenie elektromagnetyczne; c) schemat bezkontaktowego odpowiednika z możliwością zmiany współczynnika tłumienia i sprężystości; d) system laboratoryjny MLS0201 (Piłat 2005, Piłat i Turnau 2005b)

W dalszej części opracowania rozważania będą dotyczyły zastosowania sterownika natężenia prądu w cewce działającego w oparciu o zmianę częstotliwości napięcia zasilania. Charakterystyki amplitudowo-fazowe siłownika zasilanego sterownikiem prądowym, pozyskane podczas badań eksperymentalnych z wykorzystaniem analizatora sygnałów dy-

namicznych AGILENT 35670A przedstawia rysunek 2. Sterownik prądowy wraz z silownikiem elektromagnetycznym zapewniają brak tłumienia i przesunięcia fazowego w paśmie do 10 Hz. Pozwala to na prowadzenie badań dotyczących lewitacji obiektu w dopuszczalnym zakresie przemieszczeń przy utrzymanych parametrach układu wykonawczego. Zastosowanie sterownika prądowego pozwoliło na uproszczenie konstrukcji systemu oraz zmniejszenie stałej czasowej układu wykonawczego względem konstrukcji zasilanej sygnałem napięciowym PWM lub analogowo.



Rys. 2. Charakterystyki amplitudowo-fazowe silownika elektromagnetycznego sterowanego prądowo

2.1. Modelowanie

Rozważmy model systemu magnetycznego zawieszenia sterowany prądowo, który można opisać równaniem różniczkowym postaci:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -K_{em} i^2 x_1^{-2} m^{-1} + g \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:

- x_1 – odległość zwory od elektromagnesu [m] ($x_{10} \in (0, x_{1\max})$ $x_1 > 0$),
- x_2 – prędkość przemieszczania się zwory [m/s],
- m – masa zwory [kg],
- g – przyspieszenie ziemskie [m/s^2],
- K_{em} – stała elektromagnesu charakteryzująca jego konstrukcję [Nm^2/A^2],
- i – natężenie prądu w cewce elektromagnesu [A] ($i \geq 0$).

W celu ilustracji zagadnień przyjęto następujące wartości poszczególnych parametrów układu aktywnego zawieszenia magnetycznego (zob. tab. 1) – pozyskane z procedur identyfikacji laboratoryjnego systemu eksperymentalnego (rys. 8). Obiektem lewitującym –

zworą elektromagnesu jest ferromagnetyczna sfera o promieniu 25 mm, która przemieszcza się pionowo w osi siłownika elektromagnetycznego. Prędkość ruchu jest różna w zależności od tego czy sfera pozostaje pod wpływem siły grawitacji czy też jest przyciągana przez siłę elektromagnetyczną.

Tabela 1
Zestawienie parametrów i ich wartości

Parametr	Jednostka	Wartość
x_{1min}	[m]	0,001
x_{1max}	[m]	0,020
x_{2min}	[m/s]	0,626
x_{2max}	[m/s]	-32,646
m	[kg]	0,056
g	[m/s ²]	9,810
K_{em}	[Nm ² /A ²]	$2,913 \cdot 10^{-5}$
i_{max}	[A]	3,000

Przyjmijmy, że konstrukcja siłownika elektromagnetycznego nie podlega modyfikacjom podczas działania systemu aktywnego zawieszenia oraz obiekt pozostaje pod wpływem pola stałego grawitacyjnego ($g = \text{const}$) przy braku obecności dodatkowych pól magnetycznych, które mogłyby zarówno wprowadzić zakłócenia w działaniu elektromagnesu, jak i oddziaływać na obiekt lewitujący. Przyjmuje się, iż siłownik elektromagnetyczny ma zrealizowane sprzętowo sterowanie prądowe, które działa tak, że wartość prądu w cewce jest utrzymywana na zadanym poziomie, kompensując tym samym zmiany indukcyjności powodowane ruchami lewitującego obiektu, temperaturowe zmiany własności elektrycznych cewki. Analizując równanie (1), można zauważyć, iż siła elektromagnetyczna zależy od stałej elektromagnesu opisującej jego konstrukcję oraz kwadratu ilorazu prądu i przemieszczenia. Zależność siły elektromagnetycznej od kwadratu wielkości sterującej i sterowanej stanowi główną nieliniowość tego systemu dynamicznego. Dla tak przyjętego modelu systemu aktywnego zawieszenia magnetycznego możliwe jest wyznaczenie stanów równowagi. Można zauważyć, iż prędkość sfery w stanie równowagi jest zerowa ($x_{20}=0$), a dla zadanego położenia ($x_{10}=\text{const}$) wartość prądu zależy od odległości obiektu lewitującego, siły grawitacji oraz od własności siłownika elektromagnetycznego charakteryzowanego zależnością:

