AUTOMATYKA • 2006 • Tom 10 • Zeszyt 1

Adam Ślusarczyk

Sterowanie i synteza regulatora minimalnoczasowego dla oscylacyjnych systemów liniowych drugiego rzędu

1. Wprowadzenie

Problem sterowania minimalnoczasowego polega na określeniu sterowania, które w najkrótszym czasie realizuje dany cel. Synteza regulatora czasooptymalnego w układzie oscylacyjnym drugiego rzędu była wielokrotnie dyskutowana w literaturze. Będziemy rozważać przypadek klasyczny (system liniowy stacjonarny), gdy dynamika obiektu sterowanego opisana jest równaniem

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_2 x(t) = u(t) \tag{1}$$

gdzie stałe $a_1, a_2 \in \boldsymbol{R}$ spełniają nierówność $a_1^2 - 4a_2 < 0,$ a obszar sterowania U: $|u(t)| \le 1.$

Problem minimalnoczasowy obiektu sterowanego (1) będzie rozumiany jako przeprowadzenie systemu z dowolnego stanu początkowego $\boldsymbol{x^0} = (x_0, \dot{x}_0) \in \boldsymbol{R}^2$ (w chwili t_0) do stanu końcowego $\boldsymbol{x^k} = (x_k, \dot{x}_k) \in \boldsymbol{R}^2$ (w chwili t_k) w minimalnym czasie $T = t_k - t_0 < \infty$. Dla prostoty rozważań zakładamy, że stan końcowy jest dany i równy $\mathbf{0} = (0, 0)$.

Przyjmijmy $a_1 = 2a$, $a_2 = \omega^2$ i zapiszmy dane równanie (1) w znormalizowanej postaci

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + \omega^2 x = u \tag{2}$$

gdzie $\omega > 0$, $a^2 < \omega^2$.

System (2) jest równoważny systemowi (3) w postaci kanonicznej

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \tag{3}$$

gdzie x_1, x_2 to nowe zmienne.

---

* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Transformujemy system X (3) do systemu podobnego Y:

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a & -b\\ b & -a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{-1}{b}u\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -a & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} \tag{4}$$

gdzie y_1, y_2 to nowe zmienne i $b=\sqrt{\omega^2-a^2}>0$.

Procesy optymalne w systemach X i Y odpowiadają sobie jednoznacznie, przy czym macierz stanu dla Y (4) jest prostszej postaci.

Celem uproszczenia zapisu operacji obrotu, a przede wszystkim zwiększenia przejrzystości niektórych wzorów, będziemy dalej utożsamiać elementy $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ przestrzeni $\boldsymbol{R}^2$ z punktami $\boldsymbol{y} = y_1 + \mathrm{j}y_2$ na płaszczyźnie zespolonej $\boldsymbol{C}$. Zatem równanie (4) przyjmie postać

$$\dot{\boldsymbol{y}} = (-a + \mathrm{j}b)\,\boldsymbol{y} - \mathrm{j}\frac{1}{b}u \tag{5}$$

Sterowanie optymalne $\hat{u}$ przyjmuje wartości na brzegu ∂U obszaru dopuszczalnego U. Dla $u = \pm 1$ odcinek trajektorii układu Y (5) jest odcinkiem trajektorii układu $Y_{\pm}$

$$\dot{\boldsymbol{y}} = (-a + \mathrm{j}b)\,\boldsymbol{y} \mp \mathrm{j}\frac{1}{b} \tag{6}$$

gdzie bierzemy odpowiednio albo górne, albo dolne znaki. Po przekształceniu (6) do postaci:

$$\dot{\boldsymbol{y}} = (-a+\mathrm{j}b)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}_{\pm}),\quad \boldsymbol{h}_{\pm} = \pm\frac{1-\mathrm{j}a/b}{a^2+b^2} \tag{7}$$

można łatwo wywnioskować, że rozwiązaniem ogólnym równania (6) jest:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_{\pm} + \mathrm{C}\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi},\quad \varphi = bt + \gamma \tag{8}$$

gdzie C i γ – dowolne stałe.

Zatem dla $u = \pm 1$ trajektorie układu Y (5) są spiralami logarytmicznymi o biegunie w punkcie $\boldsymbol{h}_{\pm}$, przy czym dla $a = 0$ redukują się do okręgów.

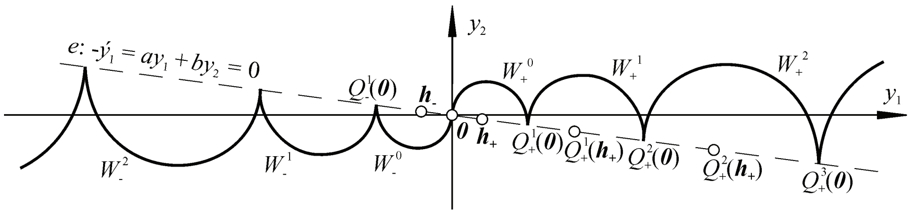
Dalej będziemy zakładać, że parametr $a \neq 0$, a w szczególnym przypadku systemu bez tłumienia, tj. gdy $a = 0$, prezentowane wzory należy rozumieć w sensie granicznym $a \to 0$.

2. Sterowanie optymalne w systemie zamkniętym

W systemie Y opisanym równaniemi (4) lub (5) sterowanie optymalne $\hat{u}$ jest funkcją stanu $\boldsymbol{y}$. Szukamy takiej zależności sterowania od stanu $\hat{u}(\boldsymbol{y})$, która zapewni realizację sterowania optymalnego w układzie zamkniętym. Synteza regulatora ze sprzężeniem zwrotnym $\hat{u}(\boldsymbol{y})$ uzyskana jest na drodze posuwania się wstecz, to jest od stanu końcowego do początkowego, czyli przeciwnie do kierunku biegu czasu wzdłuż trajektorii rozwiązania, i przez zaznaczenie, gdzie $\hat{u}$ zmienia znak na płaszczyźnie stanów [7]. Miejsce geometryczne punktów przełączeń na płaszczyźnie stanów tworzy tak zwaną **krzywą przełączania**.

