

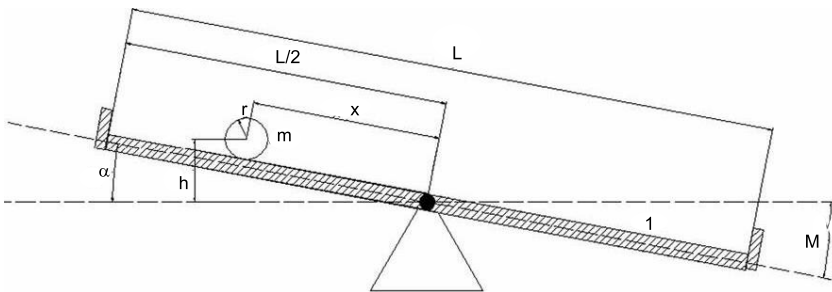
Michał Ganobis*

Przegląd możliwości sterowania systemem o zmiennym momencie bezwładności typu *ball on beam*

1. System

1.1. Budowa systemu

Prezentowany system składa się z obrotowej rampy oraz toczącej się po niej kulki. Jako sterowanie przyjmujemy moment siły działający na oś pochylni. Budowę systemu ilustruje rysunek 1.



Rys. 1. Obiekt sterowania

Przyjmujemy następujące założenia o systemie (za [9]):

- kulka nie ślizga się na pochylni;
- pochylnia ma określony zakres kąta, poza który nie może się wychylić;
- w ruchu obrotowym pochylni nie występuje tarcie;
- kulka jest idealnie okrągła i jednorodna;
- kulka nie odbija się od ograniczników;
- kulka zawsze ma kontakt z pochylnią;
- pochylnia jest idealnie symetryczna i całkowicie płaska.

* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

1.2. Równania stanu

Aby wyprowadzić równania stanu, posłużono się formalizmem Eulera–Lagrange’a [11], ostatecznie uzyskując następującą ich postać [10]:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = a(x_1 x_4^2 - g \sin x_3) \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (3)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-2x_1 x_2 x_4 - g x_1 \cos x_3}{x_1^2 + b} + \frac{u}{x_1^2 + b} \quad (4)$$

gdzie:

x_1 – położenie kulki na pochylni (na rys. 1 oznaczone jako x) [m],

x_2 – prędkość liniowa kulki względem pochylni [m/s],

x_3 – kąt nachylenia pochylni (na rys. 1 oznaczony jako α) [rad],

x_4 – prędkość kątowa pochylni [rad/s],

I – moment bezwładności pochylni względem osi jej obrotu [kg/m²],

I_b – moment bezwładności kulki względem jej środka ciężkości [kg/m²],

$$a = \frac{1}{1 + \frac{I_b}{mR^2}},$$

$$b = \frac{I + I_b}{m}.$$

1.3. Linearyzacja w punkcie równowagi

Zachowanie systemu ocenić możemy poprzez analizę postaci zlinearyzowanej, a więc sprowadzonej do postaci:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (6)$$

Macierz Jacobiego [12] systemu (1) w punkcie równowagi (7) ma postać

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ ax_4^2 & 0 & -ga \cos x_3 & 2ax_1 x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$f_1(x) = \frac{-2x_2x_4 - g \cos x_3}{x_1^2 + b} + 2 \frac{(2x_1x_2x_4 - gx_1 \cos x_3)x_1}{(x_1^2 + b)^2},$$

$$f_2(x) = \frac{-2x_1x_4}{x_1^2 + b},$$

$$f_3(x) = \frac{gx_1 \sin x_3}{x_1^2 + b},$$

$$f_4(x) = \frac{-2x_1x_2}{x_1^2 + b}.$$

Można wykazać, że punktem równowagi systemu (1) jest

$$x_s = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (7)$$

W tym punkcie macierz Jacobiego przyjmuje postać

$$J(x_s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ga & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g}{b} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a jej wartości własne są następujące:

$$\lambda_1 = p,$$

$$\lambda_2 = -p,$$

$$\lambda_3 = jp,$$

$$\lambda_4 = -jp,$$

gdzie:

$$p = \frac{\sqrt[4]{g^2 b^3 a}}{b},$$

$$j^2 = -1.$$

Zauważmy, że dla dodatnich a , b , $\text{Re}(\lambda_1) > 0$ – potwierdza to intuicyjny fakt niestabilności systemu (1).

