AUTOMATYKA • 2008 • Tom 12 • Zeszyt 1

Piotr Oprocha*

Mieszanie topologiczne w dyskretnych układach dynamicznych – krótkie wprowadzenie

1. Model ciągły czy dyskretny?

W wielu zastosowaniach modelujemy rozważany proces za pomocą równań różniczkowych. Załóżmy dla przykładu, że badamy dynamikę rozwoju pewnej populacji. Dla uproszczenia przyjmijmy, że mamy do czynienia z jednym ustalonym gatunkiem rozwijającym się samodzielnie w warunkach laboratoryjnych (bez interakcji z innymi gatunkami). Wzrost populacji będzie proporcjonalny do jej liczności, jednak nie może odbywać się on nieograniczenie. Naturalną barierą będzie tutaj choćby pojemność zbiornika, w którym gatunek się rozwija. W roku 1838 Pierre-François Verhulst (1804–1849) opisał w [21] rozwój populacji następującym równaniem ($N(t) > 0$ oznacza liczebność populacji w chwili t):

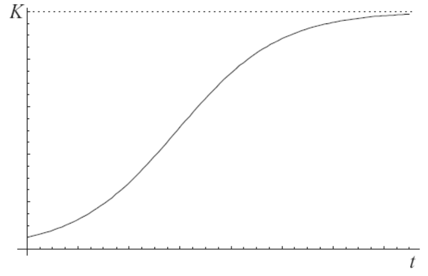
$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{1}$$

Jak widzimy, w równaniu przyjęto założenie, że szybkość wzrostu populacji na jednego osobnika maleje wraz z jej rozwojem, aż do osiągnięcia liczności populacji równej K. Po osiągnięciu tej granicy przyrost staje się ujemny, tzn. populacja zaczyna wymierać. Równanie (1) jest równaniem o zmiennych rozdzielonych, zatem można podać jawną postać rozwiązania (przy warunku początkowym $N(0) = N_0$):

$$N(t) = \frac{K}{1 + ((K/N_0) - 1)e^{-rt}} \tag{2}$$

Ze wzoru (2) można natychmiast wyczytać, że startując od pewnej liczności $N(0) \in (0, K)$ rozmiar populacji będzie stopniowo wzrastać, zbliżając się asymptotycznie do granicznej wartości równej K (zobacz rys. 1).

* Wydział Matematyki Stosowanej, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie



Rys. 1. Przykładowe rozwiązanie równania (1)

Jeśli o rozważanej populacji możemy założyć, że rozwija się ona w sposób nieprzerwany (ciągły), tzn. gdy nie widać wyraźnie kolejnych faz rozwoju (np. bakterie, drożdże), model Verhulsta sprawdza się dość dobrze.

Z drugiej strony, gdy rozwój populacji wykazuje wyraźne fazy, np. sezonowe, model ciągły nie zgadza się z danymi doświadczalnymi. Próbując opisać matematycznie wyniki uzyskane w doświadczeniach nad chrząszczami z rodziny stonkowatych (w liczności populacji można było zauważyć występujące na przemian okresy cyklicznej oraz nieregularnej zmiany liczebności osobników), Syunro Utida (1913–2005) zastosował w roku 1957 w pracy [20] dyskretną wersję równania (1), tzn. równanie:

$$\frac{1}{N_t}(N_{t+1}-N_t)=r\left(1-\frac{N_t}{K}\right) \tag{3}$$

(N_0 informuje nas o początkowym stanie populacji, N_1 o liczności w pierwszym pokoleniu, N_2 w drugim itd.). Przekształcając równanie (3), otrzymujemy wzór na liczebność populacji w kolejnych pokoleniach:

$$N_{t+1}=N_t+rN_t\left(1-\frac{N_t}{K}\right) \tag{4}$$

Wykonajmy zmianę zmiennych zadaną wzorem:

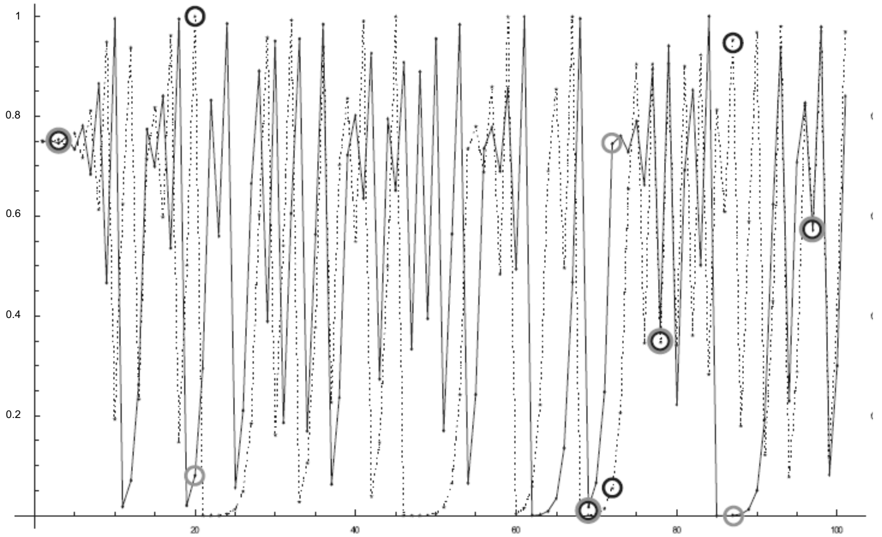
$$x_t=\frac{rN_t}{(r+1)K}, \quad \mu=(r+1) \tag{5}$$

(czyli liczebność populacji odnosimy do stałej K). Równanie (4) przyjmie postać

$$x_{t+1}=\mu x_t(1-x_t) \tag{6}$$

Równanie (6) oznacza, że rozwój populacji (w nowych zmiennych) możemy opisać poprzez iterację funkcji $F_\mu(x)=\mu x(1-x)$. Mimo że bardzo prosty, układ dynamiczny (6) wykazuje bardzo złożoną dynamikę, a jej zrozumieniu poświęcono wiele publikacji.

Z punktu widzenia dalszej części artykułu istotą jest analiza wyników symulacji układu (6). Na rysunku 2 przedstawiono trajektorię (tzn. ciąg x, $f(x)$, $f(f(x))$, ...) punktu $x_1 = 0{,}749$ i $x_2 = 0{,}751$ dla funkcji F_4. Zwróćmy uwagę na ciekawy fakt. Mimo że początkowo punkty były blisko, po pewnym czasie trajektorie przyjmują wartości odległe o ponad 1/2, potem ponownie są blisko, później znów odległe o ponad 1/2 itd. Matematycznie ścisłe wyjaśnienie tego i innych zjawisk występujących w dyskretnych układach dynamicznych, a związanych z mieszaniem, podamy w dalszej części pracy.



Rys. 2. Trajektorie punktów $x_1 = 0{,}749$ (linia przerywana) i $x_2 = 0{,}751$ (ciągła) dla funkcji $f(x) = 4x(1 - x)$

2. Tranzytywność i mieszanie topologiczne

Od tego momentu będziemy zakładać, że (X, d) jest zwartą przestrzenią metryczną, a $C(X)$ będzie oznaczać zbiór wszystkich funkcji $f : X \to X$, które są ciągłe (czytelnik nieobeznany z topologią może sobie wyobrażać, że X jest odcinkiem, okręgiem, lub ogólniej ograniczonym i domkniętym podzbiorem $\mathbb{R}^n$). Przez *orbitę* punktu $x \in X$ względem f rozumiemy zbiór $\{x, f(x), f^2(x), ...\}$, a przez *zbiór graniczny* punktu x (ozn. $\omega(f, x)$) zbiór wszystkich możliwych punktów które można uzyskać jako granicę jakiegoś podciągu ciągu $x, f(x), f^2(x), ...$

Wprowadzamy następujące definicje:

Definicja 1. *Niech (X, d) będzie zwarta. Odwzorowanie f nazywamy:*

(1.1) tranzytywnym, *gdy dla dowolnych niepustych zbiorów otwartych $U_1, U_2 \subset X$ istnieje $n > 0$ takie, że $f^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$;*

(1.2) całkowicie tranzytywnym, *gdy dla dowolnego m odwzorowanie f^m jest tranzytywne;*

(1.3) (topologicznie) słabo mieszającym, *gdy dla dowolnych niepustych zbiorów otwartych* $U_1, U_2, V_1, V_2 \in X$ *istnieje* $n > 0$, *dla którego zachodzą następujące warunki:*

$$f^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset, \quad f^n(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset;$$

(1.4) (topologicznie silnie) mieszającym, *gdy dla dowolnych niepustych zbiorów otwartych* $U_1, U_2 \subset X$ *istnieje N takie, że* $f^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ *dla dowolnego* $n > N$.