2.1. Krzywa przełączania

Krzywa przełączania W składa się z punktów, w których optymalne trajektorie przełączają się z rodziny rozwiązań Y_+ do Y_- (6) i na odwrót. Krzywą przełączeń (rys. 1) wyznaczamy, idąc od punktu końcowego **0** w kierunku przeciwnym do biegu czasu [2, 7, 15].



Rys. 1. Krzywa przełączania W ($a > 0$)

Niech $W_{\pm}^{0}$ będzie łukiem standardowego rozwiązania systemu $Y_{\pm}$ zbiegającego do **0**

$$W_{\pm}^{0} = \{ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_{\pm}(1 + \mathrm{e}^{\frac{a}{b}(\pi-\varphi)} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}) \quad : 0 \le \varphi < \pi \} \tag{9}$$

gdzie $\boldsymbol{h}_{\pm}$ określone jest zależnością (7). Oznaczmy przez $Q_{\pm}$ jednokładność

$$Q_{\pm}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{e}^{\frac{a}{b}\pi} \boldsymbol{y} + (1 + \mathrm{e}^{\frac{a}{b}\pi}) \boldsymbol{h}_{\pm} = \mathrm{e}^{\frac{a}{b}\pi} (\boldsymbol{y} + \mathrm{ctgh} \frac{a\pi}{2b} \boldsymbol{h}_{\pm}) - \mathrm{ctgh} \frac{a\pi}{2b} \boldsymbol{h}_{\pm} \tag{10}$$

Wówczas krzywą przełączania W możemy zapisać [15] jako sumę mnogościową:

$$W = W_{+} \cup W_{-} \cup \{\mathbf{0}\}, \quad W_{\pm} = \bigcup_{n=0}^{\infty} W_{\pm}^{n}, \quad W_{\pm}^{n} = Q_{\pm}^{n}(W_{\pm}^{0}) \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{11}$$

gdzie zbiory $W_{\pm}^{0}$ są zdefiniowane przez (9) oraz przekształcenie

$$Q_{\pm}^{n}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{e}^{\frac{a}{b}\pi n} (\boldsymbol{y} + \mathrm{ctgh} \frac{a\pi}{2b} \boldsymbol{h}_{\pm}) - \mathrm{ctgh} \frac{a\pi}{2b} \boldsymbol{h}_{\pm} \tag{12}$$

jest n-krotnym złożeniem przekształcenia $Q_{\pm}$ (10), przy czym $Q_{\pm}^{0} = I$ (I – identyczność).

Zaznaczmy, że w przypadku systemów niestabilnych obszar D na płaszczyźnie stanów, w którym synteza jest możliwa do uzyskania, jest ograniczony.

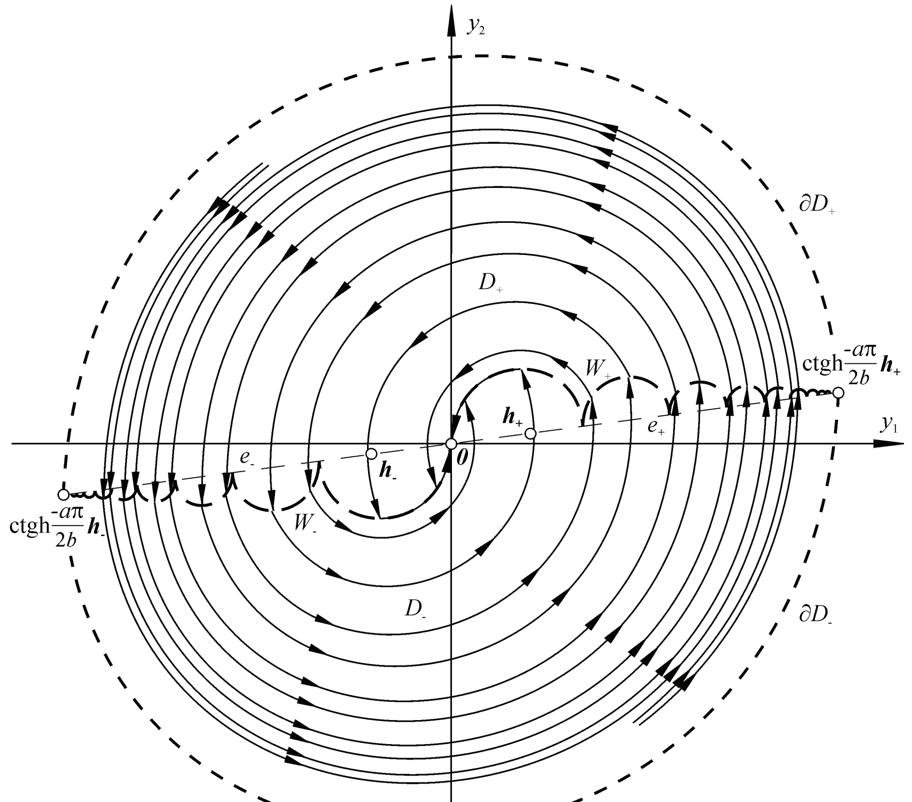
Krzywa przełączania W jest dla $a = 0$ jednowartościowa na całej osi y_1, a dla $a < 0$ – w przedziale

$$|y_1| < \mathrm{Re}[\lim_{n\to\infty} Q_+^n(\mathbf{0})] = \mathrm{Re}[-\mathrm{ctgh}\frac{a\pi}{2b}\boldsymbol{h}_+] = \frac{1}{a^2+b^2}\mathrm{ctgh}\frac{-a\pi}{2b} \tag{13}$$

Korzystając z zależności (9)–(12), można zapisać funkcję $y_2 = W(y_1)$ w postaci uwikłanej [15].

2.2. Płaszczyzna fazowa

Synteza regulatora optymalnego polega na wyznaczeniu sterowania optymalnego w funkcji stanu $\hat{u}(\boldsymbol{y})$. Dla $a = 0$ synteza ta może być przeprowadzona na całej płaszczyźnie $D = \boldsymbol{R}^2$ $(\boldsymbol{C})$.



