

Piotr Bania*

Czy sterowanie predykcyjne wymaga dokładnej optymalizacji?***

Wstęp

Sterowanie predykcyjne opiera się na cyklicznym rozwiązywaniu odpowiednio sformułowanego zadania sterowania optymalnego (ZSO). Rozwiązania ZSO poszukuje się zwykle metodami numerycznymi, opierając się na modelu obiektu. Po rozwiązaniu zadania początkowa część znalezionej sterowania jest podawana na wejścia obiektu. W następnym cyklu dokonuje się estymacji stanu obiektu i ponownie rozwiązuje ZSO. Rozwiązanie ZSO wymaga zwykle dużego nakładu obliczeń, a w przypadku systemów nieliniowych na ogół nie można zagwarantować zbieżności algorytmów optymalizacji do rozwiązań globalnie optymalnych. Podstawowym wymaganiem stawianym w regulacji predykcyjnej jest stabilność układu regulacji oraz jego odporność na błędy modelowania i zakłócenia. Większość dowodów stabilności algorytmów predykcyjnych opiera się na założeniu, że algorytm optymalizacji znajduje globalne minimum (maksimum) w zadaniu sterowania optymalnego. Powstaje zatem pytanie, czy ograniczając się do rozwiązań suboptymalnych, można również udowodnić stabilność układu sterowania. Okazuje się, że przy pewnych założeniach o wskaźniku jakości odpowiedź na to pytanie jest twierdząca i pozwala wysnuć wnioski o odporności układu regulacji na zakłócenia, błędy modelowania i estymacji stanu. Zauważmy bowiem, że rozwiązanie ZSO (optimum globalne) uzyskane na podstawie błędnej estymaty stanu oraz przy błędach modelowania i zakłóceniach jest na ogół suboptymalne dla obiektu rzeczywistego.

W artykule zaproponowano algorytm regulacji predykcyjnej dla systemów opisywanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Wykazano, że algorytm ten nie wymaga znajdowania rozwiązań optymalnych oraz udowodniono jego stabilność. Udowodniono też, że warunkiem wystarczającym stabilności omawianego algorytmu jest możliwość zmniejszania wskaźnika jakości w kolejnych chwilach czasu. Ponadto wykazano odporną stabilność proponowanego algorytmu przy założeniu suboptymalnych rozwiązań ZSO. Pewne idee dotyczące odpornej stabilności algorytmów zostały zaczerpnięte z prac Ledayeva [7], Fontesa [5, 6] i Findeisena [3, 4].

* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, e-mail: pba@ia.agh.edu.pl

** Praca finansowana ze środków na działalność statutową AGH, nr 10120038

W rozdziale pierwszym niniejszego artykułu podano podstawowe definicje i twierdzenia. Rozdział drugi pokazuje, że przy pewnych założeniach o wskaźniku jakości można zaproponować stabilny algorytm predykcyjny, niewymagający dokładnej optymalizacji. Rozdział trzeci zawiera analizę odporności. W rozdziale czwartym przedstawiono przykład sterowania układem wahadła na wózku, przy zakłóceniach.

Artykuł kończy się wnioskami.

Oznaczenia

Niech H będzie symetryczną i dodatnio określoną macierzą wymiaru n . Iloczyn skalarny oraz normę wektora w R^n oznaczamy $\langle x, y \rangle_H = x^T H y$, $\|x\|_H = \sqrt{x^T H x}$. Zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych oznaczamy $R_0^+ = \{t \in R; t \geq 0\}$. Symbol $PC([0, T], R^m)$ (lub $PC([0, \infty), R^m)$) oznacza przestrzeń funkcji przedziałami ciągłych na odcinku $[0, T]$ (lub $[0, \infty)$) o wartościach w R^m . Skrót AP oznacza algorytm predykcyjny. Symbol \mathcal{U} oznacza przestrzeń funkcji mierzalnych istotnie ograniczonych na odcinku $[0, T]$ (lub $[0, \infty)$). Jeżeli $u \in \mathcal{U}$, to norma w tej przestrzeni jest dana wyrażeniem $\|u\|_\infty = \text{esssup}_{t \in [0, T]} \|u(t)\|$.