$$i_0 = x_{10} \sqrt{mgK_{em}^{-1}} \quad (2)$$

Należy podkreślić, iż ta wprost proporcjonalna zależność od odległości obiektu jest możliwa dzięki zastosowaniu sterownika natężenia prądu w cewce. W innych wariantach

sterowania (Piłat 2002, Piłat i Piątek 2002) liniowy charakter tej zależności nie jest zachowany. Wartość natężenia prądu w punkcie linearyzacji zależy od konstrukcji siłownika elektromagnetycznego, a zatem możliwe jest ustalenie własności układu poprzez odpowiednie zaprojektowanie kształtu rdzenia i parametrów cewki, otrzymując odpowiednią wartość stałej elektromagnesu.

2.2. Model liniowy

Po dokonaniu linearyzacji układu nieliniowego (1), otrzymujemy układ liniowy opisany następującym równaniem:

$$\dot{x} = Ax + Bi, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} \quad (3)$$

gdzie:

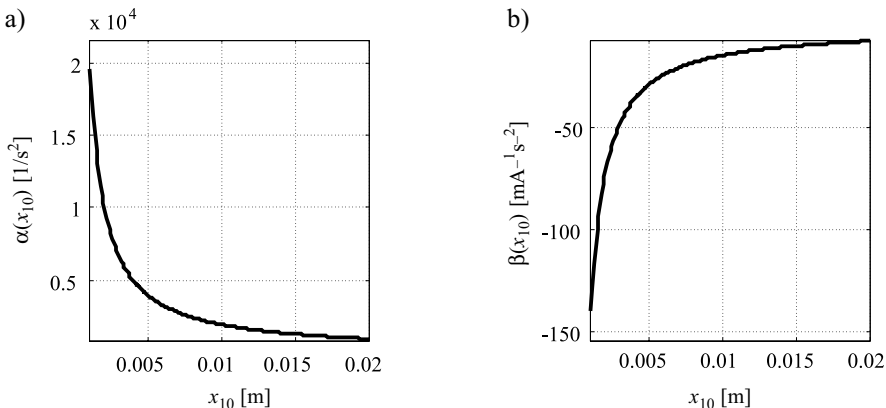
$$\alpha = 2K_{em}i_0^2x_{10}^{-3}m^{-1} [s^{-2}],$$

$$\beta = -2K_{em}i_0x_{10}^{-2}m^{-1} [mA^{-1}s^{-2}].$$

Korzystając z (2), można wyrazić współczynniki α i β w funkcji odległości zwory:

$$\alpha(x_{10}) = 2gx_{10}^{-1}, \quad \beta(x_{10}) = -2x_{10}^{-1}\sqrt{K_{em}gm^{-1}} \quad (4)$$

Ilustrując zakres i charakter ich zmienności – zobacz rysunek 3, można zauważyć, iż nieliniowa postać funkcji $\alpha(x_{10})$ wpływa na nieliniowy charakter zmian wartości własnych liniowego układu otwartego. Implikuje tym samym nieliniowy charakter pożądanego sprzężenia zwrotnego w zależności od odległości zwory od elektromagnesu, przy uwzględnieniu nieliniowej postaci $\beta(x_{10})$.



Rys. 3. Wykresy funkcji: a) $a(x_{10})$; b) $b(x_{10})$

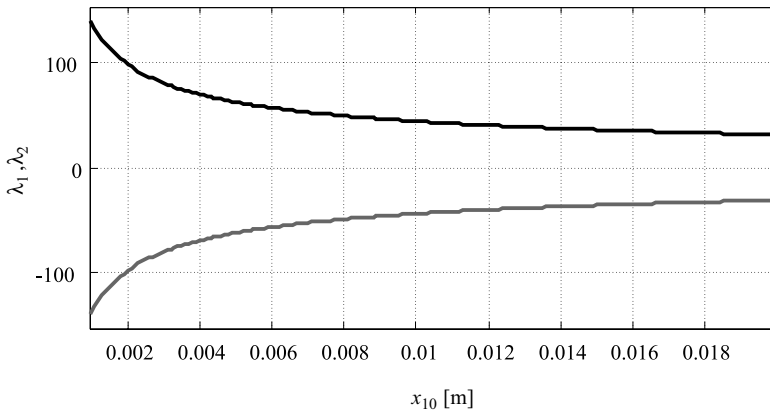
Wartości własne macierzy A określonej w (3) mają postać:

$$\lambda_1 = \sqrt{\alpha} \text{ i } \lambda_2 = -\sqrt{\alpha} \quad (5)$$

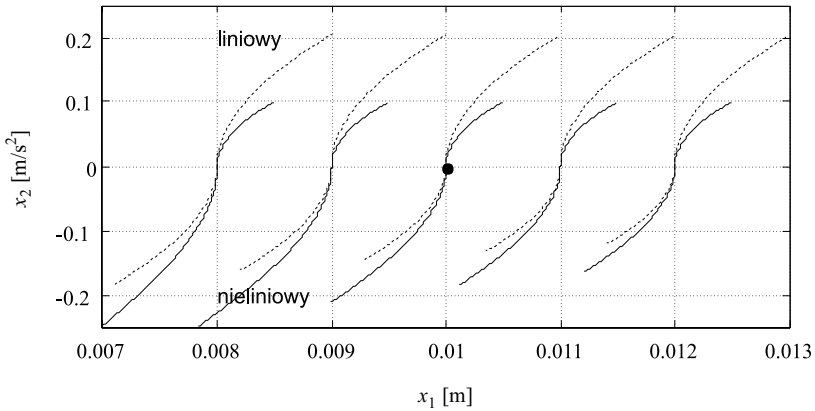
Znamienną cechą konstrukcji aktywnego zawieszenia jest strukturalna niestabilność związana z dodatnią wartością jednego z jej biegunów. W celu zapewnienia lewitacji obiektu konieczne jest zastosowanie sprzężenia zwrotnego. Użycie odpowiedniego sprzężenia pozwala na ustalenie pożądanych własności sprężystości i tłumienia.

Przy przyjętych założeniach na podstawie (4) wnioskuje się, iż współczynnik α jest dodatni, co implikuje rzeczywiste wartości własne. Dla dalszych rozważań należy zauważyć, iż dla przyjętych założeń współczynnik β jest ujemny w całej dziedzinie (4). Wartości własne systemu liniowego zależą od wyboru punktu pracy i wyznaczonego dla niego ustalonego natężenia prądu. Zatem korzystając z zależności (2) do wyznaczenia wartości natężenia prądu dla każdej dopuszczalnej odległości zwory od elektromagnesu, otrzymuje się bezpośrednią zależność wartości własnych od ustalonego punktu pracy $(x_{10}, 0)$. Rozkład wartości własnych (5) ilustruje rysunek 4. Prowadząc badania symulacyjne układu otwartego w postaci nieliniowej i zlinearyzowanej, można zauważyć tożsame własności w małym otoczeniu punktu linearyzacji (zob. rys. 5). Trajektorie skierowane w kierunku ujemnych prędkości odpowiadają przyciąganiu elektromagnesu wskutek działania sterowania $i_0 + 1$ [A], natomiast przeciwnie skierowane odpowiadają ruchom obiektu przy wyłączonym sterowaniu.

Na podstawie rozkładu wartości własnych wnioskuje się, iż do stabilnej pracy układu aktywnego zawieszenia wymagany jest regulator stabilizujący. Własności układu zamkniętego zależą od doboru rodzaju oraz parametrów stabilizującego sprzężenia zwrotnego.



Rys. 4. Rozkład wartości własnych w funkcji odległości



Rys. 5. Portret fazowy układu otwartego – trajektorie układu liniowego i nieliniowego

2.3. Stabilizujące sprzężenie zwrotne

Na podstawie powyższych rozważań można zauważyć, że do stabilizacji zwory w pożądanym punkcie pracy wystarczy zastosowanie regulatora od stanu (Mitekowski 1991, 2000) postaci:

$$i = -k_1x_1 - k_2x_2 \tag{6}$$

Zastosowanie tego typu sprzężenia zwrotnego wymaga użycia sygnału prędkości, który nie jest dostępny bezpośrednio, lecz może być wyznaczany sprzętowo lub programowo poprzez zastosowanie aproksymacji lub z wykorzystaniem obserwatora (Baranowski *et al.* 2008). Na podstawie przeprowadzonych badań sugeruje się stosowanie sprzętowego wyznaczania prędkości przemieszczeń zwory (Piłat 2005).

