AUTOMATYKA • 2009 • Tom 13 • Zeszyt 1

Michał Ganobis*

Projektowanie regulatora *worst case* dla systemu z niepewnym parametrem z wykorzystaniem teorii gier

1. Wprowadzenie

Ważnym założeniem w klasycznej teorii sterowania optymalnego jest dokładna znajomość parametrów systemu. W praktyce jest to trudne, lub wręcz niemożliwe do uzyskania – pomiary obarczone są błędem, a parametry fizyczne obiektu podlegają zmianom. Zmiany takie są niezależne od osoby projektującej sterowanie. Co więcej, parametry mogą niekiedy zmieniać się w dowolny sposób (w pewnych określonych ramach), co uniemożliwia ich przewidzenie i zniwelowanie skutków zmian. W takiej sytuacji klasyczna teoria staje się mało użyteczna – nie potrafimy z jej pomocą udzielić odpowiedzi na pytanie: jak zmiana określonych parametrów systemu wpłynie na postać sterowania optymalnego oraz wartość minimalną wskaźnika jakości.

Jednym z możliwych rozwiązań jest rozpatrzenie problemu sterowania optymalnego obiektu z niepewnym parametrem, jako gry. W takim podejściu rozpatrujemy sterowanie i zmienny parametr jako graczy, a sam problem – jako grę różniczkową pomiędzy nimi. Jedyne założenia, jakie czynimy o niepewnym parametrze, to zakres jego zmienności – tego rodzaju wiedza jest zwykle dostępna. Ujęcie problemu w ten sposób pozwala obliczyć nie tylko sterowanie optymalne, ale również optymalną (z jego punktu widzenia) strategię zakłócenia. Innymi słowy, oprócz obliczenia sterowania optymalnego, jesteśmy w stanie odpowiedzieć na pytanie, jakie zachowanie się niepewnego parametru jest dla nas najbardziej niekorzystne.

2. Gry różniczkowe w sterowaniu optymalnym

W tym rozdziale przedstawione zostaną podstawowe wyniki teorii gier różniczkowych w kontekście wykorzystania przy projektowaniu regulatora *worst-case*. Dokładniejsze omówienie poruszonych tu problemów można znaleźć m.in. w pracach [3, 5], i częściowo [7].

* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

** Work financed by state science funds for 2008-2010 as a research project. Contract no. N N514 417734

2.1. Problem niepewności w ujęciu teorii gier

Rozważmy system dynamiczny postaci

$$\dot{x}(t) = G(x(t), u(x,t), v(x,t), t) \tag{1}$$

gdzie:

$x(t)$ – wektor stanu systemu,
$u(x, \mathrm{t})$ – wektor sterowań,
$v(x, t)$ – wektor strategii zakłóceń.

Jako wskaźnik jakości sterowania stosowany będzie następujący fnkcjonał

$$Q(u, v) = \int_0^T f(x(t), u(x, t), v(x, t), t)dt + g[x(T), T] \tag{2}$$

gdzie $0 < T < \infty$ jest skończonym horyzontem czasowym.

Zakłada się ponadto (zob. np. [3, 5]), że istnieje jedno i tylko jedno ograniczenie na stan końcowy, postaci

$$\varphi(x(T), T) = 0 \tag{3}$$

lub:

$$x_i = x_i(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = x_i(\delta) \tag{4}$$

$$T = T(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = T(\delta) \tag{5}$$

Naszym celem jest zaprojektowanie sterowania optymalnego w najgorszym możliwym przypadku. Skoro sterowanie optymalne $u^*(t)$ minimalizuje wskaźnik jakości (2), można założyć, że najbardziej niekorzystną dla nas strategią $v^*(t)$ będzie taka, która ten wskaźnik maksymalizuje. Takie rozumowanie prowadzi nas do tzw. warunku minimaksu (zob. np. [3, 5, 7])

$$P(u^*, v^*) = \min_{u \in U} \max_{v \in V} [P(u, v)] \tag{6}$$

O sterowaniu $u(t)$ zakładamy, że jest ograniczone.