Rys. 2. Rodzina trajektorii optymalnych na płaszczyźnie fazowej D $(a < 0)$

Jeżeli $a < 0$, to rozmiary łuków $W_{\pm}^{0}$, $W_{\pm}^{1}$, $W_{\pm}^{2}$, … maleją w postępie geometrycznym i w konsekwencji synteza sterowania optymalnego może być przeprowadzona tylko w ograniczonym wypukłym wycinku płaszczyzny D (rys. 2), którego brzeg ∂D jest sumą łuków (8):

$$\partial D = \partial D_{+} \cup \partial D_{-}, \quad \partial D_{\pm} = \{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_{\pm}(1 + \frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\pi} - 1}\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}): \quad 0 \le \varphi < \pi\} \tag{14}$$

Dla stanów $\boldsymbol{y} \in \partial D$ (14) system Y (5) przy sterowaniu optymalnym $\hat{u}(\partial D_{\pm}) = \pm 1$ jest warunkowo stabilny i oscyluje z okresem $T = 2\tau/b$.

Płaszczyznę fazową D możemy zapisać jako sumę mnogościową:

$$D = D^{+} \cup D^{-} \cup h^{+} \cup h^{-} \cup \{\mathbf{0}\}$$

$$D^{\pm} = \{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_{\pm}(\boldsymbol{z}+1): \quad |\boldsymbol{z}|\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\arg \boldsymbol{z}} + 1 < \mathrm{ctgh}\frac{-a\pi}{2b}, \ 0 \le \arg \boldsymbol{z} < \pi\} \tag{15}$$

$$h^{\pm} = \{\lambda \boldsymbol{h}_{\pm}: \quad 0 < \lambda \le 1\}$$

2.3. Synteza regulatora optymalnego

Niech obszary D_{+} i D_{-} będą zbiorami wynikającymi z podziału przez krzywą przełączeń W (11) płaszczyzny fazowej D (15):

$$D = D_{+} \cup D_{-} \cup W, \quad D_{\pm} = \{\boldsymbol{y} = y_1 + \mathrm{j}y_2 \in D: \quad \pm y_2 > \pm W(y_1)\} \tag{16}$$

W przypadku gdy $a < 0$, obszary D_{+} i D_{-} ograniczone są krzywą W (11) oraz odpowiednio łukami ∂D^{+} i ∂D^{-} (14) (rys. 2). Do każdego stanu należącego albo do gałęzi $W_{\pm}$ krzywej przełączeń, albo do zbioru $D_{\pm}$, przyporządkowane jest sterowanie optymalne $\hat{u}(D_{\pm} \cup W_{\pm}) = \pm 1$ i prawo sterowania optymalnego możemy zapisać w postaci

$$\hat{u}(\boldsymbol{y} = y_1 + \mathrm{j}y_2) = \begin{cases} \mathrm{sgn}[y_2 - W(y_1)] & \boldsymbol{y} \in D \setminus (W_{+} \cup W_{-}) \\ \pm 1 & \boldsymbol{y} \in W_{\pm} \end{cases} \tag{17}$$

Zauważmy, że wzór (17) dla $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ daje prawidłową wartość $\hat{u}(\mathbf{0}) = 0$.

Niech ε oznacza wartość (± 1) sterowania optymalnego $\breve{u}$ w chwili początkowej t_0 lub sam znak ($\pm$) w przypadku indeksowania (na przykład $W_{-\varepsilon}$ dla $\varepsilon = -1$ to naturalnie W_{+}). Rozważmy punkt $\boldsymbol{y}^{e} = \boldsymbol{y}(t_e)$ odpowiadający ekstremum funkcji y_1 ($y_1 = x$) w przedziale czasu $-\pi/b < t - t_0 = \pi/b$ (rys. 3). Korzystając z funkcji $\hat{u}$ (17), możemy wyznaczyć znak

$$\varepsilon = \hat{u}(\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}) \tag{18}$$

Jeżeli $\varepsilon = -1$, to w chwili t_e mamy maksimum, a jeżeli $\varepsilon = +1$ – minimum funkcji y_1. Punkt $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{e}}$ jest punktem przecięcia trajektorii układu Y_ε (6) z półprostą $e_{-\varepsilon}$ wyznaczoną przez $\boldsymbol{h}_{-\varepsilon}$:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{y}(t_0^+ - \pi/b)\boldsymbol{y}(t_0 + \pi/b) \cap e_{-\varepsilon}, \quad \varepsilon = \hat{u}(\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}) \\ \boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}} \subset \boldsymbol{y}(t_0^+ - \pi/b)\boldsymbol{y}(t_0 + \pi/b) = \{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_\varepsilon + (\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}} - \boldsymbol{h}_\varepsilon)\,\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\upsilon}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\upsilon} \quad : -\pi < \upsilon \le \pi\} \\ e_{-\varepsilon} = \{\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{h}_{-\varepsilon} \quad : 0 \le \lambda < \infty\}\end{gathered} \tag{19}$$

Stąd dostajemy następujący wzór określający wartość (nieujemną) ilorazu $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{e}}/\boldsymbol{h}_{-\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{e}}}{\boldsymbol{h}_{-\varepsilon}} &= \left|z^{\mathbf{0}}\right| \mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\arg\frac{1}{z^{\mathbf{0}}}} - 1, \\ z^{\mathbf{0}} &= 1 + \frac{\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}}{\boldsymbol{h}_{-\varepsilon}}, \quad \varepsilon = \hat{u}(\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}})\end{aligned} \tag{20}$$

gdzie arg (z) oznacza argument główny liczby $z \in \boldsymbol{C}$ z przedziału $(-\pi, \pi]$.