Należy zwrócić uwagę, że istnieją odpowiedniki powyższych pojęć na bazie teorii miary i odwzorowań mierzalnych (zob. [9, 17])

Wprost z definicji wynikają natychmiast implikacje

$$\text{całkowita tranzytywność} \Rightarrow \text{tranzytywność}$$
$$\text{mieszanie} \Rightarrow \text{słabe mieszanie}$$

Natomiast implikacja (słabe mieszanie $\Rightarrow$ całkowita tranzytywność) wymaga dodatkowej analizy. Rozwiązanie przynosi wynik Furstenberga z 1967 roku [11].

Twierdzenie 2 (Furstenberg)**.** *Odwzorowanie f jest słabo mieszające wtedy i tylko wtedy, gdy n-krotny produkt karezjański (z topologią produktową)*

$$f \times \ldots \times f : X \times \ldots \times X \to X \times \ldots \times X$$

jest tranzytywny dla dowolnego $n \geq 2$.

Zwróćmy uwagę, że każde odwzorowanie tranzytywne f (więc także każde słabo mieszające) jest surjekcją, co wynika z ciągłości f i zwartości X (dla dowolnego y można wskazać ciąg x_n taki, że $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = y$). Jeśli ustalimy dowolne k, to dzięki surjektywności dla dowolnych otwartych niepustych U, V istnieją zbiory otwarte niepuste $U_0, \ldots, U_k$ o własności $f(U_{i+1}) \subset U_i$, $U_0 = U$. Korzystając z twierdzenia Furstenberga, znajdujemy $m > 0$, dla którego $f^m(U_i) \cap V \neq \emptyset$, a co za tym idzie, $f^{m-i}(U) \cap V \neq \emptyset$. Ale jedna z liczb $m - i$ jest podzielna przez k, co daje żądaną implikację.

W związku z powyższymi obserwacjami natychmiast nasuwa się pytanie: *Czy przeciwne implikacje zachodzą?*

Okazuje się, że w ogólnym przypadku odpowiedź na to pytanie jest przecząca. Uzasadnienie faktu

$$\text{tranzytywność} \not\Rightarrow \text{całkowita tranzytywność} \not\Rightarrow \text{słabe mieszanie}$$

można dość łatwo wykazać, jeżeli zna się podstawowe fakty z teorii układów dynamicznych. Przykład układu tranzytywnego ale nie całkowicie tranzytywnego stanowi $X = \{0, 1\}$ z odwzorowaniem $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, czyli układ złożony z dokładnie jednej orbity o okresie 2. Jest oczywiste, że f jest tranzytywne oraz, że f^2 nie ma tej własności. Drugi przykład stanowi obrót o kąt niewymierny $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, czyli odwzorowanie $R_\theta : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dane wzorem $R_\theta(x) = xe^{2\pi i\theta}$ gdzie $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ jest okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej.

Dość łatwo jest udowodnić, że dla dowolnego $x \in S^1$ orbita względem R_θ jest gęsta w $\mathbb{S}^1$ (informacja o tym fakcie pojawia się już w manuskrypcie N. Oresme z XIV wieku, choć nie można tutaj oczywiście mówić o formalnym dowodzie we współczesnym rozumieniu tego słowa). Da się jednak wykazać o wiele mocniejszy warunek, udowodniony w latach 1909–1910 przez Hermanna Weyla, który we współczesnej terminologii można wypowiedzieć następująco

Twierdzenie 3. *Niech $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Wtedy dla dowolnego odcinka $J \subset \mathbb{S}^1$ oraz $x \in \mathbb{S}^1$ zachodzi*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\#\{0 \le i < n : R_\theta^i(x) \in J\} = \mathcal{L}(I),$$

gdzie $\mathcal{L}$ oznacza znormalizowaną miarę Lebesgue'a na okręgu (tzn. obwód okręgu wynosi 1).

