AUTOMATYKA • 2006 • Tom 10 • Zeszyt 3

Leszek Rutkowski*

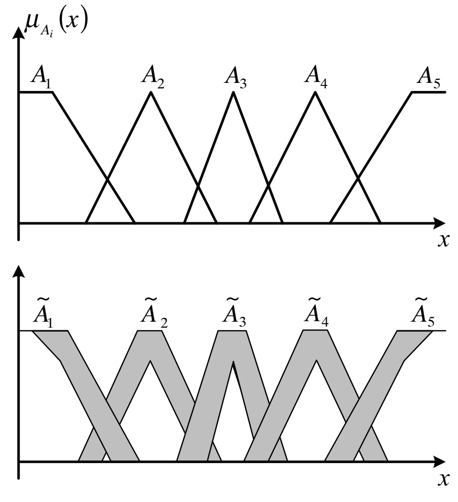
Podejmowanie decyzji z wykorzystaniem zbiorów rozmytych typu 2**

1. Wprowadzenie

Powszechnie stosowane zbiory rozmyte w zadaniach sterowania, identyfikacji, prognozowania, klasyfikacji i optymalizacji nazywamy zbiorami rozmytymi typu 1. Są one scharakteryzowane poprzez funkcję przynależności, przy czym wartość tej funkcji dla danego elementu $x \in \mathbf{X}$ nazywamy stopniem przynależności tego elementu do zbioru rozmytego. W przypadku zbiorów rozmytych typu 1, stopień przynależności jest liczbą rzeczywistą przyjmującą wartości w przedziale [0, 1]. W niniejszej pracy przedstawimy inną koncepcję rozmytego opisu niepewności. Według tej koncepcji stopień przynależności nie jest już liczbą, lecz ma charakter rozmyty. Na rysunku 1 przedstawiono ilustrację graficzną zbiorów rozmytych typu 1 A_1, ..., A_5 oraz odpowiadające im zbiory rozmyte typu 2 A_1, ..., A_5.

a)

b)



Rys. 1. Zbiory rozmyte: a) typu 1; b) typu 2

* Wyższa Szkoła Humanistyczno-Ekonomiczna w Łodzi, Politechnika Częstochowska

** Praca finansowana przez KBN, grant 3T11C 04827 oraz FNP-Program Subsydiów Profesorskich

Zauważmy, że w przypadku zbiorów rozmytych typu 2, dla dowolnego ustalonego elementu $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, nie możemy mówić o jednoznacznie określonej wartości funkcji przynależności. Innymi słowy, stopień przynależności nie jest liczbą, tak jak w przypadku zbiorów rozmytych typu 1. W pracy sformułujemy i rozwiążemy zadanie podejmowania decyzji z wykorzystaniem zbiorów rozmytych typu 2.

2. Zbiory rozmyte typu 2

Zbiorem rozmytym *A* typu 2, określonym na przestrzeni rozważań *X*, co oznaczamy $\tilde{A} \subseteq X$, nazywamy zbiór par

$$\left\{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\right\} \tag{1}$$

gdzie *x* jest elementem zbioru rozmytego, a jego stopień przynależności $\mu_{\tilde{A}}(x)$ do zbioru rozmytego $\tilde{A}$ jest zbiorem rozmytym typu 1 określonym na przedziale $J_x \subset [0,1]$, tzn.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \int_{u \in J_x} f_x(u)/u \tag{2}$$

Funkcję $f_x : [0,1] \to [0,1]$ będziemy nazywać funkcją drugorzędnej przynależności, a jej wartość $f_x(u)$ stopniem drugorzędnej przynależności lub krócej drugorzędną przynależnością. Oczywiście *u* jest argumentem funkcji drugorzędnej przynależności. Przedział J_x, będący dziedziną funkcji drugorzędnej przynależności f_x, jest nazywany podstawową przynależnością elementu *x*. Zbiór rozmyty $\tilde{A}$ możemy zapisać w notacji zbiorów rozmytych następująco [2]:

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x \tag{3}$$

lub:

$$\tilde{A} = \int \mu_{\tilde{A}}(x)/x = \int_{x \in X} \left[\int_{u \in J_x} f_x(u)/u\right] \Big/ x, \quad J_x \subseteq [0,1] \tag{4}$$