Wykorzystując wyprowadzoną zależność liczby $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{e}}/\boldsymbol{h}_{-\varepsilon}$ od $\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}$ (20), możemy stwierdzić, że w przypadku $a < 0$, jeśli $\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}} \in D_\varepsilon \cup W_\varepsilon$, gdzie ε określone jest równaniem (18), to zachodzi nierówność

$$\frac{\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{e}}}{\boldsymbol{h}_{-\varepsilon}} < \lim_{n \to \infty} \frac{Q_{-\varepsilon}^{n}(\mathbf{0})}{\boldsymbol{h}_{-\varepsilon}} = \operatorname{ctgh}\frac{-a\pi}{2b} \tag{21}$$

Warto też wspomnieć, że możemy łatwo wyznaczyć liczbę przełączeń $(k-1)$ w zależności od warunków początkowych $\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}} \in D$ z następującej nierówności podwójnej [15]

$$\frac{Q_{-\varepsilon}^{k-2}(\mathbf{0})}{\boldsymbol{h}_{-\varepsilon}} < \frac{\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{e}}}{\boldsymbol{h}_{-\varepsilon}} \le \frac{Q_{-\varepsilon}^{k-1}(\mathbf{0})}{\boldsymbol{h}_{-\varepsilon}} \tag{22}$$

3. Sterowanie optymalne w systemie otwartym

Wyznaczanie sterowania optymalnego w systemie otwartym sprowadza się do znalezienia takiego sterowania dopuszczalnego $\breve{u}$, będącego funkcją czasu $\breve{u}(t)$, że funkcjonał jakości, tu czas t_k, osiąga przy nim wartość minimalną. W porównaniu z zadaniem sterowania optymalnego w systemie regulacji zamkniętej, zadanie sterowania optymalnego w systemie otwartym jest rozwiązywane przy danych ustalonych warunkach początkowych.

Sterowanie optymalne $\breve{u}$ może w przedziale $t_0 < t < t_k$ zmienić znak skończoną liczbę $(k-1)$ razy i wobec tego ma postać sterowania przekaźnikowego

$$\begin{aligned}\breve{u}(t) = \varepsilon[1(t-t_0) - 2\cdot 1(t-t_1) + 2\cdot 1(t-t_2) - \ldots + (-1)^{k-1} 2\cdot 1(t-t_{k-1}) + \\ + (-1)^k 1(t-t_k)]\end{aligned} \tag{23}$$

gdzie:

$t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ – kolejne chwile przełączania,

ε – znak sterowania optymalnego $\breve{u}$ w chwili t_0,

$1(t)$ – funkcja skoku jednostkowego: $1(t) = 1$ dla $t = 0$ i $1(t) = 0$ dla $t < 0$.

W celu określenia optymalnego sterowania należy zatem wyznaczyć znak ε (±), czasy przełączeń $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ i minimalny czas końcowy sterowania t_k.

Wyznaczenie znaku ε, czyli początkowej wartości sterowania $\breve{u}(t_0)$, sprowadza się do omówionej syntezy regulatora optymalnego (optymalnego układu sterowania). Dla każdego systemu Y (5) o różnych warunkach początkowych $\boldsymbol{y}^\mathbf{0}$ należących do obszaru sterowalności D, istnieje dokładnie jedno sterowanie optymalne $\hat{u}$ (17), które steruje $\boldsymbol{y}^\mathbf{0}$ do początku układu $\mathbf{0}$ i w konsekwencji znak $\acute{l}$ może być określony równością (18).

3.1. Trajektoria optymalna

Załóżmy, że warunki początkowe $\boldsymbol{y}^\mathbf{0} = \boldsymbol{y}(t_0)$ wymuszają początkowe sterowanie optymalne $u(t_0)$ równe ε (18).

Niech k oznacza liczbę przedziałów ciągłości optymalnego sterowania potrzebną do przeprowadzenia układu z dowolnego niezerowego stanu $\boldsymbol{y}^\mathbf{0}$ do stanu końcowego $\boldsymbol{y}^k = \mathbf{0}$. Trajektoria optymalna $\boldsymbol{y}$ (spełniająca zasadę maksimum) na płaszczyźnie stanów może być wówczas opisana następująco [15].

Punkt $\widehat{\boldsymbol{y}} = \widehat{\boldsymbol{y}}(t)$ porusza się po trajektorii układu Y_ε (6) od punktu początkowego $\boldsymbol{y}^\mathbf{0} = \widehat{\boldsymbol{y}}(t_0)$ do punktu przełączenia $\boldsymbol{y}^\mathbf{1} = \widehat{\boldsymbol{y}}(t_1)$ zakreślając łuk $\boldsymbol{y}^\mathbf{0}\boldsymbol{y}^\mathbf{1}$, który względem punktu $\boldsymbol{h}_\varepsilon$ wyznacza kąt β_1 $(0 < \beta_1 = \pi)$; $t_1 - t_0 = \beta_1/b$. Dalej sterowanie zmienia znak $\breve{u}(t_1) = -\varepsilon$ i punkt $\widehat{\boldsymbol{y}}$ porusza się po trajektorii układu $Y_{-\varepsilon}$ (6) aż do punktu przełączenia $\boldsymbol{y}^\mathbf{2} = \widehat{\boldsymbol{y}}(t_2)$, zakreślając łuk $\boldsymbol{y}^\mathbf{1}\boldsymbol{y}^\mathbf{2}$, który względem punktu $\boldsymbol{h}_{-\varepsilon}$ wyznacza kąt $\beta_2 = \pi$, po czym sterowanie ponownie zmienia znak $\breve{u}(t_2) = \varepsilon$.

W ciągu jednakowych odcinków czasu $t_2 - t_1 = \ldots = t_{k-1} - t_{k-2} = \pi/b$ punkt $\widehat{\boldsymbol{y}}$ porusza się na przemian po trajektoriach układów Y_+ i Y_- dla kolejnych $u = +1$ i $u = -1$, zakreślając łuki $\boldsymbol{y}^\mathbf{1}\boldsymbol{y}^\mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{y}^{k-2}\boldsymbol{y}^{k-1}$ i odpowiadające im kąty $\beta_2 = \ldots = \beta_{k-1} = \pi$ względem punktów $\boldsymbol{h}_+$ i $\boldsymbol{h}_-$.

Ostatni etap optymalnego ruchu punktu $\widehat{\boldsymbol{y}}$ (kończący się w $\boldsymbol{y}^k = \widehat{\boldsymbol{y}}(t_k) = \mathbf{0}$) odbywa się po łuku $\boldsymbol{y}^{k-1}\boldsymbol{y}^k \subset (-1)^{k-1} W_\varepsilon^0$, który względem punktu $(-1)^{k-1}\boldsymbol{h}_\varepsilon$ wyznacza kąt β_k $(0 < \beta_k = \pi)$; $t_k - t_{k-1} = \beta_k/b$. W ostatnim przedziale czasu $t_{k-1} = t < t_k$ sterowanie optymalne jest równe $\breve{u}(t_{k-1}) = (-1)^{k-1}\varepsilon$.