Macierz B systemu (1) w postaci (5), zlinearyzowanego w punkcie x_4 będzie mieć postać

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{m}{I + I_b} \end{bmatrix}^T.$$

Należy zauważyć, że system (5) jest sterowalny ze względu na stan. Można to wykazać, budując macierz Kalmana (zob. np. [8], [6]) postaci

$$Q = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] \quad (8)$$

co w przypadku systemu (5) daje

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{ga}{b} \\ 0 & 0 & -\frac{ga}{b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Ponieważ $\det Q > 0$, wnioskujemy o sterowalności systemu (5).

2. Przegląd możliwości sterowania

W dalszych rozważaniach przyjmijmy następujące wartości parametrów systemu:

$$m = 0,1,$$

$$I = 0,1,$$

$$R = 0,01,$$

$$I_b = \frac{1}{12} mR^2 = 8,3333 \cdot 10^{-5},$$

a warunkiem początkowym dla eksperymentów będzie wektor

$$x_0 = [0,1 \ 0 \ -0,01 \ 0] \quad (10)$$

a więc z odchyleniem od punktu równowagi wartości położenia kulki oraz kąta pochylni.

2.1. Rozmieszczanie wartości własnych systemu zamkniętego

Rozważmy regulator proporcjonalny od stanu ($C = I$),

$$u(t) = -Fx(t) \quad (11)$$

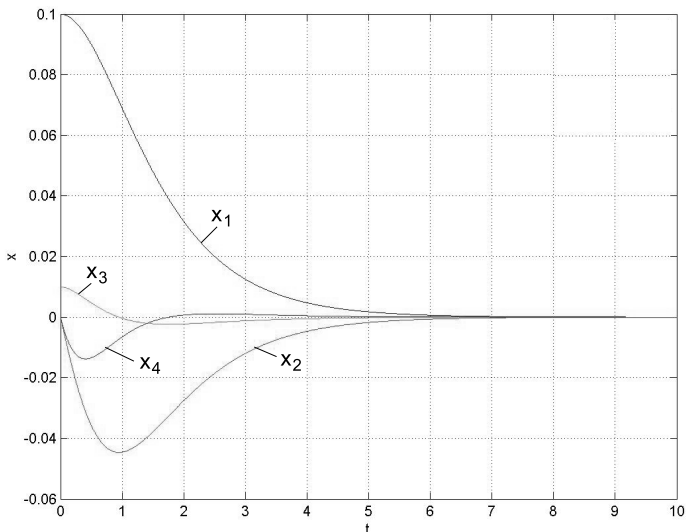
gdzie F jest wektorem wzmocnień regulatora proporcjonalnego. W przypadku braku możliwości bezpośredniego pomiaru wartości x_2 i x_4 istnieje możliwość stworzenia obserwatorów stanu (zob. np. [3]). Przyjmując postać systemu jako (5), uzyskujemy postać systemu zamkniętego (zob. [9])

$$\dot{x} = [A - BF]x \quad (12)$$

Można wykazać [2], że dla par sterowalnych ($A; B$) możliwe jest takie dobranie wektora sprzężenia zwrotnego F , aby osiągnąć zadany rozkład wartości własnych systemu zamkniętego. Na przykład dla wektora w. wł. $[1 \ 2 \ 3 \ 4]$ osiągniemy wektor regulatora postaci

$$K = [-10,0751 \ -0,5522 \ 3,5003 \ 1,0001] \quad (13)$$

Można pokazać, że sprzężenie takie stabilizuje system nieliniowy (1) również przy warunku początkowym oddalonym od (7). Trajektorie systemu zamkniętego z regulatorem K przedstawia rysunek 2. Osiągnięta jakość sterowania dla systemu nieliniowego jest porównywalna z przypadkiem liniowym – wskaźnik jakości postaci (14) dla sterowania systemem liniowym wynosi $J_{lin} = 0,0231$, natomiast nieliniowym – $J_{nlin} = 0,0141$.