W takim ujęciu rozpatrujemy sytuację, gdy projektant układu sterowania rozgrywa *grę przeciwko niepewności*. Niepewność parametru traktujemy jak inteligentnego przeciwnika, dla którego optymalną strategią jest strategia maksymalizująca wskaźnik jakości (2).

Powyższe postawienie problemu jest tylko jednym z możliwych. Zauważmy bowiem, że mamy tu do czynienia z tzw. *grą przeciwko naturze*, a więc taką, w której przeciwnik (nazywany umownie *naturą*) nie jest zainteresowany wynikiem gry. Teoria gier rozważa w takiej sytuacji różne podejścia (Laplace'a, Hurwicza, Savage'a i in. – zob. np. [6]). W omawianym przypadku zastosowane zostanie *kryterium Walda*, które zakłada minimalizowanie wpływu najgorszego możliwego przypadku. Innymi słowy, przyjmuje się, że pomimo braku zainteresowania natury wynikiem gry, może ona „przez przypadek” zachować się w sposób maksymalnie niekorzystny – i na taką okoliczność należy się zabezpieczyć.

2.2. Sterowanie optymalne

Aby znaleźć wartości optymalne sterowania oraz niepewności $u^*(t)$, $v^*(t)$, w ogólnym przypadku wykonać należy następujące kroki:

Wyznaczenie funkcjonału *F*

Funkcjonał F jest odpowiednikiem hamiltonianu w klasycznej teorii sterowania optymalnego. Zapisujemy go jako

$$F(x, u, v, t, p) = f(x, u, v, t) + < p, G(x, u, v, t) > \tag{7}$$

gdzie p jest wektorem funkcji sprzężonych, a poprzez <,> oznaczamy iloczyn skalarny.

Zapisanie równań Eulera–Lagrange'a

Na podstawie (1) i (7) zapisujemy równania Eulera–Lagrange'a, w postaci:

$$\dot{x}(t) = G(x, u, v, t) = \frac{\partial F^*}{\partial p} \tag{8}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial F^*}{\partial x} \tag{9}$$

Badanie *F* przy użyciu zasady maksimum

Przy użyciu twierdzeń analogicznych do zasady maksimum Pontriagina (zob. np. [1, 2]) wyznaczyć możemy postać sterowania optymalnego u^* oraz niepewności v^* jako odpowiednio minimalizujących i maksymalizujących funkcjonał (7).

Relaksacja zmiennych

W rzeczywistych przypadkach często spotykamy się z wieloma ograniczeniami na stan. Teoria gier różniczkowych wymaga, by w takiej sytuacji dokonać *relaksacji zmiennych*, tj. wprowadzenia dodatkowych wolnych zmiennych, by ograniczenie mogło zostać zapisane jako jedno równanie ograniczeń na stan końcowy (zob. [5]).

Wyznaczenie warunków końcowych na zmienne sprzężone

Do wyznaczenia warunków końcowych na równania sprzężone $p(t)$ stosujemy następujący warunek transwersalności

$$< p, M >= -\left(f + \frac{\partial g}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial \delta} - \left\langle \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial \delta} \right\rangle \tag{10}$$

gdzie M jest macierzą o elementach (j, k – odpowiednio indeksy wiersza i kolumny)

$$G_j \frac{\partial t}{\partial \sigma_k} - \frac{\partial x_j}{\partial \sigma_k} \tag{11}$$

Rozwiązanie problemu dwugranicznego

W ogólnym przypadku, po wykonaniu powyższych kroków, otrzymamy układ równań różniczkowych z warunkami końcowymi dla p oraz początkowymi dla x, a więc tzw. *problem dwugraniczny*. Rozwiązanie takiego problemu, zarówno analityczne jak i numeryczne, jest w ogólności trudne.

3. Przykład Sterowanie czasooptymalne wózkiem o niepewnej masie

Rozdział ten stanowić będzie próbę wykorzystania teorii gier różniczkowych i projektowania regulatora *worst case* w stosunku do prostego systemu dynamicznego drugiego rzędu.