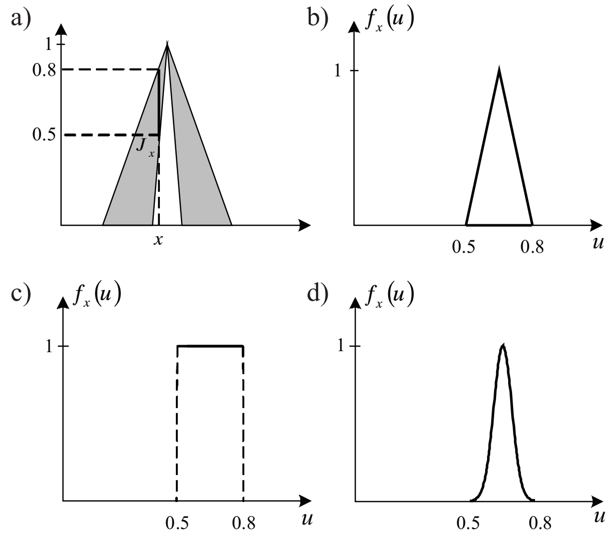
Przykład 1

Rysunek 2a ilustruje sposób konstrukcji zbioru rozmytego typu 2. Dla ustalonego elementu *x* otrzymujemy przedział $J_x = [0{,}4,\ 0{,}7]$ będący dziedziną funkcji drugorzędnej przynależności f_x. Na rysunkach 2b, c, d pokazano drugorzędne funkcje przynależności typu trójkątnego, przedziałowego i gaussowskiego o skończonym nośniku. W przypadku dyskretnym zbiór rozmyty typu 2 definiujemy analogicznie, tzn.

$$\tilde{A} = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x \tag{5}$$

oraz

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sum_{u \in J_x} f_x(u)/u \tag{6}$$



Rys. 2. Ilustracja zbioru rozmytego typu 2 wraz z drugorzędnymi funkcjami przynależności dla $J_x = [0{,}4,\ 0{,}7]$

Objaśnienia w tekście

Załóżmy, że zbiór X został zdyskretyzowany i przyjmuje R wartości $x_1, \ldots, x_R$, natomiast przedziały J_x odpowiadające tym wartościom zostały zdyskretyzowane i każdy z nich przyjmuje M_i wartości, $i = 1, \ldots, R$. Wówczas możemy zapisać

$$\tilde{A} = \sum_{x\in X}\left[\sum_{u\in J_x} f_x(u)/u\right]\Bigg/ x = \sum_{i=1}^{R}\left[\sum_{u\in J_{x_i}} f_{x_i}(u)/u\right]\Bigg/ x_i = \left[\sum_{k=1}^{M_1} f_{x_1}(u_{1k})/u_{1k}\right]\Bigg/ x_1 + \cdots + \left[\sum_{k=1}^{M_R} f_{x_R}(u_{Rk})/u_{Rk}\right]\Bigg/ x_R \tag{7}$$

Uwaga 1

Rozmyty stopień przynależności może przyjmować dwie charakterystyczne, skrajne postacie zbioru rozmytego typu 1:

1) $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1/1$ oznaczająca pełną przynależność elementu x do zbioru rozmytego $\tilde{A}$,
2) $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1/0$ oznaczająca brak przynależności elementu x do zbioru rozmytego $\tilde{A}$.

Przykład 2

Załóżmy, że $X = \{4, 5, 9\}$ oraz $J_{x_1} = \{0{,}4,\ 0{,}5,\ 0{,}7,\}$, $J_{x_2} = \{0{,}6,\ 1\}$, $J_{x_3} = \{0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}5\}$. Przypisując poszczególnym elementom zbiorów $J_{x_1}, J_{x_2}, J_{x_3}$ odpowiednie stopnie drugorzędnej przynależności, możemy zdefiniować następujący zbiór rozmyty typu 2

$$\tilde{A} = (0{,}5/0{,}4 + 1/0{,}5 + 0{,}5/0{,}7)/4 + (0{,}5/0{,}6 + 1/1)/6 + (0{,}5/0{,}2 + 1/0{,}3 + 0{,}5/0{,}5)/9 \tag{8}$$

Przecięcie zbiorów rozmytych typu 2 $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, o stopniach drugorzędnej przynależności $f_x(u)$ i $g_x(v)$, określone jest następująco

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \int_{u\in J_x^u}\int_{v\in J_x^v} f_x(u) \overset{T^*}{*} g_x(v) \Big/ u \overset{T}{*} v \tag{9}$$

We wzorze (9) t-norma agregująca drugorzędne przynależności oznaczona została przez T^*, a jej postać funkcyjna może być dobrana niezależnie od doboru t-normy T. Funkcja przynależności zbioru wynikowego jest największą wartością wyrażenia $f_x(u) \overset{T^*}{*} g_x(v)$ po wszystkich parach (u, v), które dają w wyniku ten sam element $w = u \overset{T}{*} v$. Wzór (9) w sposób oczywisty można uogólnić na przypadek przecięcia n zbiorów rozmytych typu 2.