Zgodnie z przedstawionym rozważaniem trajektorię optymalną $\hat{y}$ możemy zapisać jako:

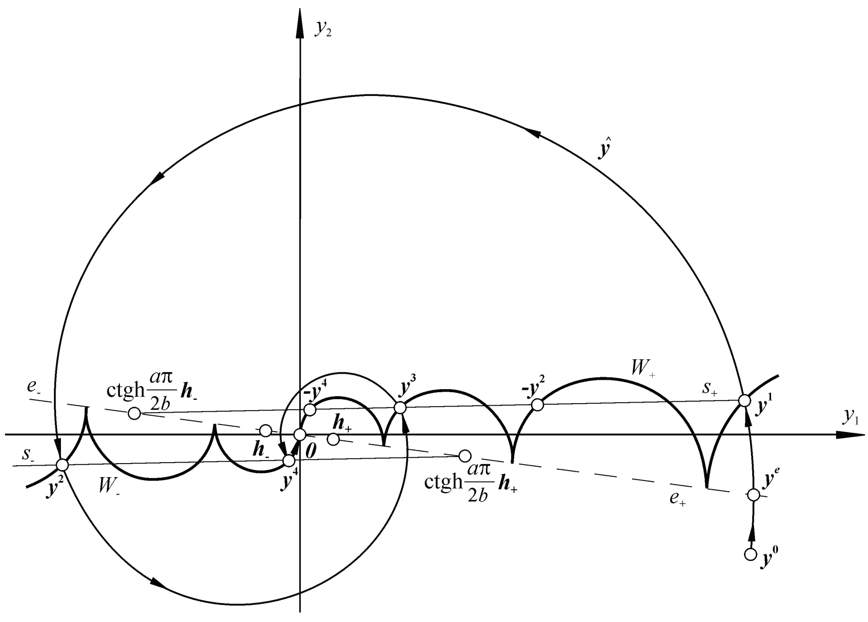
$$\hat{y} = \bigcup_{i=1}^{k} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i-1}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}}$$
$$\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i-1}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}} = \{\boldsymbol{y} = (-1)^{i-1}\boldsymbol{h}_\varepsilon + [\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i-1}} - (-1)^{i-1}\boldsymbol{h}_\varepsilon]\,\mathrm{e}^{(-a+\mathrm{j}b)(t-t_{i-1})} \quad t_{t-1} \le t < t_t\} \tag{24}$$

gdzie $b(t_i - t_{i-1}) = \beta_i$; $i = 1, 2, \ldots, k$. Trajektoria $\hat{y}$ spełnia warunki $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{0}}$ i $\hat{y}(t_k^-) = \boldsymbol{y}^k = \boldsymbol{0}$.

Uwzględniając równości $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \ldots = t_{k-1} - t_{k-2} = \pi/b$ w równaniu (24) możemy określić punkty $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{2}}$, $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{3}}$, …, $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{k-1}}$ w zależności od $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{1}}$. Korzystając z przekształceń $-Q_\varepsilon^{-1}$ i $Q_{-\varepsilon}^{-1}$ (10), kolejne punkty przełączeń możemy zapisać: $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{2}} = -Q_{-\varepsilon}^{-1}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{1}})$, $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{3}} = -Q_\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{2}})$ itd., a wobec tożsamości $-Q_\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{y}) = Q_{-\varepsilon}^{-1}(-\boldsymbol{y})$, dostajemy wzór na kolejne $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$

$$(-1)^{n-1}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}} = Q_{-\varepsilon}^{-(n-1)}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{1}}) = \mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\pi(n-1)}\left(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{1}} - \mathrm{ctgh}\frac{a\pi}{2b}\boldsymbol{h}_\varepsilon\right) + \mathrm{ctgh}\frac{a\pi}{2b}\boldsymbol{h}_\varepsilon \tag{25}$$

dla $n = 2, \ldots, k-1$. Tak więc punkty $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{1}}$, $-\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{2}}$, $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{3}}$, …, $(-1)^k\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{k-1}}$ leżą na jednej prostej (rys. 3).



Rys. 3. Trajektoria optymalna $\boldsymbol{y}$ dla warunku początkowego $\hat{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{0}}$ ($\varepsilon = -1$, $a > 0$, $k = 5$)

Podobnie z równania (24), wyznaczamy zależność $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{1}}$ od kąta $\beta_1 = b(t_1 - t_0)$

$$\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{h}_\varepsilon + (\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{0}} - \boldsymbol{h}_\varepsilon)\,\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\beta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1} \tag{26}$$

Posuwając się wstecz po trajektorii optymalnej $\hat{\boldsymbol{y}}$ (24), możemy również znaleźć zależność wiążącą $\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}}$ z kątem $\beta_k = b(t_k - t_{k-1})$. Punkt $\boldsymbol{y}^k = \mathbf{0}$ otrzymujemy przez odpowiedni „obrót" punktu $\boldsymbol{y}^{k-1}$ o kąt β_k wokół punktu $(-1)^{k-1}\boldsymbol{h}_\varepsilon$, a sam punkt $\boldsymbol{y}^{k-1}$ zależy od $\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}}$ według wzoru (25) dla $n = k - 1$. Stąd otrzymujemy ostatecznie

$$\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}} = Q_{-\varepsilon}^{k-2}[\boldsymbol{h}_\varepsilon(\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\beta_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_k} - 1)] = \boldsymbol{h}_\varepsilon[\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\pi(k-2)}(\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\beta_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_k} - 1 - \mathrm{ctgh}\frac{a\pi}{2b}) + \mathrm{ctgh}\frac{a\pi}{2b}] \tag{27}$$

Zatem do określenia wszystkich punktów przełączania $\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}}, \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}, \ldots, \boldsymbol{y}^{k-1}$ lub wyznaczenia trajektorii optymalnej $\hat{\boldsymbol{y}}$ wystarczy znaleźć kąty β_1 i β_k (ewentualnie czasy t_1 i t_k) oraz liczbę k.