Rys. 2. Trajektorie nieliniowego systemu zamkniętego

2.2. Regulator optymalny LQR

Istnieje możliwość realizacji regulatora LQR (*Linear Quadratic Regulator*) z nieskończonym horyzontem czasowym, tj. minimalizującego wskaźnik jakości postaci (zob. [4])

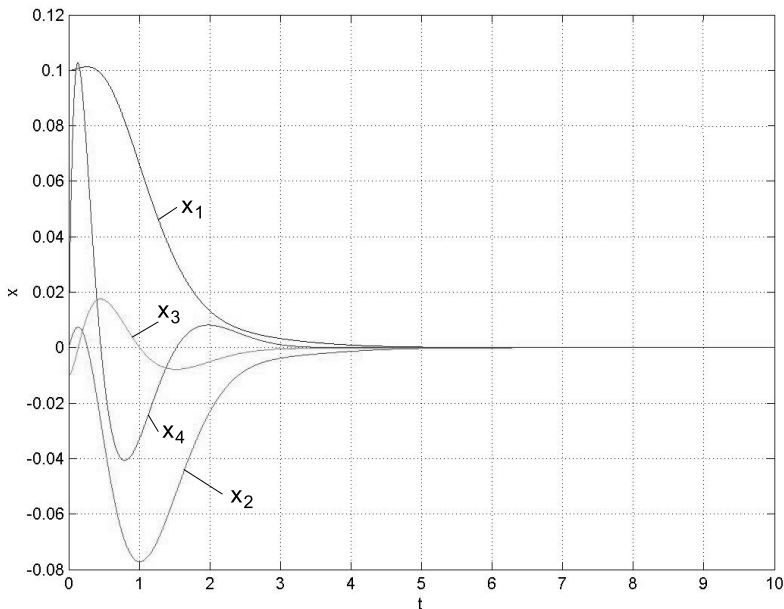
$$Q(u) = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (14)$$

przy założeniach dla macierzy $Q = Q^T$, $R = R^T$, $Q \geq 0$, $R > 0$.

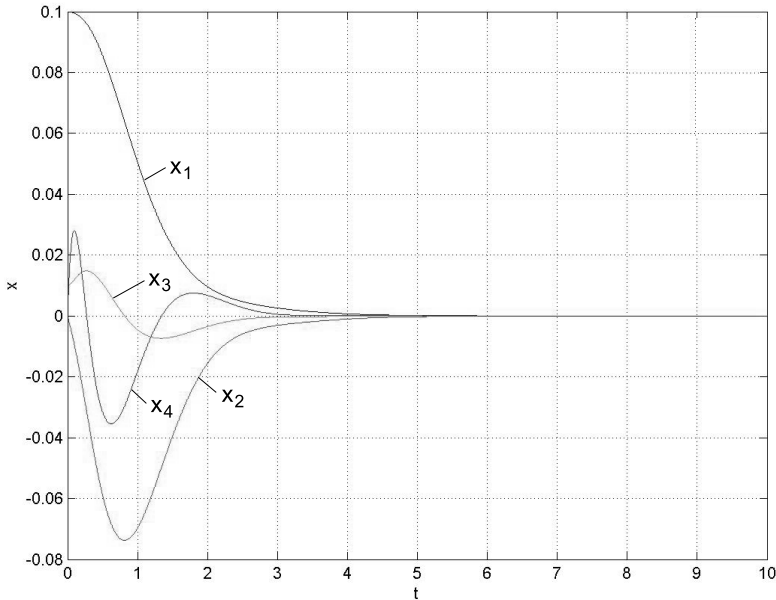
Macierz wag Q przyjęto jako jednostkową ($Q = I$), natomiast $R = 0,01$. Rozwiązanie równania Riccatiego dla systemu liniowego (5) z powyższymi wagami prowadzi do następującego wektora regulatora

$$K = [-23,8184 \quad -17,5655 \quad 67,4050 \quad 15,3235] \quad (15)$$

Podobnie jak w przypadku rozmieszczania wartości własnych, można przedstawić działanie regulatora LQR dla systemu liniowego (5) (rys. 3) i nieliniowego (1) (rys. 4). Również i w tym przypadku jakość sterowania jest porównywalna dla systemu liniowego i nieliniowego. Wskaźniki jakości postaci (14) wynoszą odpowiednio $J_{lin} = 0,0187$ i $J_{nlin} = 0,0137$.



