

Henryk Górecki*

Rozwiązanie równania czwartego stopnia w przypadku dwóch par pierwiastków zespolonych sprzężonych

Rozważmy równanie

$$a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0 \quad (1)$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ i $a_0 \neq 0$. Kładąc w równaniu (1)

$$s = y - \frac{1}{4} \cdot \frac{a_1}{a_0} \quad (2)$$

otrzymujemy równanie

$$f(y) = y^4 + py^2 + qy + r = 0 \quad (3)$$

gdzie

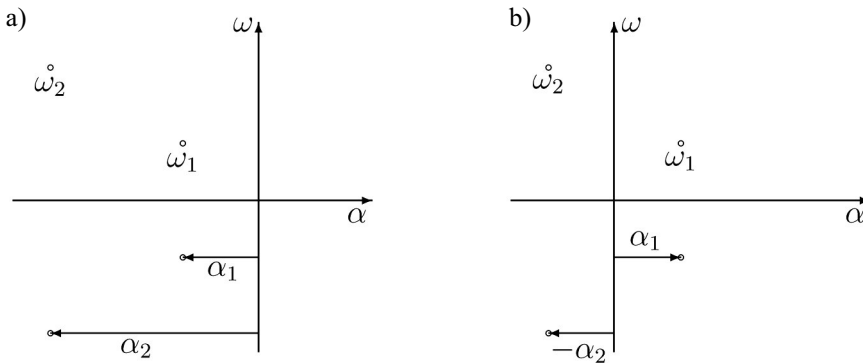
$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{a_2}{a_0} - \frac{3}{8} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \\ q &= \frac{1}{8} \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{a_1 a_2}{a_0^2} + \frac{a_3}{a_0} \\ r &= -3 \left(\frac{1}{4} \frac{a_1}{a_0} \right)^4 + \left(\frac{1}{4} \frac{a_1}{a_0} \right)^2 \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} \frac{a_3}{a_0} + \frac{a_4}{a_0} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Na podstawie twierdzenia Borhardta [3, 1] otrzymujemy następujące warunki konieczne i dostateczne do tego, by równanie (3) miało wyłącznie pierwiastki zespolone sprzężone

$$\left. \begin{aligned} p < 0, \quad -q(p^2 + 12r) > 0 \\ D = 16p^4r - 128p^2r^2 + 256r^3 - 4p^3q^2 + 144pq^2r - 27q^4 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

* Katedra Automatyki, Wydział EAIiE, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

* Wyższa Szkoła Informatyki w Łodzi



Rys. 1. Lokalizacja pierwiastków: a) przed przesunięciem i b) po przesunięciu

Zauważmy, że z warunku, iż przy y^3 w równaniu (3) współczynnik jest równy zero, otrzymujemy (por. rys. 1), iż

$$\alpha_1 + j\omega_1 + \alpha_1 - j\omega_1 + \alpha_2 + j\omega_2 + \alpha_2 - j\omega_2 = 0 \quad (6)$$

gdzie $\alpha_i + j\omega_i$, ($i = 1, 2$) są pierwiastkami równania (3), czyli

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \quad (7)$$

Obie pary zespolone sprzężone, po przesunięciu, mają symetrycznie względem osi $j\omega$ części rzeczywiste.

Położymy w równaniu (3) $y = \alpha + j\omega$, wtedy otrzymamy dwa równania

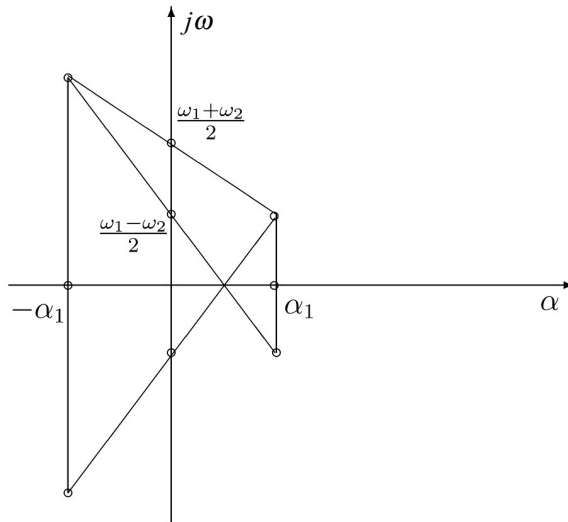
$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= \operatorname{Re} f(\alpha + j\omega) = 0 \\ Q(\omega) &= \operatorname{Im} f(\alpha + j\omega) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

przy czym

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= \alpha^4 + p\alpha^3 - 6\omega^2\alpha^2 + (q - 3p\omega^2)\alpha + r + \omega^4 \\ Q(\omega) &= 4\omega\alpha^3 + 3p\omega\alpha^2 - 4\omega^3\alpha + q\omega\alpha - p\omega^3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