Mając do dyspozycji dwa współczynniki regulacji, można dowolnie skonfigurować własności dynamiczne sprzężenia zwrotnego (Piłat 2006). Analizując równanie charakterystyczne otrzymanego układu zamkniętego:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha - \beta k_1 & -\beta k_2 \end{bmatrix} x \tag{7}$$

można zauważyć, iż rozkład wartości własnych (13)–(15) zależy od sposobu wyboru parametrów regulatora dla danego prądu punktu pracy i_0 .

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma postać:

$$\lambda^2 + \lambda\beta k_2 + \alpha - \beta k_1 = 0 \tag{8}$$

Własności dynamiczne układu zamkniętego są kształtowane przez odpowiedni dobór parametrów regulatora umożliwiających ustalenie położenia biegunów układu zamkniętego.

Należy zwrócić szczególną uwagę na programową możliwość ustalania własności dynamicznych układu aktywnego magnetycznego zawieszenia, czyli parametrów sprężystości i tłumienia. Współczynniki regulatora k_1 [A/m] oraz k_2 [sA/m] wraz z parametrami α , β , wyznaczają współczynniki sprężystości k [N/m] i tłumienia c [Ns/m] według następujących formuł:

$$k = m(\beta k_1 - \alpha) \quad (9)$$

$$c = m\beta k_2 \quad (10)$$

Liniowa bądź nieliniowa zależność współczynników regulatora od parametrów pozwala na kształtowanie własności sprężysto-tłumiących zawieszenia magnetycznego. Wartości parametrów regulatora są determinowane poprzez własności dynamiczne i kryterium stabilności układu zamkniętego.

Z równania (8) mamy:

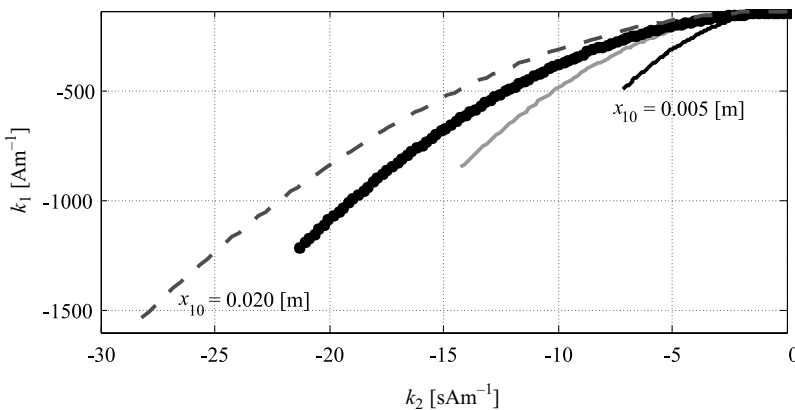
$$\Delta_z = \beta^2 k_2^2 - 4(\beta k_1 - \alpha) \quad (11)$$

Liczba i rodzaj wartości własnych układu zależą od wyznacznika (11) równania charakterystycznego (8) układu zamkniętego (7).

Przyjmując warunek krytyczny $\Delta_z = 0$, otrzymuje się wzajemną zależność współczynników regulatora:

$$k_1 = 0,25\beta k_2^2 - \alpha\beta^{-1}, \quad \Delta_z = 0 \quad (12)$$

Równanie (12) wyznacza granicę obszarów pracy oscylacyjnego i nadkrytycznego (rys. 6). Długość krzywych odpowiada jednakowej zmianie wartości własnych ($\lambda_{1,2} \in [-100, 0]$) i zależy od współczynników α i β , generując tym samym możliwy zakres zmienności parametrów regulatora.