3.2. Wyznaczanie momentów przełączania sterowania optymalnego

Zajmiemy się teraz obliczeniem chwil przełączania $t_1, t_2, \ldots, t_k$ sterowania u (23) w zależności od warunków początkowych $\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}$ oraz parametrów równania różniczkowego. Czasy przełączeń mogą być wyznaczone równaniami (26) i (27) i zależą pośrednio od liczby przełączeń $(k-1)$, która najprościej może być wyznaczona z nierówności (22).

Z opisu trajektorii optymalnej $\hat{\boldsymbol{y}}$ wynikają następujące wzory na czasy przełączania:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \frac{\beta_1}{b} \quad (0 < \beta_1 \le \pi) \\ t_i &= t_1 + (i-1)\frac{\pi}{b} \quad (i = 2, \ldots, k-1) \\ t_k &= t_{k-1} + \frac{\beta_k}{b} \quad (0 < \beta_k \le \pi) \end{aligned} \tag{28}$$

Wobec zależności (18) i (28) zagadnienie syntezy sterowania u (23) sprowadza się do wyznaczenia kątów β_1 i β_k oraz liczby przełączeń $(k - 1)$.

W przypadku $\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}} \in W_1^0$ (9), czyli $k = 1$, kąt β_1 możemy wyznaczyć z zależności (26):

$$\beta_1 = \arg\frac{1}{\boldsymbol{z}^{\mathbf{0}}} = \frac{b}{a}\ln\left|\boldsymbol{z}^{\mathbf{0}}\right|, \quad \boldsymbol{z}^{\mathbf{0}} = 1 - \frac{\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}}{\boldsymbol{h}_\varepsilon} \tag{29}$$

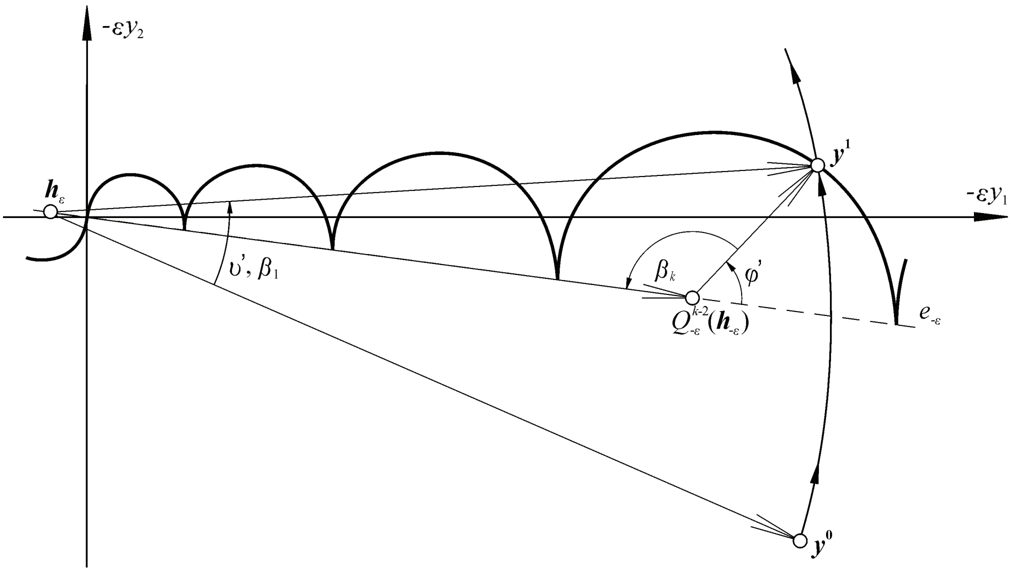
Załóżmy dalej, że $\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}} \notin W_\varepsilon^0$, czyli nie zachodzą równości (29) i $k > 1$. Celem znalezienia zależności między kątami β_1 i β_k oraz liczbą k, znajdźmy punkt $\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}}$ przecięcia trajektorii $\boldsymbol{y}(t_0^+)\boldsymbol{y}(t_0 + \pi/b)$ systemu Y_1 (6) z łukiem $W_{-\varepsilon}^{k-2} = Q_{-1}^{k-2}(W_{-\varepsilon}^0)$ (11) (rys. 4):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}} = \boldsymbol{y}(t_0^+)\boldsymbol{y}(t_0 + \pi/b) \cap W_{-\varepsilon}^{k-2} \\ &\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}} \setminus \{\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}\} \subset \boldsymbol{y}(t_0^+)\boldsymbol{y}(t_0 + \pi/b) = \{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_\varepsilon + (\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}} - \boldsymbol{h}_\varepsilon)\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\upsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\upsilon} \ : 0 < \upsilon \le \pi\} \\ &W_{-\varepsilon}^{k-2} = \{\boldsymbol{y} = \mathrm{e}^{\frac{a}{b}\pi(k-2)}[-\boldsymbol{h}_\varepsilon(1 + \mathrm{e}^{\frac{-a}{b}(\varphi-\pi)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}) - \mathrm{ctgh}\frac{a\pi}{2b}\boldsymbol{h}_\varepsilon] + \mathrm{ctgh}\frac{a\pi}{2b}\boldsymbol{h}_\varepsilon : \ 0 \le \varphi < \pi\} \end{aligned} \tag{30}$$

Zapiszmy łuk trajektorii i łuk krzywej przełączania z zależności (30) w postaci:

$$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}_\varepsilon=(\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}-\boldsymbol{h}_\varepsilon)\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\upsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\upsilon} \quad : 0<\upsilon\le\pi$$

$$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{h}_\varepsilon=-\boldsymbol{h}_\varepsilon\left(\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\pi(k-1)}\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}+2\frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\pi(k-1)}-1}{\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\pi}-1}\right): \quad 0\le\varphi<\pi \tag{31}$$