Rys. 3. Trajektorie liniowego systemu zamkniętego (LQR)



Rys. 4. Trajektorie nieliniowego systemu zamkniętego (LQR)

3. Obiekt rzeczywisty

Równania (1) stanowią ogólny model, zachowujący poprawność niezależnie od zastosowanego układu wykonawczego. W obiekcie rzeczywistym wykorzystano silnik elektryczny, którego charakter pozwala na znaczące uproszczenie modelu (1):

- Silnik zastosowany w stanowisku laboratoryjnym ma przełożenie na wale o wartości 1:250. Fakt ten stanowi o tym, że kulka umieszczona nawet w najdalszym położeniu, nie jest w stanie samoistnie spowodować zmiany kąta pochylni – opory układu wykonawczego są zbyt duże. Pochylnia ma określony zakres kąta, poza który nie może się wychylić.
- Moc silnika jest wystarczająco duża, by potraktować inercję rampy jako pomijalną.

Uwzględniając powyższe fakty, można uprościć model do postaci, w której jako wejście traktujemy kąt pochylni, a więc:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (16)$$

$$\dot{x}_2 = a(x_1 \dot{u}^2 - g \sin u) \quad (17)$$

Zmienna stanu x_3 staje się wejściem u , natomiast x_4 , zgodnie z równaniem stanu (3), przechodzi w \dot{u} .

3.1. Modelowanie układu wykonawczego

Jako układ wykonawczy w systemie wykorzystano silnik prądu stałego. Silnik taki zamodelowano jako obiekt całkujący z inercją, o transmitancji postaci

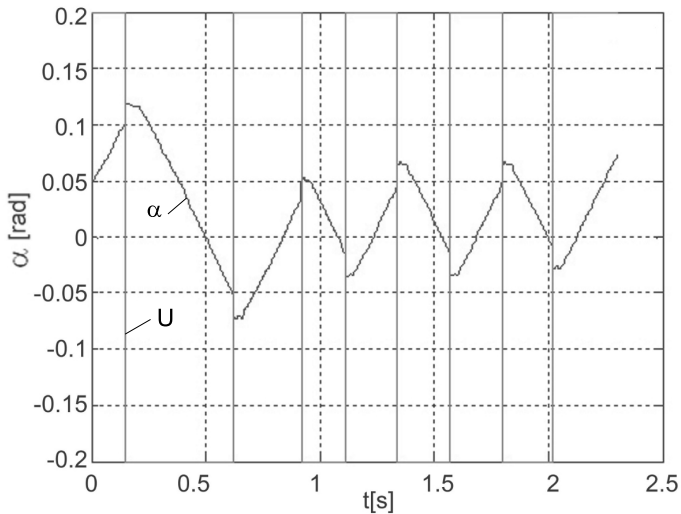
$$G_s(s) = \frac{K}{T_i s(T_1 s + 1)} \quad (18)$$

gdzie wejściem jest napięcie na silniku, natomiast wyjściem kąt pochylni (zob. np. [1]). Rysunek 5 przedstawia zależność kąta pochylni od sterowania. Na jego podstawie wykonano badania parametrów równania (18). Do optymalizacji użyto funkcji *fminsearch* pakietu MATLAB. W jej wyniku osiągnięto następujące parametry silnika:

$$K = 0,34,$$

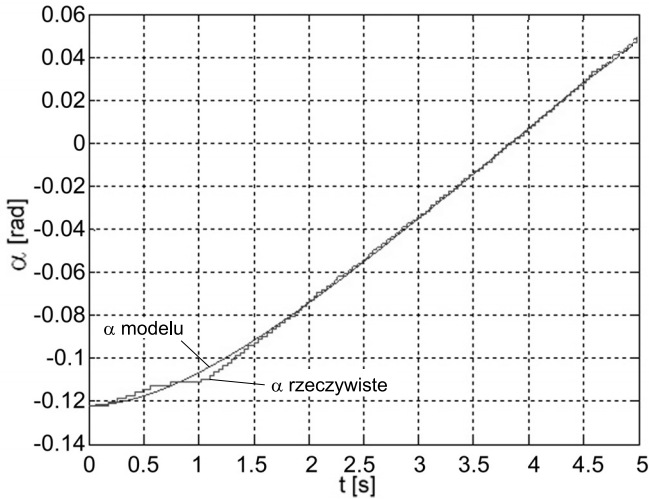
$$T_i = 1,39,$$

$$T_1 = 1,08.$$



Rys. 5. Zależność kąta pochylni od sterowania

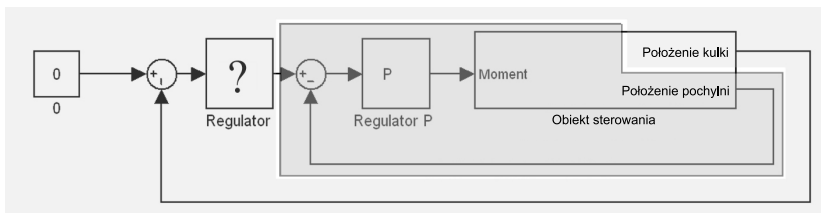
Na rysunku 6 przedstawiono porównanie odpowiedzi skokowych modelu silnika i rzeczywistego obiektu. Jak można zauważyć, osiągnięto dobrą zgodność. Pewne niedokładności pojawiają się jedynie na początku przebiegu – jest to spowodowane faktem, iż model nie przewiduje istnienia przekładni i zjawisk z tym związanych.



Rys. 6. Porównanie odpowiedzi silnika i modelu

3.2. Realizacja układu regulacji

Zastosowano sterowanie kaskadowe, w postaci przedstawionej na rysunku 7. Pierwszą część stanowi pętla sprzężenia zwrotnego dla regulatora nadrzędnego, wyjściem której jest wartość zdana dla regulatora podrzędnego. Nadrzędny regulator ma za zadanie sterowanie wychyleniem pochylni tak, aby ustabilizować kulkę w pozycji „0”. Regulator podrzędny natomiast jest odpowiedzialny za ustawienie zadanej pozycji pochylni – stanowi więc, razem z silnikiem, serwomechanizm. Ponieważ silnik zidentyfikowano zgodnie z (18) jako obiekt całkująco-inercyjny, użyto regulatora typu P .



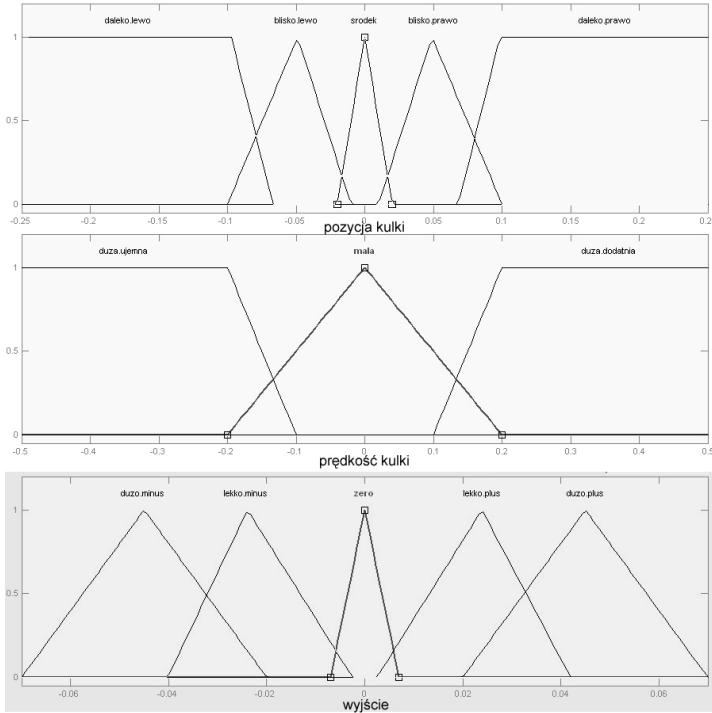
Rys. 7. Kaskadowy układ sterowania systemem

3.3. Regulator rozmyty

W realizacji praktycznej regulatora rozmytego wykorzystano pakiet Fuzzy Logic Toolbox środowiska MATLAB/Simulink. Jako sygnały wejściowe regulatora użyte będą: błąd (odchyłka od stanu równowagi) oraz prędkość zmian błędu w czasie.

Funkcje przynależności

Przy projektowaniu regulatora zastosowano funkcje przynależności przedstawione na rysunku 8, dwie dla wejść oraz jedną dla wyjścia.