Rys. 6. Wzajemna zależność parametrów regulatora wyznaczona dla kilku punktów linearyzacji

Kontynuując, należy zauważyć, iż dopuszczalne wartości k_1 i k_2 są ograniczone przez warunek asymptotycznej stabilności układu zamkniętego. Dla rozważanego systemu zamkniętego (7) możliwe są następujące przypadki:

$$\text{I) } \Delta_z = 0, \quad k_1 = 0,25\beta k_2^2 - \alpha\beta^{-1} \quad (13)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -0,5\beta k_2$$

$$\text{II) } \Delta_z > 0, \quad k_1 < 0,25\beta k_2^2 - \alpha\beta^{-1} \quad (14)$$

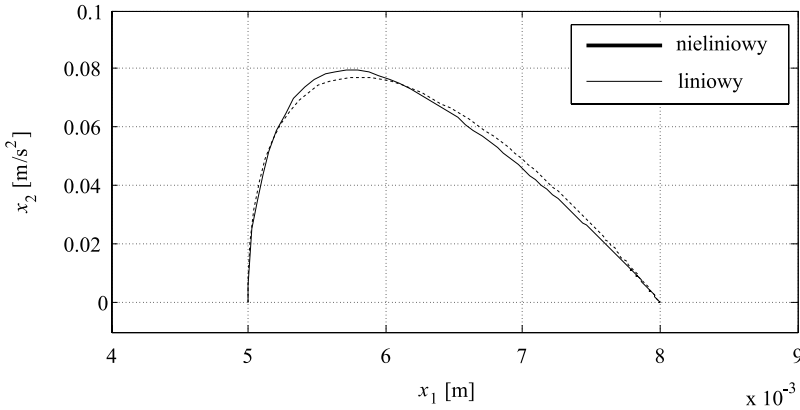
$$\lambda_1 = -0,5(\beta k_2 - \sqrt{\Delta_z}), \quad \lambda_2 = -0,5(\beta k_2 + \sqrt{\Delta_z})$$

$$\text{II) } \Delta_z < 0, \quad k_1 > 0,25\beta k_2^2 - \alpha\beta^{-1} \quad (15)$$

$$\lambda_1 = -0,5(\beta k_2 - j\sqrt{-\Delta_z}), \quad \lambda_2 = -0,5(\beta k_2 + j\sqrt{-\Delta_z})$$

Warunek asymptotycznej stabilności $\text{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, 2$ jest spełniony dla $-\beta k_2 < 0$, skąd $k_2 < 0$. Parametry sprzężenia zwrotnego należy wyznaczyć tak, by uzyskać z góry zadane współczynniki tłumienia i sprężystości układu zamkniętego.

Celem ilustracji powyższej analizy przeprowadzono badania symulacyjne (rys. 7), stabilizując obiekt w $x_{10} = 0,008 \text{ m}$ dla $k = 248,2 \text{ N/m}$ i $c = 8,12 \text{ Ns/m}$, co odpowiada wartościom własnym $\lambda_1 = \lambda_2 = 71$ i generuje parametry regulatora $k_1 = -418,9906, k_2 = -7,9781$.

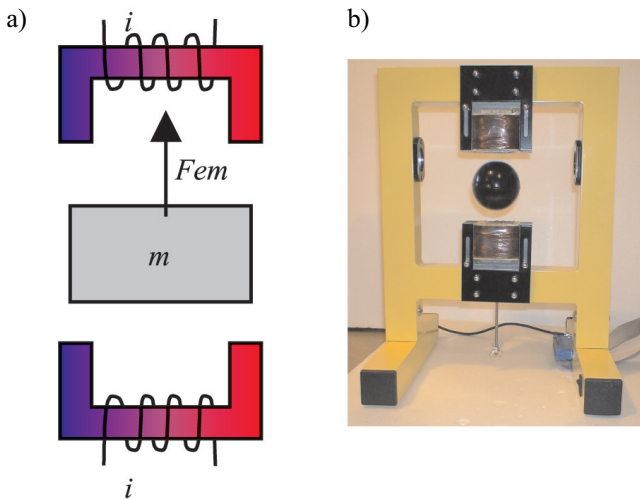


Rys. 7. Portret fazowy układu zamkniętego:
a) trajektoria układu liniowego; b) trajektoria układu nieliniowego

2.4. Badania eksperymentalne

Do przeprowadzenia badań eksperymentalnych wykorzystano stanowisko laboratoryjne magnetycznej lewitacji MLS2Emi – zaprojektowane przez autora niniejszej pracy