Rys. 4. Punkt $\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}}$ przecięcia trajektorii $\boldsymbol{y}(t_0^+)\boldsymbol{y}(t_0+\pi/b)$ systemu Y_ε z łukiem $W_{-\varepsilon}^{k-2}$ ($a>0$, $k=5$)

Prawe strony równań (31) definiują dwa wektory $[\boldsymbol{h}_\varepsilon, \boldsymbol{y}(\upsilon)]$ i $[\boldsymbol{h}_\varepsilon, \boldsymbol{y}(\varphi)]$ (o długościach zależnych od kątów υ i φ), które pokrywają się, tworząc wektor $[\boldsymbol{h}_\varepsilon, \boldsymbol{y}^{\mathbf{1}}]$ dla pewnych wartości $\upsilon=\upsilon'$ i $\varphi=\varphi'$, co możemy zinterpretować graficznie na płaszczyźnie stanów jako utworzenie przez układ trzech wektorów trójkąta (rys. 4)

$$\overline{\boldsymbol{h}_\varepsilon\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}}}=\overline{\boldsymbol{h}_\varepsilon Q_{-\varepsilon}^{k-2}(\boldsymbol{h}_{-\varepsilon})}+\overline{Q_{-\varepsilon}^{k-2}(\boldsymbol{h}_{-\varepsilon})\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}}} \tag{32}$$

Zauważmy następnie, że $\upsilon'=\beta_1$ (26) i $\varphi'=\pi-\beta_k$ (27).

Uwzględniając te równości w (31), dostajemy następujące równanie wiążące kąty β_1, β_k i liczbę k:

$$(1-\frac{\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}}{\boldsymbol{h}_{\varepsilon}})\,\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\pi(k-2)}\,\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\beta_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1}-\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\beta_k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi-\beta_k)}=A$$

$$A(\frac{a\pi}{2b},k)=2(1+\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\pi}+\ldots+\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\pi(k-2)})= \tag{33}$$

$$=2\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\pi(k-1)}}{1-\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\pi}}=2\,\mathrm{e}^{\frac{-a\pi}{2b}(k-2)}\frac{\sinh\frac{a\pi}{2b}(k-1)}{\sinh\frac{a\pi}{2b}}$$

gdzie $0 < \beta_1 \leq \pi$ i $0 < \beta_k \leq \pi$.

Z równania (33) dostajemy równanie podwójne:

$$\beta_1 = f_1(\beta_k) = f_2(\beta_k), \qquad \boldsymbol{z}^{\mathbf{0}} = 1-\frac{\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}}{\boldsymbol{h}_{\varepsilon}}$$

$$f_1(\alpha)=\arg(\frac{1}{\boldsymbol{z}^{\mathbf{0}}})+\operatorname{arcctg}\frac{A\,\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\alpha}-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad f_1(\pi)=\arg(\frac{1}{\boldsymbol{z}^{\mathbf{0}}}) \tag{34}$$

$$f_2(\alpha)=\frac{b}{a}\ln\frac{\left|\boldsymbol{z}^{\mathbf{0}}\right|}{\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{a}{b}2\alpha}-2A\,\mathrm{e}^{\frac{a}{b}\alpha}\cos\alpha+A^2}}-(k-2)\pi$$

gdzie funkcje $f_1(\alpha)$ i $f_2(\alpha)$ są zdefiniowane dla $0 < \alpha = \pi$ oraz A dane jest wzorem (33). Można się spodziewać, że równanie (34) jednoznacznie określa kąty β_1 i β_k oraz liczbę k. Aby to wykazać, rozważmy w dziedzinie $0 < \alpha \leq \pi$ funkcję

$$g(\alpha) = f_1(\alpha) - f_2(\alpha) \tag{35}$$

Oczywiście miejsce zerowe funkcji $g(\alpha)$ (35) jest równe β_k dla pewnego k (34). Pochodna

$$\frac{dg}{d\alpha}=\frac{A(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\,\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\alpha}\sin\alpha}{A^2\,\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}2\alpha}-2A\,\mathrm{e}^{\frac{-a}{b}\alpha}\cos\alpha+1} \tag{36}$$

ma stały znak sgn $\dot{g}(\alpha)$ = sgn α w przedziale $0 < \alpha < \pi$.

Wynika stąd, że funkcja $g(\alpha)$ jest monotoniczna w przedziale $0 < \alpha \le \pi$, a ponieważ jest również ciągła, więc równanie $g(\alpha) = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $0 < \alpha \le \pi$ (oczywiście równy β_k), jeżeli zachodzą nierówności:

$$a \cdot g(0^+) < 0 \quad \text{i} \quad a \cdot g(\pi) \ge 0 \tag{37}$$

Nierówności te prowadzą do nierówności podwójnej

$$k - 1 < 1 + \frac{b}{a\pi} \ln[1 + (\left|\boldsymbol{z^0}\right| \mathrm{e}^{\frac{-a}{b} \arg \frac{1}{\boldsymbol{z^0}}} - 1) \operatorname{tgh} \frac{a\pi}{2b}] \le k \tag{38}$$

gdzie $\boldsymbol{z^0} = 1 - \boldsymbol{y^0}/\boldsymbol{h_\varepsilon}$.

Stąd liczba przełączeń jest wyznaczona jednoznacznie i wynosi

$$k - 1 = \left\lceil \frac{2b}{a\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{\boldsymbol{y^e}}{\boldsymbol{h_{-\varepsilon}}} \operatorname{tgh} \frac{a\pi}{2b}} \right\rceil \tag{39}$$

gdzie $\boldsymbol{y^e}/\boldsymbol{h_{-\varepsilon}} \ge 0$ dane jest wzorem (20), a $\lceil l \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą, która jest większa bądź równa l ($l \in \boldsymbol{R}$). Zauważmy, że wzór (39) jest również słuszny dla punktu początkowego $\boldsymbol{y^0} \in W_\varepsilon^{\ 0}$ (9), w którym zachodzi równość (29) ($\boldsymbol{y^e}/\boldsymbol{h_{-\varepsilon}} = 0$), czyli dla $k = 1$.