3.1. System

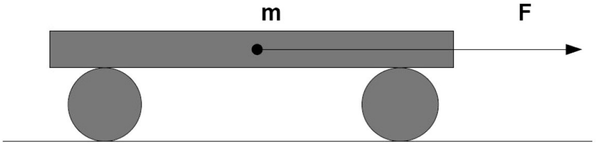
Rozważmy model wózka toczącego się bez tarcia po równym podłożu jak na rysunku 1. Jest on opisany następującymi równaniami:

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{12}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \tag{13}$$

gdzie odpowiednio:

x – położenie wózka,
v – jego prędkość,
F – siła zewnętrzna oddziałująca na wózek, skierowana równolegle do podłoża,
m – masa wózka.



Rys. 1. Obiekt sterowania – wózek toczący się bez tarcia

Siłę traktować będziemy jako wejście systemu, natomiast położenie i prędkość wózka jako zmienne stanu. Po przejściu na typowe oznaczenia, i przyjmując $a = \frac{1}{m}$, uzyskamy ostatecznie następującą postać systemu:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= au \end{aligned} \tag{14}$$

Jest to więc obiekt całkujący z wagą przy wejściu.

3.2. Postawienie problemu

Rozważać będziemy regulator minimalizujący wskaźnik jakości w postaci

$$P(u,v) = \int_0^T dt \tag{15}$$

gdzie T jest czasem osiągnięcia zadanego punktu przestrzeni stanów. Stawiamy więc problem sterowania docelowego w minimalnym możliwym czasie (problem czasooptymalny).

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że masa wózka nie jest jednoznacznie wyznaczoną, dokładną stałą, lecz może zmieniać się w czasie w sposób niezależny od stanu oraz wejścia systemu. Parametr a dany będzie następującą zależnością

$$a = a_0 + v \tag{16}$$

natomiast ograniczenia przyjmują postać:

$$|u| \le u_m \tag{17}$$

$$|v| \le v_m < a_0 \tag{18}$$

Składnik a_0 stanowi „oczekiwaną” wartość a, natomiast v reprezentuje zakres jego niepewności. Zauważmy, że nierówności (17) implikują fakt, że $a > 0$, co jest całkowicie zgodne z fizyczną interpretacją tego parametru (masa nie może przyjmować wartości ujemnych).

3.3. Sterowania ekstremalne i warunki transwersalności

Funkcja F dla systemu (14) będzie mieć postać

$$F = 1 + p_1 x_2 + p_2 a u \tag{19}$$

Wyznaczyć należy teraz sterowania ekstremalne, a więc odpowiednio dla u i v, minimalizujące i maksymalizujące F przy drugiej funkcji ustalonej (zob. np. [5]). W tym przypadku będą to więc odpowiednio:

$$u^* = -u_m \operatorname{sgn}(a p_2) \tag{20}$$

$$v^* = v_m \operatorname{sgn}(u p_2) \tag{21}$$

Z (8) możemy zapisać równania Eulera–Lagrange’a

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{22}$$

$$\dot{x}_2 = au \tag{23}$$

$$\dot{p}_1 = 0 \tag{24}$$

$$\dot{p}_2 = -p_1 \tag{25}$$

Z pomocą warunku transwersalności (10) należy teraz uzyskać warunki końcowe na funkcje $p_1(t)$, $p_2(t)$. Dokonujemy uwolnienia zmiennych jako:

$$x_1 = r\cos\theta \tag{26}$$

$$x_2 = r\sin\theta \tag{27}$$

$$T = \theta \tag{28}$$

Teraz za pomocą (11) obliczamy macierz M. Przyjmuje ona postać

$$M = \begin{bmatrix} -\cos\theta & 2r\sin\theta \\ -\sin\theta & au - r\cos\theta \end{bmatrix} \tag{29}$$

Zauważmy, że dla $t = T$ odpowiednio:

$$\frac{\partial T}{\partial \delta} = 0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 1 \tag{31}$$

$$\left\langle \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial \delta} \right\rangle = 0 \tag{32}$$