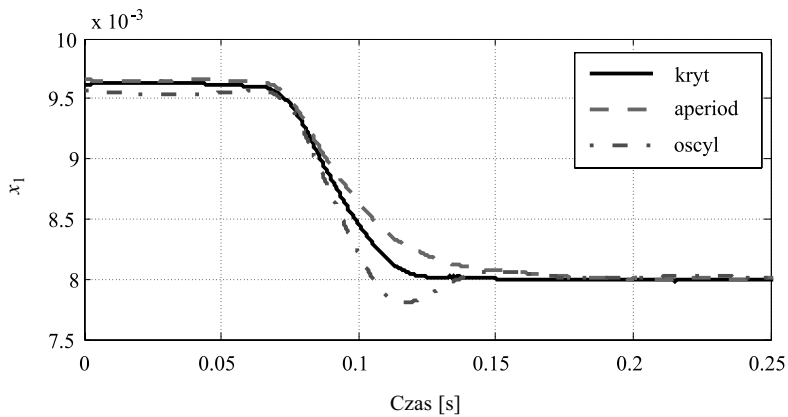
(rys. 8). System MLS2Emi cechuje się dwoma elektromagnesami, optycznym czujnikiem odległości oraz prądowym sterownikiem mocy. System jest sterowany z komputera klasy PC poprzez dedykowaną kartę FastDaq (Piłat, Piątek 2008). Jej znamioną cechą jest równoległe i jednocześnie przetwarzanie sygnałów wejściowych i wyjściowych. Karta została zaprojektowana i wykonana w wyniku wniosków z pracy (Piłat 2002) pozwalając na wyeliminowanie opóźnień i błędów multipleksowania w torach we/wy przetwarzania sygnałów. Dzięki zastosowaniu równoległego przetwarzania sygnałów uzyskano częstotliwość rzędu 10 kHz pracy układu w pętli sprzężenia zwrotnego, co pozwoliło na poszerzenie zakresu programowalnych sprężystości i tłumień.



Rys. 8. System magnetycznego zawieszenia z dwoma elektromagnesami:
a) schemat ideowy; b) model laboratoryjny (Piłat 2008)

Zastosowanie drugiego elektromagnesu umożliwia bezkontaktową zmianę warunków lewitacji poprzez wytworzenie dodatkowej siły działającej w kierunku zgodnym z działaniem siły grawitacji. Pozwala to na szersze testowanie i diagnozowanie własności regulatora stabilizującego aniżeli w przypadku stosowania układu z jednym elektromagnesem.

Na podstawie przeprowadzonej analizy teoretycznej wyznaczono parametry punktu pracy oraz parametry regulatora. Celem zmiany warunku początkowego chwilowo zwiększono siłę generowaną przez dolny elektromagnes. Po jej wyłączeniu kula była przemieszczana w otoczenie punktu linearyzacji poprzez zaprojektowany regulator. Zamiana parametrów regulatora pozwoliła zaobserwować zmienny charakter odpowiedzi układu zgodnie z oczekiwaniami. Celem zilustrowania (rys. 9) zmiany własności dynamicznych sprzężenia zwrotnego dokonano modyfikacji parametrów regulatora poprzez zmianę parametru k_2 o wartość 2,0.



Rys. 9. Zmiana położenia sfery wskutek wyłączenia zewnętrznej siły dla trzech przypadków ustalonych własności dynamicznych układu zamkniętego

3. Wnioski

Podsumowując przeprowadzoną analizę teoretyczną oraz weryfikację wyników w postaci badań eksperymentalnych, należy stwierdzić, iż system aktywnego magnetycznego zawieszenia pozwala na kształtowanie własności dynamicznych układu zamkniętego przez projektanta. Uwzględnienie tych pożądaných własności w procedurze projektowania i konstruowania siłownika elektromagnetycznego pozwala na otrzymanie odpowiednich wartości sprężystości i tłumienia takiego zawieszenia. Ustawienie parametrów sprzężenia zwrotnego spełniającego warunek aperiodyczności jest kluczowe ze względu na ograniczony zakres przemieszczeń sfery poprzez konstrukcję systemu zawieszenia i wymagany zakres przemieszczeń. Warunek ten jest szczególnie istotny przy zastosowaniu sprzężenia w łożyskach magnetycznych.