Warto nadmienić, że twierdzenie to okazało się szczególnym przypadkiem twierdzenia ergodycznego Birkhoffa [7], stanowiącego fundament teorii ergodycznej [9]. Zachodzi także następujące twierdzenie (prawdziwe także w ogólniejszej sytuacji gdy X jest ośrodkową przestrzenią Baire'a [1]):

Twierdzenie 4. *Niech (X, d) będzie zwarta oraz niech $f \in C(X)$. Następujące warunki są równoważne:*

(4.1) *f jest tranzytywne;*

(4.2) *istnieje punkt $x \in X$ taki, że $\omega(f, x) = X$;*

(4.3) *istnieje zbiór residualny $A \subset X$ (tzn. zbiór zawierający conajwyżej przeliczalne przecięcie zbiorów otwartych i gęstych) taki, że $\omega(f, x) = X$ dla dowolnego $x \in A$;*

(4.4) *dla dowolnego niepustego zbioru otwartego $U \subset X$ zbiór $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ jest gęsty w X.*

Twierdzenie 4 w połączeniu z twierdzeniem 3 implikuje, że R_θ jest całkowicie tranzytywne (R_θ jest tranzytywne, oraz $R_\theta^n = R_{n\theta}$). Zauważmy także, że rozważane odwzorowanie nie jest słabo mieszające (R_θ jest izometrią, więc jeśli ustalimy dwa rozłączne odcinki U_2, V_2 na $\mathbb{S}^1$, to mały odcinek $U_1 = V_1$ zawarty między nimi nigdy nie przetnie ich obu w jednej iteracji).

Przykład pokazujący, że słabe mieszanie nie implikuje mieszania, jest nieco bardziej subtelny. Warto nadmienić, że początkowo przykładu szukano na przestrzeniach dobrze znanych (odcinek, okrąg, itp.), gdzie taka konstrukcja jest niemożliwa.

Zachodzą następujące twierdzenia dla odcinka [5, 6]:

Twierdzenie 5. *Niech $f \in C(I)$. Następujące warunki są równoważne:*

(5.1) *f^2 jest tranzytywne,*

(5.2) *f jest całkowicie tranzytywne,*

(5.3) *f jest mieszające,*

(5.4) *f jest tranzytywne i ma punkt okresowy o nieparzystym okresie różnym od* 1.

i okręgu [2, 8, 3]:

Twierdzenie 6. *Niech* $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *będzie całkowicie tranzytywne. Wtedy zachodzi dokładnie jeden z poniższych przypadków:*

(6.1) *f jest mieszające (ma wtedy gęsty zbiór punktów okresowych),*

(6.2) *f jest równoważne obrotowi o kąt niewymierny (tzn. istnieje homeomorfizm* $\pi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *takie, że* $\pi \circ f = R_\theta \circ \pi$*).*

Dla konstrukcji przykładu odwzorowania, które jest słabo mieszające ale nie jest mieszające, rozważmy zbiór ciągów obustronnie nieskończonych $\sum_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ wraz z metryką daną wzorem

$$d(x, y) = \begin{cases} 2^{-(k+1)} & x \neq y, \\ 0 & x = y, \end{cases}$$

gdzie k jest maksymalną liczbą o własności $x_i = y_i$ dla $-k \leq i \leq k$. Łatwo sprawdzić, że (Σ_2, d) jest zwarta oraz, że odwzorowanie $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ dane wzorem $\sigma(x)_i = x_{i+1}$ jest ciągłe (σ przesuwa ciąg x o jedną pozycję w lewo, stąd nazywane jest *przesunięciem*).

Definicja 7. *Zbiór* $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ *nazywamy* pełnym, *gdy dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *zbiór* $\mathcal{P}$ *zawiera n kolejnych liczb naturalnych (tzn.* $\{i, i+1, ..., i+n\} \subset \mathcal{P}$ *dla pewnego* $i \in \mathbb{N}$*).*

Definicja 8. *Niech* $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$*. Określamy zbiór* $X_\mathcal{P} \subset \Sigma_2$ *wzorem*

$$X_\mathcal{P} = \{x \in \Sigma_2 : x_i = x_j = 1, \quad i < j \Rightarrow j - i \in \mathcal{P}\}$$

oraz odwzorowanie $\sigma_\mathcal{P} = \sigma|X_\mathcal{P}$*. Zbiór* $X_\mathcal{P}$ *wraz z odwzorowaniem* $\sigma_\mathcal{P}$ *nazywamy* przesunięciem z odstępami.