Warunek transwersalności (10) sprowadzi się zatem do postaci

$$< p, M > = -f\frac{\partial T}{\partial \delta} = [0, -1] \tag{33}$$

A więc ostatecznie

$$p(t) = [0 - 1]M^{-1} \tag{34}$$

Z teorii macierzy wiadomo (zob. np. [8, 4]), że macierz jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa, a więc $|A| \neq 0$. Wyznacznik macierzy M wynosi

$$\Delta_m = -\cos\theta(au - r\cos\theta) + 2r\sin\theta \tag{35}$$

Pierwszy czynnik jest równy 0, gdy $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi + \frac{\pi}{4}$. Wtedy jednak drugi czynnik jest niezerowy, ponieważ $\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0.$ Na podstawie tych faktów wnioskować możemy, że macierz M jest nieosobliwa.

Dalej

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{au - r\cos\theta}{\Delta_m} & \frac{-2r\sin\theta}{\Delta_m} \\ \frac{\sin\theta}{\Delta_m} & \frac{-\cos\theta}{\Delta_m} \end{bmatrix} \tag{36}$$

Ostatecznie z (36) i (34) otrzymujemy warunki końcowe na zmienne sprzężone postaci:

$$p_1(T) = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta(au - r\cos\theta) + 2r\sin\theta} \tag{37}$$

$$p_2(T) = \frac{\cos\theta}{-\cos\theta(au - r\cos\theta) + 2r\sin\theta} \tag{38}$$

$$\lim_{r\to 0} p_2(T) = -\frac{1}{au} \tag{39}$$

Zauważmy, że $r \to 0$ implikuje $x_1 \to 0$, $x_2 \to 0$, oraz, dla gry dwuosobowej o sumie zerowej, $F^* = 0$. Ostatnie z powyższych równań daje więc zależność pozwalającą wyliczyć $p_2(T)$.

3.4. Rozwiązanie analityczne

Postępując jak wyżej, uzyskaliśmy problem dwugraniczny. Jest on w ogólności trudny do rozwiązania, zarówno analitycznie, jak i numerycznie (zob. np. [2, 1]). Jednakowoż, na podstawie charakteru systemu i postaci równań (7), (8), (20) wysnuć można wnioski pomocnicze:

– Postać funkcji sprzężonych z (8) pozwala zauważyć, że

$$\dot{p}_1(T) = 0 \Rightarrow p_1(T) = \text{const} = -p_1(T) \tag{40}$$

a zatem

$$\dot{p}_2(T) = \int dt \Rightarrow p_2(T) = p_1(T)t + C \tag{41}$$

C wyznaczamy z warunku końcowego (37). Ostatecznie

$$\dot{p}_2(T) = \int dt \Rightarrow p_2(T) = -p_1(T)t + p_2(T) \tag{42}$$

Funkcja $p_2(t)$ jest więc funkcją liniową. Funkcja taka przecina oś x maksymalnie jeden raz.
– Jako że $a > 0$, zatem z (20) można wywnioskować, iż znak $u^*(t)$ będzie odwrotny niż funkcji $p_2(t)$ (a ma znak niezależny od $v(t)$)
– Wykorzystując powyższe fakty, zauważamy, że $\text{sgn}(p_2 u^*) = \text{const} = -1$. Stąd $v^* = v_m \text{sgn}(p_2 u^*) = -v_m$. Optymalną strategią niepewnego parametru jest przyjąć wartość minimalną równą $a_{opt} = a_0 - v_m$.

Z powyższych rozważań wynika, że najbardziej niekorzystną dla projektującego system sterowania sytuacją jest, gdy współczynnik przy sterowaniu u jest najmniejszy

– zmniejsza on bowiem wpływ sterowania na układ. W hipotetycznym przypadku $a = 0$ system stałby się niesterowalny. Przypadek niesterowalności możemy jednak wykluczyć, dzięki interpretacji fizycznej parametru a. Pamiętając, że $a = \frac{1}{m}$, zauważamy, że układ staje się niesterowalny dla $m \to \infty$, co jest oczywiście nieosiągalne w rzeczywistości. Jednak im ciężar wózka jest większy, tym trudniej nim sterować – wynik jest zgodny z intuicją.