W pracy [2] udowodniono, że po eliminacji ω z równań (9) otrzymuje się równanie szóstego stopnia na α

$$\alpha^6 + \frac{p}{2}\alpha^4 + \left[\left(\frac{p}{4} \right)^2 - \frac{r}{4} \right] \alpha^2 - \left(\frac{q}{8} \right)^2 = 0 \quad (10)$$



Rys. 2. Lokalizacja pierwiastków równania (11)

Pierwiastkami równania (10) są dwa pierwiastki rzeczywiste różniące się tylko znakiem oraz dwie pary pierwiastków urojonych sprzężonych (rys. 2):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha \\ \alpha_2 &= -\alpha \\ \alpha_3 &= j \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ \alpha_4 &= -j \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ \alpha_5 &= j \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \\ \alpha_6 &= -j \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Kładąc w równaniu (10)

$$\alpha^2 = x \quad (12)$$

otrzymuje się równanie trzeciego stopnia

$$x^3 + \frac{p}{2}x^2 + \left[\left(\frac{p}{4} \right)^2 - \frac{r}{4} \right]x - \left(\frac{q}{8} \right)^2 = 0 \quad (13)$$

posiadające, z uwagi na (8) i (9), dwa pierwiastki rzeczywiste ujemne i jeden pierwiastek rzeczywisty dodatni.

Położmy w równaniu (13)

$$x = z - \frac{1}{6} \cdot p \quad (14)$$

otrzymamy równanie

$$z^3 + 3Az + 2B = 0 \quad (15)$$

gdzie

$$3A = \frac{768(p^2 - 4r) - 1024p^2}{12288} = \frac{3(p^2 - 4r) - 4p^2}{48} = -\frac{p^2 + 12r}{48} \quad (16)$$

$$2B = \frac{p^3}{108} - \frac{p(p^2 - 4r)}{96} - \frac{q^2}{64} = \frac{1}{4} \left(\frac{p}{3} \right)^3 - \frac{p}{3} \frac{p^2 - 4r}{32} - \left(\frac{q}{8} \right)^2 \quad (17)$$

Ponieważ

$$B^3 + A^2 < 0 \quad (18)$$

oraz

$$A < 0 \quad (19)$$

Mamy 3 różne pierwiastki rzeczywiste, które są równe:

$$z_1 = -2r \cos \frac{1}{3} \varphi, \quad z_2 = 2r \cos \left(60^\circ - \frac{1}{3} \varphi \right), \quad z_3 = 2r \cos \left(60^\circ + \frac{1}{3} \varphi \right) \quad (20)$$

gdzie

$$\cos \varphi = \frac{B}{r^3}, \quad r = \eta \sqrt{|A|}, \quad \eta = \text{sign } q \quad (21)$$

Po wyznaczeniu z_1, z_2, z_3 , cofając się do początku, otrzymujemy:

$$x_i = z_i - \frac{1}{6} p, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\alpha_1 = +\sqrt{x_1}$$

$$\alpha_2 = -\sqrt{x_1}$$

$$\alpha_3 \alpha_4 = \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right)^2 = x_2$$

$$\alpha_5 \alpha_6 = \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right)^2 = x_3$$

Stąd, dodając i odejmując, mamy:

$$\omega_1 = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}, \quad \omega_2 = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3}.$$

Następnie

$$y_1 = \alpha_1 + j\omega_1, \quad y_2 = \alpha_1 - j\omega_1$$

$$y_3 = -\alpha_1 + j\omega_2, \quad y_4 = -\alpha_1 - j\omega_2$$

gdzie

$$s_i = y_i - \frac{1}{4} \frac{a_1}{a_0}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Czyli ostatecznie

$$s_{1,2} = \alpha_1 \pm j \left(\sqrt{z_2 - \frac{1}{6}} + \sqrt{z_3 - \frac{1}{6}} \right) - \frac{1}{4} \frac{a_1}{a_0},$$

$$s_{3,4} = -\alpha_1 \pm j \left(\sqrt{z_2 - \frac{1}{6}} + \sqrt{z_3 - \frac{1}{6}} \right) - \frac{1}{4} \frac{a_1}{a_0},$$

$$|\alpha_1| = |-\alpha_2| = \frac{1}{4} \frac{a_1}{a_0}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_0}.$$

gdzie z_1, z_2, z_3 są pierwiastkami równania (15) stopnia trzeciego.

Literatura

- [1] Borchardt C.: *Developpments sur l'equation a l'aide, de laquette on determine les inegalités seculaires du mouvement des planetes.* J. Math. pures appl. 12, 1847, s. 50–67
- [2] Górecki H., Szymkat M.: *Application of an elimination method to the study of the geometry of zeros of real polynomials.* Int. J. Control, Vol. 38, No. 1, 1983, s. 1–26
- [3] Krein M., Nejmark M.: *Mietod symmetriczeskich i ermitowych form w teorii otdielenja korniej algebraicznych urawnienij.* Charkow, GNTI 1936
- [4] Suszkiewicz A.K.: *Osnowy wyższej algebry.* Moskwa, OTIZ 1941