Wprost z definicji $\sigma(X_\mathcal{P}) = X_\mathcal{P}$, natomiast z definicji metryki d wynika także, że $X_\mathcal{P}$ jest zbiorem domkniętym (więc zwartym). Jako natychmiastową konsekwencję otrzymujemy $\sigma_\mathcal{P} \in C(X_\mathcal{P})$. Przesunięcia z odstępami zostały w prowadzone w pracy [15] wraz z dowodem następującego twierdzenia:

Twierdzenie 9. *Niech* $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$*. Zachodzą następujące warunki:*

(9.1) $\sigma_\mathcal{P}$ *jest mieszające wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór* $\mathbb{N} \setminus \mathcal{P}$ *jest skończony,*

(9.2) $\sigma_\mathcal{P}$ *jest słabo mieszające wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór* $\mathbb{N} \setminus \mathcal{P}$ *jest pełny.*

Na tej podstawie bardzo prosto można skonstruować odwzorowanie słabo mieszające ale nie mieszające. Wystarczy zauważyć, że zbiór

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{2^n, 2^n + 1, ..., 2^n + n\}$$

jest pełny, ale jego dopełnienie w $\mathbb{N}$ jest nieskończone, co na podstawie twierdzenia 9 oznacza, że $\sigma_\mathcal{P}$ jest szukanym odwzorowaniem.

3. Mieszanie i chaos

Zanim przejdziemy dalej, zwróćmy jeszcze uwagę na następującą własność odwzorowań mieszających. Dla (X, d) zwartej niech 2^X oznacza przestrzeń podzbiorów zwartych X, wraz z metryką Hausdorffa $\mathscr{H}_d$, czyli metryką daną wzorem

$$\mathscr{H}_d(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(B, \varepsilon), B \subset N(A, \varepsilon)\},$$

gdzie $N(A, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} K(x, \varepsilon)$ jest otoczeniem ε-owym zbioru A.

Twierdzenie 10. *Jeśli f jest mieszające, to dla dowolnego zbioru zwartego A o niepustym wnętrzu (tzn.* Int$A \neq \emptyset$*) zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{H}_d(f^n(A), X) = 0.$$

Inaczej mówiąc, w przypadku odwzorowań mieszających zbiory o niepustych wnętrzach coraz bardziej wypełniają całą przestrzeń. Sugeruje to, że intuicyjnie rozumiane „mieszanie" jest realizowane przez odwzorowania topologicznie mieszające. Co więcej prezentowane własności mają związek ze zjawiskami zebranymi pod wspólną nazwą „chaos". Zacznijmy jednak od początku.

Symulacja podobna do tej, której efekt widzimy na rysunku 3, była umotywowaniem twierdzenia 11 udowodnionego przez Li i Yorke'a w pracy [16].

W twierdzeniu 11 przez Per(f) oznaczono zbiór punktów okresowych, tzn. punktów p o własności $f^n(p) = p$ dla pewnego $n > 0$:

Twierdzenie 11. *Niech $F \in C(I)$. Gdy istnieje $a \in I$ takie, że*

$$F^3(a) \le a < F(a) < F^2(a) \quad (ew.\ F^3(a) \ge a > F(a) > F^2(a)),$$

to:

(11.1) *Dla każdego $k = 1, 2, ...$ funkcja F ma punkt okresowy o okresie k.*

(11.2) *Istnieje nieprzeliczalny zbiór S (niezawierający punktów okresowych) spełniający warunki:*