Rys. 8. Funkcje przynależności wejścia i wyjścia

Reguły

Po ocenie przynależności zmiennej do danego zbioru badane są reguły działające na tę zmienną. W zastosowanym regulatorze wykorzystano piętnaście reguł na wartość sterowań (tab. 1).

Tabela 1

Reguły sterowania regulatora rozmytego.

W poszczególnych komórkach podano wartość sterowania w zależności od położenia kulki (wiersze) i jej prędkości (kolumny)

	duża dodatnia	mała	duża ujemna
daleko lewo	zero	dużo minus	dużo minus
blisko lewo	lekko plus	lekko minus	lekko minus
środek	lekko plus	zero	lekko minus
blisko prawo	lekko plus	lekko plus	lekko minus
daleko prawo	dużo plus	dużo plus	zero

Reguły te zostały zaprogramowane jako intuicyjne (eksperckie) reakcje na stan poszczególnych wejść systemu. Przykładowo: gdy położenie kulki jest nieznacznie oddalone od 0 w kierunku dodatnim, wówczas naturalną reakcją jest lekka korekta w kierunku ujemnym. Gdy wychylenie jest duże, korekta ta jest silniejsza.

W regulatorze wykorzystano wnioskowanie zaproponowane przez Mamdaniego (zob. np. [9, 5]):

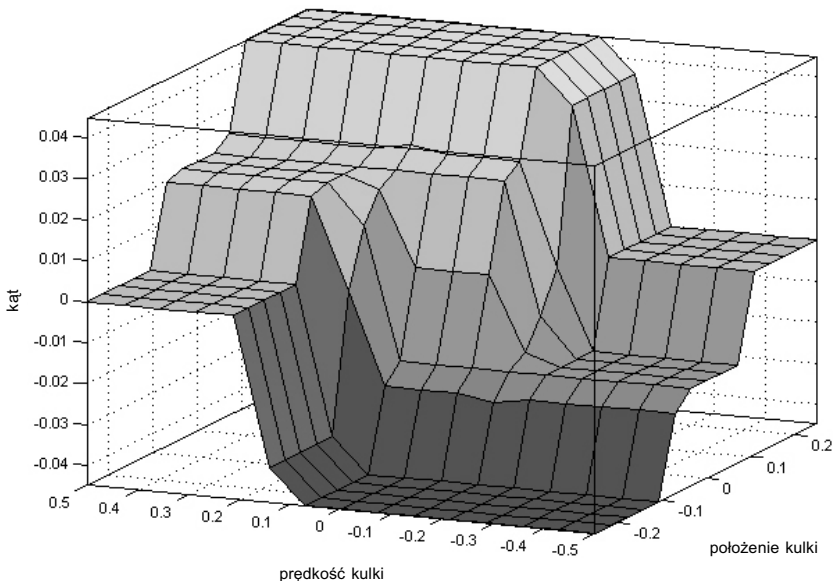
- dla każdej reguły obliczana jest siła jej odpalenia,
- wyznaczany jest zbiór rozmyty F_i wyprowadzany przez i -tą regułę,
- przeprowadzana jest agregacja powstałych zbiorów za pomocą operacji „max”.

Wyostrożenie

W zastosowanym regulatorze użyto jednej z najczęściej stosowanych metod wyostrożenia – metody środka ciężkości (COD) danej wzorem (zob. [5])

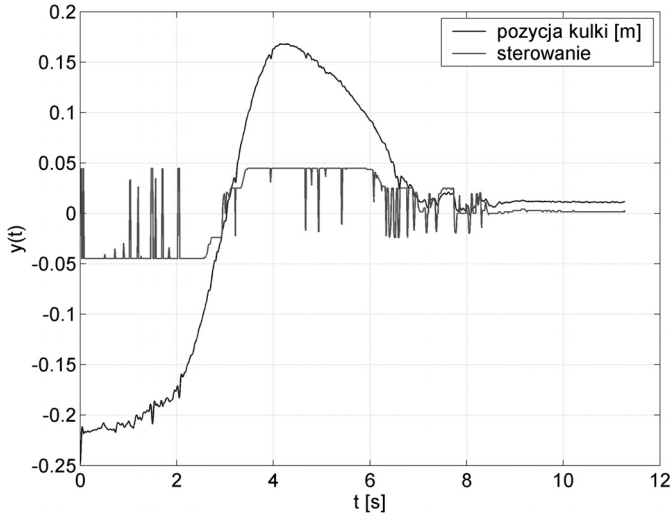
$$y^* = \frac{\int y \cdot \mu(y) dy}{\int \mu(y) dy} \quad (19)$$

Uzyskaną powierzchnię sterowań przedstawia rysunek 9.