1. Równania systemu i własności rozwiązań

Zakładamy, że obiekt sterowany jest opisany układem równań różniczkowych zwyczajnych

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p_0), \quad x(0) = x_0, \quad t \in R_0^+ \quad (1.1)$$

Funkcja $f : R^n \times R^m \times R^l \rightarrow R^n$ jest klasy C^1 względem wszystkich argumentów oraz $f(0, 0, p_0) = 0$. Funkcja ta jest zależna od l parametrów danych wektorem $p_0 \in R^l$. Ponadto f spełnia w R^n warunek Lipschitza $\|f(x_1, u, p_0) - f(x_2, u, p_0)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$ ze stałą $L > 0$ niezależną od x_1, x_2, u, p_0 . Ograniczenia wartości chwilowych sterowania mają postać $u(t) \in U$

$$U = \{u \in R^m; u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, u_{\min} < 0, u_{\max} > 0\} \quad (1.2)$$

Stan systemu (1.1) w chwili t będziemy także oznaczać symbolem x_t , tzn. $x_t = x(t)$. Niech $\delta > 0$ oznacza okres próbkowania. W chwilach $t_i = i\delta$, $i = 0, 1, 2, \dots$ dokonujemy estymacji stanu obiektu oraz wyznaczamy sterowanie. Sterowanie to jest stosowane do obiektu w przedziale czasu $[t_i, t_{i+1}]$. Horyzont predykcji oznaczamy T . Zakładamy, że

$$T \geq \delta \quad (1.3)$$

Trajektorię przewidywaną w przedziale czasu $[t_i, t_i + T]$ obliczamy, rozwiązując równanie (1.1) z warunkiem początkowym $x(t_i) = x_{t_i}$. Rozwiązanie równania (1.1) ze sterowa-

niem u , startujące z punktu x_t , będziemy oznaczać symbolem $x(s; x_t; u(\cdot))$. W pewnych przypadkach zamiast $x(s; x_t; u(\cdot))$ będziemy pisać krótko $x(s)$. Niech $\Omega \subset R^n$ będzie zbiorem domkniętym, ograniczonym i jednorodnym oraz niech $0 \in \Omega$. Definiujemy sterowanie dopuszczalne.

Definicja 1.1

Niech $x(s)$ będzie rozwiązaniem równania (1.1) ze sterowaniem $u(s)$ oraz warunkiem początkowym x_t . Sterowanie $u : [t, t+T] \rightarrow R^m$ jest dopuszczalne w punkcie x_t , jeżeli:

- 1) $u \in PC([t, t+T], R^m)$, 2) $u(s) \in U, s \in [t, t+T]$, 3) $x(t+T) \in \Omega$. □

Definicja 1.2

Jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ i dla dowolnego warunku początkowego $x_0 \in R^n$ istnieje sterowanie dopuszczalne $u^D : [0, T_D] \rightarrow U, T_D < +\infty$ takie, że $\|x(T_D; x_0; u^D(\cdot))\| < \varepsilon$, to system (1.1) nazwiemy asymptotycznie sterowalnym. □

Zakładamy, że system (1.1) jest asymptotycznie sterowalny.

Definicja 1.3. (Funkcje klasy \mathcal{K})

Jeżeli funkcja $\varphi : R_0^+ \rightarrow R_0^+$ jest ciągła, ściśle rosnąca oraz $\varphi(0) = 0$, to mówimy, że funkcja ta jest klasy \mathcal{K} lub piszemy $\varphi \in \mathcal{K}$.

Definicja 1.4

Niech funkcja $h \in \mathcal{K}$ będzie prawie wszędzie różniczkowalna na R_0^+ . Pochodna funkcji h' jest lokalnie ograniczona jeżeli jest ograniczona na każdym zwartym zbiorze $\mathcal{X} \subset R_0^+$ □

Lemat 1.1. (Gronwalla)

Jeżeli $\omega : R_0^+ \rightarrow R_0^+$ jest funkcją ciągłą spełniającą nierówność $\omega(t) \leq a + \int_0^t b\omega(s)ds$ $a, b > 0$ to zachodzi oszacowanie $\omega(t) \leq ae^{bt}$.

Twierdzenie 1.1

Niech $u : [t, t+T] \rightarrow R^m$ będzie sterowaniem dopuszczalnym. Przy dotychczasowych założeniach rozwiązanie $x(s; x_t; u(\cdot))$ równania (1.1) spełnia oszacowanie

$$\|x(s)\| \leq (M_1 + M_2 T)e^{LT},$$

gdzie: $s \in [t, t+T]$, $M_1 = \sup_{z_0 \in \Omega} \|z_0\|$, $M_2 = L \sup_{z_0 \in \Omega} \|z_0\| + \sup_{(z_0, w) \in \Omega \times U} \|f(z_0, w, p_0)\|$.