Teraz należy już tylko wyznaczyć punkt przełączenia sterowania. Można to zrobić, całkując równania (14). Otrzymujemy wówczas:

$$x_1(t) = \begin{cases} x_1(0) + x_2(0)t + u_m a t^2, \ 0 \le t \le t_p \\ x_1(0) + x_2(0)t + u_m a t^2 + u_m a t_p (t - t_p) - \frac{1}{2} u_m a (t - t_p)^2, \ t_p \le t \le T \end{cases} \tag{43}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} x_2(0) + u_m a t, \ 0 \le t \le t_p \\ x_2(0) + u_m a t_p - u_m a (t - t_p), \ t_p \le t \le T \end{cases} \tag{44}$$

Trajektorie docelowe muszą spełniać warunki: $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0$. Stąd otrzymujemy zależności:

$$x_1(0) + x_2(0)t + u_m a T^2 + u_m a t_p (T - t_p) - \frac{1}{2} u_m a (T - t_p)^2 = 0 \tag{45}$$

$$x_2(0) + u_m a t_p - u_m a (T - t_p) = 0 \tag{46}$$

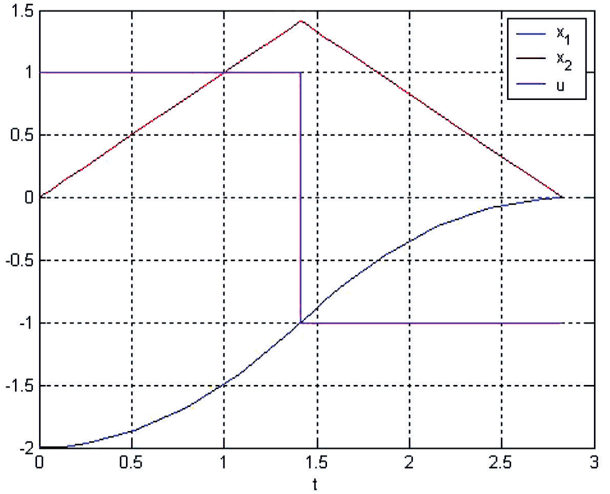
co pozwala ostatecznie wyliczyć optymalny czas przełączenia, oraz czas minimalny sterowania:

$$t_p = -\frac{x_2(0)}{u_m a} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{x_2(0)}{u_m a}\right)^2 - \frac{x_1(0)}{u_m a}} \tag{47}$$

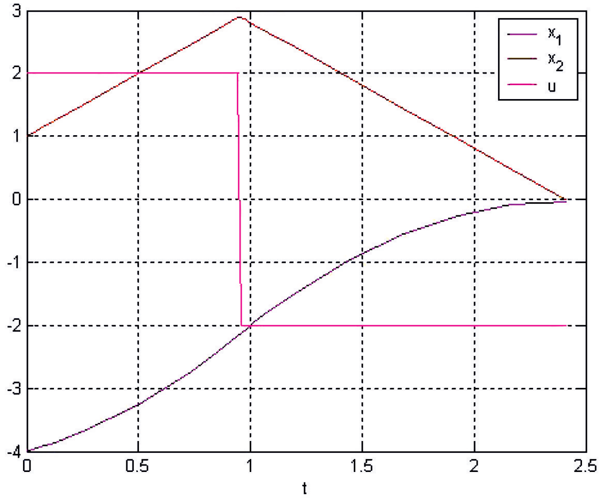
$$T = -\frac{x_2(0)}{u_m a} + 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{x_2(0)}{u_m a}\right)^2 - \frac{x_1(0)}{u_m a}} \tag{48}$$

Wzory osiągnięte powyżej są analogiczne do wzorów dla systemu bez niepewnych parametrów (por. np. [9]). Na wykresach (rys. 2 i 3), przedstawiono sterowanie i trajektorie optymalne dla różnych wartości x_0 i u_m w dziedzinie czasu, natomiast rysunek 4 reprezentuje trajektorie fazowe systemu.