(a) *Dla dowolnych $x, y \in S$, $x \neq y$ zachodzą warunki:*

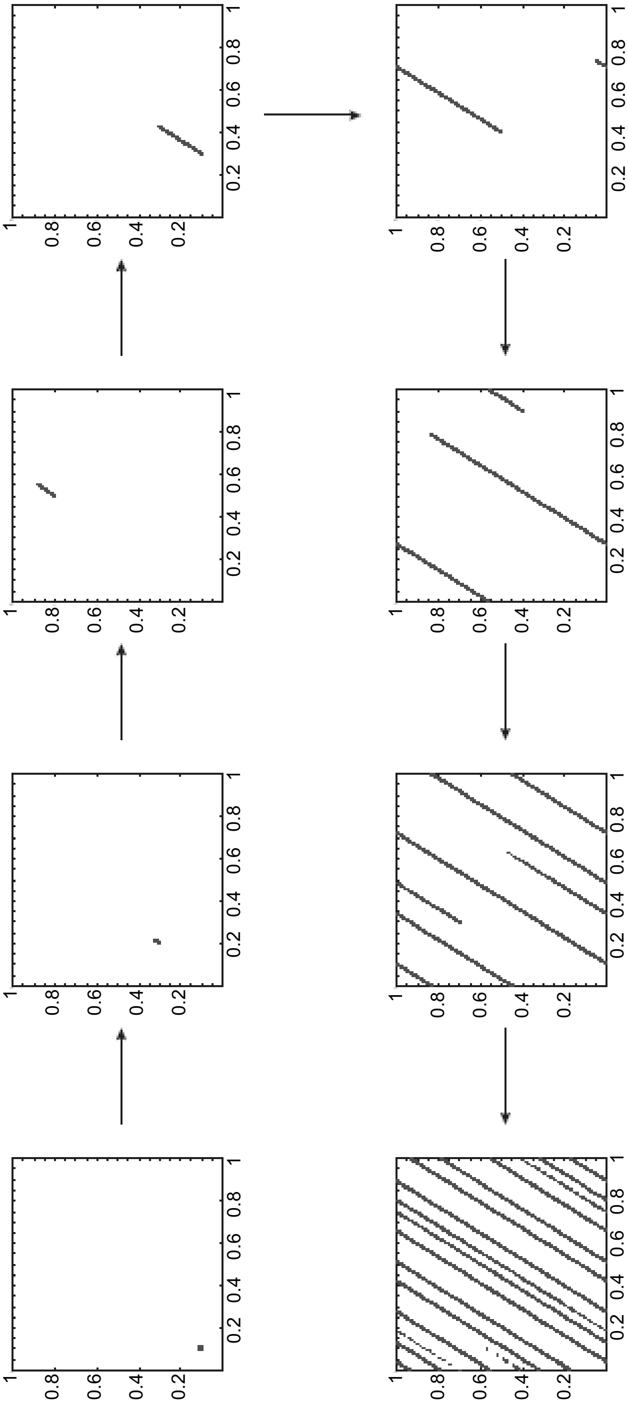
$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| > 0,$$

$$\liminf_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(y)| = 0.$$

(b) *Dla dowolnego $x \in S$ oraz $p \in$* Per(F) *zachodzi:*

$$\limsup_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(p)| > 0$$

(tzn. S nie zawiera punktów asymptotycznie okresowych).



Rys. 3. Obraz małego kwadratu przez mieszający homeomorfizm na torusie

Twierdzenie 11 jest istotne z dwóch powodów. Po pierwsze warunek (11.1) jest wnioskiem z twierdzenia z pracy [18] (opublikowanej w języku rosyjskim), na który zwrócono uwagę dopiero po publikacji pracy [16].

Twierdzenie 12 (Szarkowskiego). *W zbiorze* $\mathbb{N}$ *wprowadzamy porządek* $\lhd$ *według zasady:*

$$\begin{array}{lllllllll}
3 & \lhd & 5 & \lhd & 7 & \lhd & 9 & \lhd & \cdots \\
3\cdot 2 & \lhd & 5\cdot 2 & \lhd & 7\cdot 2 & \lhd & 9\cdot 2 & \lhd & \cdots \\
3\cdot 2^2 & \lhd & 5\cdot 2^2 & \lhd & 7\cdot 2^2 & \lhd & 9\cdot 2^2 & \lhd & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cdots & \lhd & 2^3 & \lhd & 2^2 & \lhd & 2 & \lhd & 1
\end{array}$$

Jeśli $F \in C(I)$ *ma punkt o okresie* k *oraz* $k \lhd l$ *to* F *ma także punkt o okresie* l.