Dowód

Ponieważ prawa strona (1.1) nie zależy jawnie od czasu, to wystarczy rozpatrzeć przypadek sterowania określonego na odcinku $[0, T]$. Niech zatem $u : [0, T] \rightarrow R^m$ będzie sterowaniem dopuszczalnym, a $x(t)$ odpowiadającą mu trajektorią z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$ oraz końcowym $x(T) \in \Omega$. Rozważmy równanie (1.1) z odwróconym kierunkiem czasu

$$\dot{z}(\tau) = -f(z(\tau), w(\tau), p_0), \quad \tau \in [0, T], \quad z(0) = z_0 = x(T) \in \Omega \quad (1.4)$$

Jeżeli $w(\tau) = u(T - \tau)$, to $z(\tau) = x(T - \tau)$ jest rozwiązaniem równania (1.4). Zachodzi oszacowanie

$$\begin{aligned} \|z(\tau)\| &\leq \|z_0 + \int_0^\tau f(z(s), w(s), p_0) ds\| \leq \|z_0\| + \int_0^\tau \|f(z(s), w(s), p_0)\| ds \leq \\ &\leq \|z_0\| + \int_0^\tau \|f(z(s), w(s), p_0) - f(z_0, w(s), p_0) + f(z_0, w(s), p_0)\| ds \leq \\ &\leq \|z_0\| + \int_0^\tau \|f(z(s), w(s), p_0) - f(z_0, w(s), p_0)\| ds + \int_0^\tau \|f(z_0, w(s), p_0)\| ds. \end{aligned}$$

Z warunku Lipschitza otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|z(\tau)\| &\leq \|z_0\| + \int_0^\tau L \|z(s) - z_0\| ds + \int_0^\tau \|f(z_0, w(s), p_0)\| ds \leq \\ &\leq \|z_0\| + \int_0^\tau L \|z_0\| ds + \int_0^\tau \|f(z_0, w(s), p_0)\| ds + \int_0^\tau L \|z(s)\| ds. \end{aligned}$$

Pierwszy wyraz oraz funkcje podcałkowe w wyrażeniu drugim i trzecim są ograniczone. Korzystając z definicji stałych M_1, M_2 otrzymujemy

$$\|z(\tau)\| \leq M_1 + M_2 \tau + \int_0^\tau L \|z(s)\| ds.$$

Ponieważ $\tau \in [0, T]$, to

$$\|z(\tau)\| \leq M_1 + M_2 T + \int_0^\tau L \|z(s)\| ds.$$

Stosując lemat Gronwalla ze stałymi $a = M_1 + M_2T$, $b = L$ oraz $\alpha(t) = \|z(t)\|$, otrzymujemy $\|z(\tau)\| \leq (M_1 + M_2T)e^{LT}$, co kończy dowód. \square

Przedstawimy teraz kilka technicznych lematów, które będą użyteczne w dalszych rozważaniach.

Lemat 1.2

Założenia:

- 1) funkcja $g : [0, T] \rightarrow R$, $T > 0$ jest ciągła w $[0, T]$;
- 2) pochodna funkcji g istnieje w każdym punkcie przedziału $[0, T]$ oraz jest ograniczona, tzn. istnieje stała $M > 0$ taka, że $|\dot{g}(t)| < M$ dla $t \in [0, T]$;
- 3) zachodzi nierówność $\int_0^T |g(t)| dt < v$, $v > 0$.

Teza: $\sup_{t \in [0, T]} |g(t)| < \beta(v; M; T)$, gdzie

$$\beta(v; M; T) = \begin{cases} 2\sqrt{Mv} & \text{dla } v \in [0, \frac{1}{2}MT^2] \\ \sqrt{(vT^{-1} + \frac{1}{2}MT)^2 + 2Mv} & \text{dla } v > \frac{1}{2}MT^2 \end{cases} \quad (1.5)$$

Dowód

Z założenia 2) wynika nierówność

$$\max(0, |g(0)| - Mt) \leq |g(t)|.$$

Całkując obie strony, otrzymujemy

$$\int_0^T \max(0, |g(0)| - M\tau) d\tau \leq \int_0^T |g(\tau)| d\tau < v \quad (1.6)$$

Położmy dla wygody $s = |g(0)|$. Całka po lewej stronie (1.6) wynosi

$$I(s) = \int_0^T \max(0, s - M\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{s^2}{2M} & \text{dla } s \in [0, MT]; \\ Ts - \frac{1}{2}MT^2 & \text{dla } s > MT. \end{cases}$$

Funkcja $I(s)$ jest ciągła, ściśle rosnąca oraz ma ciągłą pochodną względem s . Obliczając $I^{-1}(v)$ otrzymujemy

$$I^{-1}(v) = \begin{cases} \sqrt{2Mv} & \text{dla } v \in [0, \frac{1}{2}MT^2] \\ vT^{-1} + \frac{1}{2}MT & \text{dla } v > \frac{1}{2}MT^2 \end{cases} \quad (1.7)$$