3.3. Przypadek systemu oscylacyjnego bez tłumienia

Jeżeli współczynnik tłumienia $a = 0$, odpowiednie wzory wyprowadzone dla $a \ne 0$ należy zmodyfikować. Wszystkie wzory znalezione dla $a \ne 0$ są również prawdziwe w granicy, gdy parametr $a \to 0$. W szczególności równanie (33), gdy $a \to 0$, przyjmie postać:

$$(1 - \frac{\boldsymbol{y^0}}{\boldsymbol{h_\varepsilon}})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi - \beta_k)} = A, \quad A = \lim_{a \to 0} A(\frac{a\pi}{2b}, k) = 2(k-1) \tag{40}$$

W przypadku $k > 1$ z równania (40) możemy znaleźć jawne wzory na kąty β_1 i β_k:

$$\beta_1 = \arg \frac{1}{\boldsymbol{z^0}} + \arccos \frac{A^2 - 1 + \left|\boldsymbol{z^0}\right|^2}{2A\left|\boldsymbol{z^0}\right|}, \quad \beta_k = \arccos \frac{A^2 + 1 - \left|\boldsymbol{z^0}\right|^2}{2A} \tag{41}$$

gdzie $\boldsymbol{z^0} = 1 - \boldsymbol{y^0}/\boldsymbol{h_\varepsilon}$ i $A = 2(k - 1)$ (40).

Liczbę k możemy wyznaczyć ze wzoru (39) dla $a \to 0$ lub z równania (41) na kąt $0 < \beta_k \le \pi$, które przepiszmy w postaci:

$$\cos \beta_k = 1 - \frac{\left|\boldsymbol{z^0}\right|^2 - (A-1)^2}{2A} = \frac{(A+1)^2 - \left|\boldsymbol{z^0}\right|^2}{2A} - 1 \tag{42}$$

Ponieważ $-1 \le \cos \beta_k < 1$, więc z (42) widać, że $A - 1 < |z^{\mathbf{0}}| \le A + 1$. Stąd i z (40) mamy:

$$k - 1 < \frac{1}{2}(1 + \left|z^{\mathbf{0}}\right|) \le k \tag{43}$$

gdzie $z^{\mathbf{0}} = 1 - \boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}/\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Ostatecznie w przypadku parametru $a = 0$ liczba przełączeń

$$k - 1 = \left\lceil \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{y^e}}{\boldsymbol{h}_{-\varepsilon}} \right\rceil \tag{44}$$

gdzie $\boldsymbol{y}^e/\boldsymbol{h}_{-\boldsymbol{\varepsilon}} = |1 - \boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}/\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{\varepsilon}}| - 1$ (20). Wzór (43) pozostaje słuszny dla warunku początkowego $\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}} \in W_\varepsilon{}^0$ (9), w którym zachodzi równość $|1 - \boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}/\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{\varepsilon}}| = 1$ ($\boldsymbol{y}^e/\boldsymbol{h}_{-\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$), czyli dla $k = 1$.

Na koniec odnotujmy, że minimalny czas T potrzebny do przeprowadzenia układu do stanu końcowego **0** jest równy (28)

$$T = t_k - t_0 = \frac{\beta_1 + (k-2)\pi + \beta_k}{b} \tag{45}$$

gdzie kąty β_1 i β_k są określone przez (34) lub (41), a liczba k – przez (39) lub (44).

4. Podsumowanie

W artykule przedstawiono syntezę czasooptymalnego regulatora i sterowania dla systemu oscylacyjnego liniowego drugiego rzędu. Wyznaczono wzór na liczbę przełączeń w funkcji warunków początkowych oraz parametrów równania różniczkowego. Podano zależności analityczne pozwalające na obliczenie czasów przełączeń sterowania czasooptymalnego.

Zawarte w pracy rozważania można bezpośrednio uogólnić na układy oscylacyjne liniowe drugiego rzędu przy sterowaniu dwu- i więcejwymiarowym. Jednak liczba przypadków, gdzie dynamika obiektu może być modelowana równaniem (1), jest bardzo ograniczona. Jednym ze znanych zastosowań jest sterowanie silników odrzutowych [1].

Literatura

[1] Athans M., Falb P.L.: *Optimal Control*. New York, McGraw-Hill 1966
[2] Bołtiański W.G.: *Matematyczne metody sterowania optymalnego*. Warszawa, WNT 1971
[3] Bryson A.E., Ho Y.C.: *Applied Optimal Control*. Washington DC, Hemisphere 1975
[4] Bryson A.E. Jr.: *Dynamic Optimization*. Addison-Wesley, 1999
[5] Fattorini H.O.: *Infinite dimensional optimization and control theory*. Cambridge University Press, United Kingdom, 1999
[6] Górecki H., Turowicz A.: *On switching instants in multidimensional minimum-time control problems*. Bull. Acad. Sci., Ser. Sci. Techn., vol. 16, No 8, 1968, s. 691–698
[7] Górecki H.: *Optymalizacja systemów dynamicznych*. Warszawa, WN PWN 1993
[8] Hejmo W.: *Sterowanie układami nieliniowymi*. Kraków, UWND AGH 2003
[9] Kaczorek T.: *Teoria sterowania i systemów*. Warszawa , WN PWN 1999
[10] Leitmann G.: *An Introduction to Optimal Control*. New York, McGraw-Hill 1966
[11] Markus L., Lee E.B.: *Foundations of Optimal Control Theory*. New York, Wiley
[12] Mitkowski W. 1991: *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Warszawa, WNT 1967
[13] Ogata K.: *State space analysis of control systems*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, Inc. USA 1967
[14] Pesch H.J.: *A practical guide to the solution of real-life optimal control problems*. Control and Cybernetics, vol. 23, No 1–2, 1994, 7–60
[15] Ślusarczyk A., Kwiczala A.: *Synteza regulatora minimalnoczasowego w oscylacyjnych systemach liniowych drugiego rzędu*. Warszawa, PAK, Nr 11, 2005, 21–24
[16] Turnau A.: *Sterowanie docelowe układami nieliniowymi w czasie rzeczywistym – algorytmy inteligentne i optymalno-czasowe*. Kraków, UWND AGH 2002
[17] Wierzbicki A.: *Modele i wrażliwość układów sterowania*. Warszawa, WNT 1977