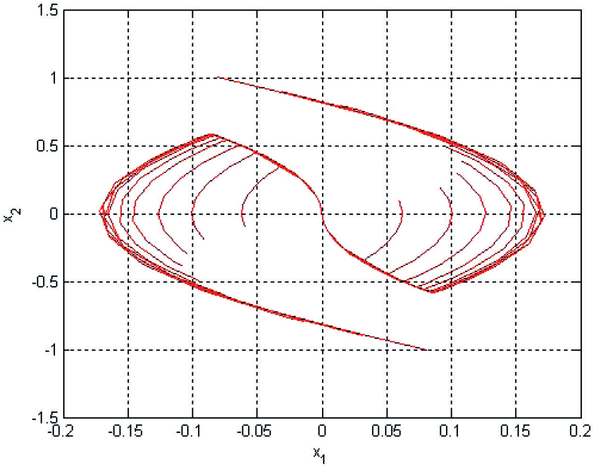
Zwrócić należy uwagę, że w omawianym przykładzie nie występuje tzw. *bariera*. Oznacza to, że niezależnie od punktu przestrzeni stanów, który przyjmiemy jako warunek początkowy x_0, istnieje sterowanie sprowadzające układ do stanu $x(T) = 0$ w skończonym czasie. Z punktu widzenia teorii gier mówimy, że zakłócenie nie ma możliwości *odniesienia zwycięstwa* nad sterowaniem dla jakiegokolwiek x_0. Opisy systemów, w których występuje bariera, można znaleźć np. w pracach [3, 5].



Rys. 2. Przykład trajektorii systemu



Rys. 3. Przykład trajektorii systemu
– niezerowa prędkość początkowa



Rys. 4. Trajektorie sterowań w przestrzeni stanów x_1, x_2

4. Podsumowanie

Przeprowadzone obliczenia pozwalają ocenić, jak skomplikowanym zagadnieniem jest dokładne wyznaczenie sterowania czasooptymalnego przy użyciu teorii gier różniczkowych. Nawet dla niezwykle z pozoru prostego przypadku, jakim jest obiekt całkujący, obliczenia są stosunkowo złożone, a otrzymany problem dwugraniczny ogólnie trudny do rozwiązania w sensie analitycznym. Ostatecznie, sposób rozwiązania zawiera wiele zdroworozsądkowych analiz, które niekoniecznie muszą być możliwe do przeprowadzenia w przypadku bardziej złożonych systemów. Z drugiej strony, możliwość uzyskania dokładnej funkcji sterowania, jak i oddziaływania „inteligentnego" zakłócenia, otwiera wiele możliwości analizy danego systemu, i ma duże znaczenie praktyczne. W przeciwieństwie do innych metod sterowania odpornego pozwala bowiem odpowiedzieć na pytanie, jaka jest optymalna „strategia" z punktu widzenia zakłócenia.

Literatura

[1] Górecki H.: *Optymalizacja systemów dynamicznych.* Biblioteka Naukowa Inżyniera, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN 1993

[2] Hejmo W.: *Teoria sterowania czasooptymalnego i jej zastosowania.* Biblioteka Naukowa Inżyniera, PWN 1990

[3] Isaacs R.: *Differential games.* Wiley, 1965

[4] Mitkowski W.: *Równania macierzowe i ich zastosowania.* Kraków, UWND AGH 2007

[5] Isukapalli G., Sarma Rammohan K., Ragade: *A game theoretic approach to optimal control in the presence of uncertainty*. IEEE Trasactions on Automatic Control, August 1967

[6] Straffin Ph.D.: *Teoria gier.* Warszawa, Wydawnictwo Naukowe „Scholar" 2004

[7] Bernhard P., Basar T.: *H-optimal Control and Related Minimax Design Problems.* Birkhauser, 1991

[8] Turowicz A.: *Teoria Macierzy.* Kraków, UWND AGH 2005

[9] Wierzbicki A., Findeisen W., Szymanowski J.: *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji.* Warszawa, PWN 1980