Po drugie, warunek (11.2) stanowi pierwszą matematycznie ścisłą definicję chaosu, którą współcześnie wypowiada się w sposób następujący:

Definicja 13. *Niech* (X, d) *będzie zwarta oraz niech* $f \in C(X)$. *Zbiór* $S \subset X$ *nazywamy* splątanym *przez* f, *gdy dla dowolnych* $x, y \in S$, $x \neq y$ *zachodzi warunek*

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \quad \text{oraz} \quad \liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0.$$

Jeżeli przy ustalonym $\delta > 0$ *zachodzi silniejszy warunek* $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > \delta$, *to* S *nazywamy* δ*-splątanym.*

Jeśli dla f *można wskazać nieprzeliczalny zbiór splątany (*δ*-splątany), to* f *nazywamy funkcją chaotyczną w sensie Li i Yorke'a (odpowiednio* δ*-chaotyczną).*

Zwróćmy uwagę, że w definicji 13 nie zakłada się że $S \cap \mathrm{Per}(f) = \varnothing$ oraz, że brak jest w S punktów asymptotycznie okresowych. Jest to spowodowane faktem (który łatwo udowodnić), że S może zawierać co najwyżej jeden punkt okresowy i jeden punkt asymptotycznie okresowy (a po ich usunięciu S jest nadal nieprzeliczalny). Definicja zbioru splątanego sugeruje, że trajektorie punktów muszą się między sobą „przeplatać" w trakcie kolejnych iteracji. Można liczyć więc na pewien rodzaj „mieszania" w przestrzeni stanów (stąd też nazwa chaos). Jak łatwo zweryfikować (analizując obrót na okręgu), tranzytywność jest zbyt słabą własnością by zagwarantować chaos w sensie Li i Yorke'a. Wystarczy jednak by dynamika była tylko nieco bogatsza, aby zagwarantować chaos. Mówi o tym poniższe twierdzenie, udowodnione po raz pierwszy w [13] (przez zbiór Cantora rozumiemy zbiór zwarty, bez punktów izolowanych w którym jedyne podzbiory spójne to singletony).

Twierdzenie 14. *Jeśli* $f \in C(X)$ *(gdzie* X *to przestrzeń zwarta metryczna) jest tranzytywne oraz posiada co najmniej jeden punkt okresowy* p, *to wtedy istnieje zbiór Cantora* δ*-splątany przez* f.

Jeśli dodatkowo p jest stacjonarny (tzn. $f(p) = p$), to istnieje gęsty zbiór δ-splątany M będący co najwyżej przeliczalną sumą zbiorów Cantora.

Powyższy fakt jest mocno związany z definicją chaosu wprowadzoną przez R.L. Devaneya w książce [10]. Definicja ta łączy w sobie dynamikę gwarantującą mieszanie z dynamiką regularną.

Definicja 15. *Niech (X, d) będzie zwarta oraz niech $f \in C(X)$. Mówimy, że f jest wrażliwe na warunki początkowe, gdy istnieje $\delta > 0$ takie, że dla dowolnego $x \in X$ oraz $\varepsilon > 0$ można wskazać $k > 0$ oraz $y \in X$ o własności $d(x, y) < \varepsilon$, $d(f^k(x), f^k(y)) < \varepsilon$.*

Odwzorowanie f nazywamy chaotycznym w sensie Devaneya, gdy spełnia następujące warunki:

(15.1) *f jest tranzytywne oraz $\overline{Per(f)} = X$ (punkty okresowe są gęste w X),*

(15.2) *f jest wrażliwe na warunki początkowe.*

Wrażliwość na warunki początkowe oznacza, że dowolnie blisko każdego punktu x znajduje się inny, którego trajektoria oddala się po pewnym czasie od trajektorii x o więcej niż δ. Wydaje się więc, że jest to warunek najważniejszy w definicji chaosu.

Tym bardziej jest zaskakujące twierdzenie udowodnione w [4] (zobacz także [12, 19]) które mówi, że gdy X jest zbiorem nieskończonym, to prawdziwa jest implikacja

$$(15.1) \Rightarrow (15.2).$$

Zwróćmy uwagę, że na podstawie twierdzenia 14 definicja Devaneya jest mocniejsza niż definicja chaosu w sensie Li i Yorke'a. W tej sytuacji intuicja sugeruje, że mieszanie czy nawet słabe mieszanie powinny prowadzić do dynamiki, którą można nazwać chaotyczną. Już na początku lat 90. znany był fakt, że słabe mieszanie implikuje δ-chaos [14]. Okazuje się jednak, że w przypadku odwzorowań słabo mieszających zachodzi o wiele mocniejsza własność. Mamy następującą charakteryzację [22]:

Definicja 16. *Zbiór $S \subset X$ nazywamy* chaotycznym *względem rosnącego ciągu $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, gdy dla dowolnej funkcji ciągłej $F : S \to X$ istnieje podciąg $\{q_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ o własności*

$$\forall x \in S \quad \lim_{j\to\infty} f^{q_j}(x) = F(x).$$

Twierdzenie 17. *Niech $f \in C(X)$ gdzie (X, d) jest zwarta. Zachodzą następujące warunki:*

(17.1) *Odwzorowanie f jest słabo mieszające wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje gęsty zbiór S, będący conajwyżej przeliczalną sumą zbiorów Cantora, chaotyczny względem pewnego ciągu rosnącego $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

(17.2) *Odwzorowanie f jest mieszające wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje gęsty zbiór S, będący conajwyżej przeliczalną sumą zbiorów Cantora, chaotyczny względem dowolnego ciągu rosnącego $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

Przedstawione fakty stanowią jedynie wprowadzenie do ciekawej (i bogatej w wyniki) tematyki. Mamy nadzieję, że zebrane fakty będą przydatne w badaniach nad układami dynamicznymi (tak w matematyce jak i w naukach stosowanych) oraz zachęcą czytelnika do głębszych studiów nad topologicznymi aspektami dynamiki.

Podziękowania

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2007–2009 jako projekt badawczy, grant nr. NN201272333 Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego. Dodatkowo autor jest stypendystą w programie START Fundacji na rzecz Nauki Polskiej oraz uczestniczy w badaniach AGH, grant nr 10.420.03.

Literatura

[1] Aoki N., Hiraide K., *Topological theory of dynamical systems*. Recent advances, North-Holland Mathematical Library, vol. 52, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1994.
[2] Auslander J., Katznelson Y., *Continuous maps of the circle without periodic points*. Israel J. Math., **32** (1979), 375–381.
[3] Banks J., *Regular periodic decompositions for topologically transitive maps*. Ergodic Theory Dynam. Systems, **17** (1997), 505–529.
[4] Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G., Stacey P., *On Devaney's definition of chaos*. Amer. Math. Monthly, **99** (1992), 332–334.
[5] Barge M., Martin J., *Chaos, periodicity, and snakelike continua*. Trans. Amer. Math. Soc., **289** (1985), 355–365.
[6] Barge M., Martin J., *Dense orbits on the interval*. Michigan Math. J., **34** (1987), 3–11.
[7] Birkhoff G.D., *Proof of the ergodic theorem*. Proceedings of the National Academy of Sciences USA, **17** (1931), 656–660.
[8] Coven E., Mulvey I., *Transitivity and the centre for maps of the circle*. Ergodic Theory Dynam. Systems, **6** (1986), 1–8.
[9] Denker M., Grillenberger C., Sigmund K., *Ergodic theory on compact spaces*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 527, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
[10] Devaney R.L., *An introduction to chaotic dynamical systems*. The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA, 1986.
[11] Furstenberg H., *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*. Math. Systems Theory, **1** (1967), 1–49.
[12] Glasner E., Weiss B., *Sensitive dependence on initial conditions*. Nonlinearity, **6** (1993), 1067–1075.
[13] Huang W., Ye X., *Devaney's chaos or 2-scattering implies Li-Yorke's chaos*. Topology Appl., **117** (2002), 259–272.
[14] Iwanik A., *Independence and scrambled sets for chaotic mappings*. The mathematical heritage of C. F. Gauss, 372–378, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
[15] Lau K., Zame A., *On weak mixing of cascades*. Math. Systems Theory, **6** (1972/73), 307–311.
[16] Li T.-Y., Yorke J.A., *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly, **82** (1975), 985–992.
[17] Petersen K., *Ergodic theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
[18] Šarkovs'kii O.M., *Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*. Ukrain. Mat. Ž., **16** (1964), 61–71 (in Russian).

[19] Silverman S., *On maps with dense orbits and the definition of chaos*. Rocky Mountain J. Math., **22** (1992), 353–375.

[20] Utida S., *Population fluctuations, an experimental and theoretical approach*. Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology, **22** (1957), 139–151.

[21] Verhulst P.F., *Notice sur la loi que la population pursuit dans son accroissement*. Corresp. Math. Phys., **10** (1838), 113–117.

[22] Xiong J.C., Zhong G., *Chaos caused by a topologically mixing map*. Dynamical systems and related topics (Nagoya, 1990), 550–572, Adv. Ser. Dynam. Systems, 9, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.