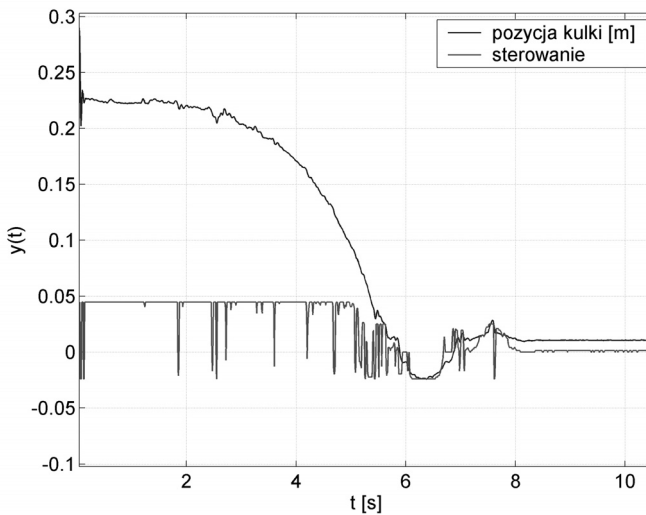


Rys. 9. Powierzchnia sterowań

Odpowiedzi układu z regulatorem rozmytym na dodatnie i ujemne zaburzenie przedstawiają rysunki 10 oraz 11.



Rys. 10. Odpowiedź układu z regulatorem rozmytym na dodatnie zaburzenie stanu



Rys. 11. Odpowiedź układu z regulatorem rozmytym na ujemne zaburzenie stanu

Regulator rozmyty dobrze radzi sobie ze sterowaniem systemem rzeczywistym, można jednak zauważyć istnienie uchybu statycznego.

4. Podsumowanie

Niniejsza praca zawiera ogólny przegląd możliwości sterowania systemem „ball on beam”. Przedstawiono możliwości sterowania wykorzystujące postać zlinearyzowaną modelu i wykazano, że jest możliwe wykorzystanie go do sterowania systemem nieliniowym bez znaczącego ubytku jakości sterowania. Ponadto zaprezentowano możliwość sterowania systemem „ball on beam” bez wykorzystania modelu matematycznego na przykładzie regulatora rozmytego.

Literatura

- [1] Baranowski J., *Projektowanie obserwatora dla serwomechanizmu prądu stałego*. Materiały VIII Międzynarodowych Warsztatów Doktoranckich OWD 2006, 373–378.
- [2] Chen C.T., *Linear System Theory and Design*. CBS College Publishing, 1984.
- [3] Mitkowski W., Baranowski J., Ganobis M., *Observer design for variable moment of inertia system*. Proceedings of Computer Methods and Systems, 2007, 367–372.
- [4] Kaczorek T., *Teoria układów regulacji automatycznej*. Warszawa, WNT 1977.
- [5] Yurkovich S., Passino K.M., *Fuzzy control*. Addison Wesley Longman, Inc. 1998.
- [6] Klamka J., *Controllability of Dynamical Systems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [7] McNeill M.F., Thro E., *Fuzzy Logic – A Practical Approach*. Academic Press, Inc., 1994.
- [8] Mitkowski W., *Stabilizacja Systemów Dynamicznych*. Wydanie II, Kraków, Wyd. AGH 1991.
- [9] Chudyba P., Ganobis M., *Model i sterowanie układem o zmiennym momencie bezwładności*. Kraków, WEALiE, AGH 2006 (praca magisterska).
- [10] Sira-Ramirez H., *On the control of the “ball and beam” system: A trajectory planning approach*. 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000, 4042–4047.
- [11] Skalmierski B., *Mechanika z wytrzymałością materiałów dla automatyków*. Państwowe Wydawnictwa Naukowe, 1973.
- [12] Turowicz A., *Teoria Macierzy*. Wydanie VI, Kraków, Wyd. AGH 2005.