Praca powstała częściowo w ramach badań statutowych AGH oraz podczas realizacji projektu POL-POSTDOC II, PBZ/MEiN/01/2006/48

Literatura

- Ahrens M., Sturgess K. 2000: *Oil Free Compressor Systems for Gas Pipelines: Is Now The Time?* 7th International Symposium on Magnetic Bearings, 23–25 August, ETH Zurich, Switzerland, s. 7
- Auer F., Beek H. 1994: *Practical Application of a Magnetic Bearing and Linear Propulsion Unit for Six Degrees of Freedom Positioning*. 4th International Symposium on Magnetic Bearings, 23–26 August, Zurich, Switzerland, s. 183–188
- Bania P. 1999: *Model i sterowanie magnetyczną lewitacją*. Praca Dyplomowa, Katedra Automatyki AGH, Kraków
- Baranowski J., Piątek P., Piłat A. 2008: *Nonlinear observer design for the magnetic levitation system*. Recent advances in control and automation, Warsaw, Academic Publishing House EXIT, s. 63–72

- Bohn G. 1981: *The Electromagnetic Levitation and Guidance Technology of The 'TRANSPID' Test Facility Emsland*. IEEE Transactions on Magnetics, vol. MAG-20, no. 5, s. 1666–1671
- Canders W., Ueffing N., Schrader U., Larssonneur R. 1994: *MTG400: A Magnetically Levitated 400 KW Turbo Generator System for Natural Gas Expansion*. 4th International Symposium on Magnetic Bearings, 23–26 August, Zurich, Switzerland, s. 435–440
- Gosiewski Z., Falkowski K. 1996: *Two-Axial Gyroscope with Magnetically Supported Rotor*. 5th International Symposium on Magnetic Bearings, 28–30 August, Kanazawa, Japan, s. 65–70
- Hilton E., Allaire P., Baloh M. 1998: *Magnetic Suspension Test Controller for a New Continuous Flow Ventricular Assist Device*. 6th International Symposium on Magnetic Bearings, 5–7 August, Massachusetts, USA, s. 87–94
- Kozanecka D. 2000: *Digitally controlled magnetic bearing*. (in Polish), Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Łódź
- Maslen E. 1999: *Magnetic Bearings*. University of Virginia, Department of Mechanical, Aerospace and Nuclear Engineering, Charlottesville, Virginia
- Mitkowski W. 1991: *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Warszawa, WNT
- Mitkowski W. 2000: *Systemy dynamiczne*. Kraków, UWND AGH
- Miyagawa Y., Hameno H., Takahata R., Ueyama H. 1998: *A 0.5KWh Flywheel Energy Storage System using A High-Tc Superconducting Magnetic Bearings*. 6th International Symposium on Magnetic Bearings, 5–7 August, Massachusetts, USA
- Piłat A. 2002: *Control of magnetically levitated systems*. Ph.D. Dissertation (in Polish), AGH University of Science and Technology, Kraków, Poland
- Piłat A. 2005: *Programmable analog hardware for control systems exemplified by magnetic suspension*. Proc. of Computer Methods and Systems, November 2005, Kraków, Poland, s. 143–148
- Piłat A. 2006: *PD control strategy for 3 coils AMB*. Proceedings of 10th International Symposium on Active Magnetic Bearings, August 2006, Martigny, Switzerland
- Piłat A. 2008: *Active magnetic suspension and bearing*. Modelling and simulation, InTech Education and Publishing, Vienna, s. 453–470
- Piłat A., Piątek P. 2002: *Influence of PWM control parameters on the control quality for magnetic levitation system*. XIV KKA, Zielona Góra, 24–27 czerwca, s. 1105–1108
- Piłat A., Turnau A. 2005: *Self-organizing fuzzy controller for magnetic levitation system*. Proc. of Computer Methods and Systems, November 2005, Kraków, Poland, s. 101–106
- Piątek P., Piłat A. 2008: *Multichannel control & measurement board with parallel data processing*. Recent advances in control and automation, Warsaw, Academic Publishing House EXIT, s. 373–380
- Sinha P.K. 1984: *Design of Magnetically Levitated Vehicle*. IEEE Transactions On Magnetics, vol. MAG-20, no. 5, s. 1672–1674
- Sinha P.K. 1987: *Electromagnetic Suspension. Dynamics & Control*. London, Peter Perginus Ltd.
- Suzuki S., Kawashima M., Hosoda Y., Tanida T. 1984: *HSST-03 System*. IEEE Transactions On Magnetics, vol. MAG-20, no. 5, s. 1675–1677
- Taniguchi M., Ueyama H. 1996: *Cutting Performance of Digital Controlled Milling AMB Spindle*. 5th International Symposium on Magnetic Bearings, 28–30 August, Kanazawa, Japan, s. 375–379
- Vuillemin R., Awschlimann B. 1998: *Low Cost Active Magnetic Bearings for Hard Disk Drive Spindle Motors*. 6th International Symposium on Magnetic Bearings, 5–7 August, Massachusetts, USA, s. 3–9