Przykład 3

Wyznaczymy przecięcie zbiorów rozmytych typu 2

$$\tilde{A} = (0,5/0,2 + 1/0,5 + 0,5/0,7)/3 + (0,5/0,5 + 1/1)/5 \tag{10}$$

oraz

$$\tilde{B} = (1/0)/3 + (0,5/0,3 + 1/0,8)/5 \tag{11}$$

Jako t-normę T^* oraz T przyjmujemy operację minimum. Zgodnie ze wzorem (9) dla $x = 5$ otrzymujemy

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(5) = \frac{\max(0,5\wedge 0,5,\ 1\wedge 0,5)}{0,3} + \frac{0,5\wedge 1}{0,5\wedge 0,8} + \frac{1\wedge 1}{1\wedge 0,8} = \frac{0,5}{0,3} + \frac{0,5}{0,5} + \frac{1}{0,8} \tag{12}$$

3. Redukcja typu

Wyostrzanie zbiorów rozmytych typu 2 składa się z dwóch etapów. Najpierw należy dokonać tzw. redukcji typu, która polega na przekształceniu zbioru rozmytego typu 2 w zbiór rozmyty typu 1. Otrzymany w ten sposób zbiór rozmyty typu 1, nazywany centroidem, może być wyostrzony do wartości nierozmytej. Pokażemy teraz sposób wyznaczenia centroidu zbioru rozmytego typu 2.

Rozważmy zbiór rozmyty A (typu 1) określony na zbiorze X. Załóżmy, że zbiór X został zdyskretyzowany i przyjmuje R wartości $x_1, \ldots, x_R$. Centroid zbioru rozmytego A jest określony następująco

$$C_A = \frac{\sum_{k=1}^{R} x_k \mu_A(x_k)}{\sum_{k=1}^{R} \mu_A(x_k)} \tag{13}$$

Wyznaczymy teraz centroid zbioru rozmytego typu 2, $\tilde{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\tilde{A}}(x) \right) \middle| x \in X \right\}$, który w wyniku analogicznej dyskretyzacji zapisujemy następująco

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^{R} \left[\int_{u \in J_{x_k}} f_{x_k}(u)/u \right] \Big/ x_k \tag{14}$$

Stosując zasadę rozszerzania [4] do wzoru (13), otrzymujemy

$$C_{\tilde{A}} = \int_{\theta_1 \in J_{x_1}} \cdots \int_{\theta_R \in J_{x_R}} \left[f_{x_1}(\theta_1) * \cdots * f_{x_R}(\theta_R) \right] \Bigg/ \frac{\sum_{k=1}^{R} x_k \theta_k}{\sum_{k=1}^{R} \theta_k} \tag{15}$$

Oczywiście centroid $C_{\tilde{A}}$ jest zbiorem rozmytym typu 1.

Przykład 4

Niech **X** = {4, 2}. Dokonamy redukcji typu następującego zbioru rozmytego typu 2

$$\tilde{A} = (0,6/0,4 + 1/0,8)/4 + (0,3/0,7 + 1/0,6)/2 \tag{16}$$

Centroid zbioru rozmytego typu 2 danego wzorem (18) jest zbiorem rozmytym typu 1 postaci

$$C_{\tilde{A}} = \frac{0,6 \times 0,3}{a_1} + \frac{0,6 \times 1}{a_2} + \frac{1 \times 0,3}{a_3} + \frac{1 \times 1}{a_4} = \frac{0,18}{a_1} + \frac{0,6}{a_2} + \frac{0,3}{a_3} + \frac{1}{a_4} \tag{17}$$

przy czym:

$$a_1 = \frac{4 \times 0,4 + 2 \times 0,7}{0,4 + 0,7} = \frac{30}{11},$$

$$a_2 = \frac{4 \times 0,4 + 2 \times 0,6}{0,4 + 0,6} = 2,8,$$

$$a_3 = \frac{4 \times 0,8 + 2 \times 0,7}{0,8 + 0,7} = \frac{46}{15},$$

$$a_4 = \frac{4 \times 0,8 + 2 \times 0,6}{0,8 + 0,6} = \frac{22}{7}.$$

4. Podejmowanie decyzji w otoczeniu rozmytym

Teoria zbiorów rozmytych typu 1 pozwala na podejmowanie decyzji w tzw. otoczeniu rozmytym, które składa się z celów rozmytych, ograniczeń rozmytych i decyzji rozmytej [1, 4]. Rozważmy pewien zbiór opcji (zwanych również alternatywami, wyborami lub wariantami) oznaczony przez $X_{\text{alt}} = \{x\}$. Cel rozmyty definiuje się jako zbiór rozmyty G określony w zbiorze opcji X_{alt}. Zbiór rozmyty G opisany jest funkcją przynależności $\mu_G : X_{\text{alt}} \to [0, 1]$. Funkcja $\mu_G(x) \in [0, 1]$ dla konkretnego x określa stopień przynależności opcji $x \in X_{\text{alt}}$ do zbioru rozmytego G (cel rozmyty). Ograniczenie rozmyte definiuje się jako zbiór rozmyty C również określony w zbiorze opcji X_{alt}. Zbiór rozmyty C opisany jest funkcją przynależności $\mu_C : X_{\text{alt}} \to [0, 1]$. Funkcja $\mu_C(x) \in [0, 1]$ dla konkretnego x określa stopień przynależności opcji $x \in X_{\text{alt}}$ do zbioru rozmytego (ograniczenie rozmyte). Rozważmy zadanie wyznaczenia decyzji, spełniającej jednocześnie cel rozmyty G i ograniczenie rozmyte C. Decyzja rozmyta D jest zbiorem rozmytym powstałym w wyniku przecięcia celu rozmytego i ograniczenia rozmytego

$$D = G \cap C \tag{18}$$

przy czym

$$\mu_D(x) = T\{\mu_G(x), \mu_C(x)\} \tag{19}$$

dla każdego $x \in X$. Zauważmy, że zapis (19) sugeruje następującą interpretację zadania podejmowania decyzji w otoczeniu rozmytym: „osiągnąć G i spełnić C”. Konkretna postać wzoru (19) zależy od przyjętej t-normy [3].

Załóżmy teraz, że mamy $n > 1$ celów rozmytych, $G_1, ..., G_n$ i $m > 1$ ograniczeń rozmytych, $C_1, ..., C_m$, a wszystkie są określone jako zbiory rozmyte w zbiorze alternatyw X_{alt}. Decyzję rozmytą wyznacza się w sposób następujący

$$D = G_1 \cap ... \cap G_n \cap C_1 \cap ... \cap C_m \tag{20}$$

przy czym

$$\mu_D(x) = T\left\{\mu_{G_1}(x), \ ..., \mu_{G_n}(x), \mu_{C_1}(x), \ ..., \mu_{C_m}(x)\right\} \tag{21}$$

dla każdego $x \in X_{\text{alt}}$. Decyzją maksymalizującą jest opcja $x^* \in X$, taka że

$$\mu_D(x^*) = \max_{x \in X} \mu_D(x) \tag{22}$$

Powyżej opisaliśmy sposób podejmowania decyzji w otoczeniu rozmytym z wykorzystaniem zbiorów rozmytych typu 1.

W przypadku zbiorów rozmytych typu 2 postępujemy w sposób następujący:

1. formułujemy $n > 1$ celów rozmytych, $\tilde{G}_1, ..., \tilde{G}_n$, i $m > 1$ ograniczeń rozmytych, $\tilde{C}_1, ..., \tilde{C}_m$;
2. wyznaczamy przecięcie zbiorów rozmytych typu 2 $\tilde{D} = \tilde{G}_1 \cap ... \cap \tilde{G}_n \cap \tilde{C}_1 \cap ... \cap \tilde{C}_m$;
3. dokonujemy redukcji typu, tzn. przekształcenia zbioru rozmytego typu 2 $\tilde{D}$ w zbiór rozmyty typu 1;
4. wyznaczamy decyzję maksymalizującą zgodnie ze wzorem (22).

Operację przecięcia zbiorów rozmytych typu 2 wyjaśniliśmy w punkcie 2, natomiast operację redukcji typu w punkcie 3.

Literatura

[1] Kacprzyk J.: *Wieloetapowe sterowanie rozmyte*. Warszawa, WNT 2001

[2] Mendel J.: *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions.* Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall PTR, 2001

[3] Rutkowski L.: *Flexible Neuro-Fuzzy Systems: Structures, Learning and Performance Evaluation.* Kluwer Academic Publishers, 2004

[4] Rutkowski L.: *Metody i techniki sztucznej inteligencji: inteligencja obliczeniowa*. Warszawa, PWN 2005