Z (1.6) mamy $I(s) < v$ zatem

$$|g(0)| < I^{-1}(v) \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0 \quad (1.8)$$

Zachodzi nierówność $\frac{d}{dt}[g^2(t)] = 2g(t)\dot{g}(t) \leq 2|g(t)| |\dot{g}(t)| \leq 2M|g(t)|$. Całkując obie strony i korzystając z założenia 3) otrzymujemy

$$g^2(t) - g^2(0) \leq 2M \int_0^t |g(\tau)| d\tau \leq 2M \int_0^T |g(\tau)| d\tau < 2Mv \quad (1.9)$$

Na mocy (1.8) i (1.9) mamy

$$g^2(t) < g^2(0) + 2Mv < [I^{-1}(v)]^2 + 2Mv.$$

Więc

$$|g(t)| < \sqrt{[I^{-1}(v)]^2 + 2Mv}.$$

Podstawiając do tego wzoru (1.7), otrzymujemy tezę lematu. \square

Powyższy wynik można łatwo rozszerzyć na funkcje o wartościach w R^n .

Lemat 1.3

Założmy, że funkcja $x: [0, T] \rightarrow R^n$ jest ciągła, pochodna \dot{x} istnieje w $[0, T]$ oraz $\|\dot{x}(t)\| < M$. Jeżeli funkcja $h \in \mathcal{X}$ ma pochodną lokalnie ograniczoną, to

$$\int_0^T h(\|x(t)\|) dt < v \Rightarrow \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\| < h^{-1}(\beta(v; MM_h; T)) \quad (1.10)$$

gdzie funkcja β jest określona wzorem (1.5) oraz

$$M_h > \sup_{z \in [0, M_0]} h'(z), \quad \text{gdzie } M_0 > \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|.$$

Dowód

Pokażemy, że funkcja $h(\|x(t)\|)$ spełnia założenia lematu 1.2. Ponieważ x jest ciągła, to

$$\|x(t)\| < M_0, \quad \text{gdzie } M_0 > \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|.$$

Z założenia funkcja $h \in \mathcal{K}$ ma pochodną lokalnie ograniczoną, zatem

$$\sup_{z \in [0, M_0]} h'(z) < M_h < \infty.$$

Obliczając pochodną funkcji $h(\|x(t)\|)$ otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} h(\|x(t)\|) = h'(\|x(t)\|) \frac{d}{dt} \|x(t)\| \leq M_h \frac{d}{dt} \sqrt{x^T(t)x(t)}.$$

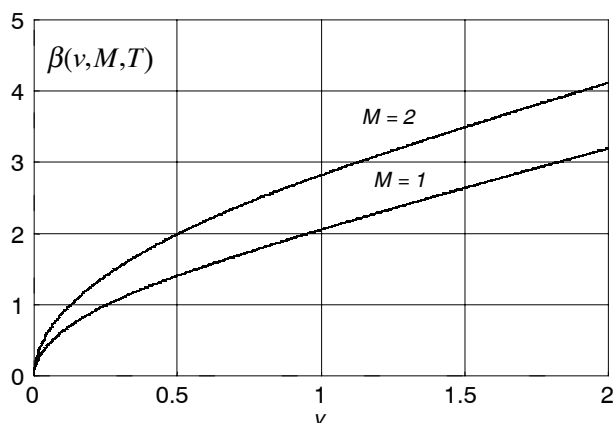
Ostatni wyraz spełnia oszacowanie

$$\frac{d}{dt} \sqrt{x^T(t)x(t)} = \frac{2x^T(t)\dot{x}(t)}{2\sqrt{x^T(t)x(t)}} \leq \frac{|x^T(t)\dot{x}(t)|}{\|x(t)\|} \leq \frac{\|x(t)\| \|\dot{x}(t)\|}{\|x(t)\|} < M,$$

więc $\frac{d}{dt} h(\|x(t)\|) < M_h M$

Zatem $h(\|x(t)\|) < \beta(v; MM_h; T)$. Ponieważ $h \in \mathcal{K}$, to h jest odwracalna. \square

Dla zobrazowania otrzymanego wyniku na rysunku 1 pokazano funkcję $\beta(v, M, T)$ dla $M = 1, 2, T = 1$.



Rys. 1. Funkcja $\beta(v; M; T)$ dla $M = 1, 2, T = 1$

Na koniec przedstawimy pewne uogólnienie znanego lematu Barbalata [8].

Lemat 1.4

Niech funkcja $\alpha_L \in \mathcal{K}$ oraz niech $x^*(t)$ będzie funkcją absolutnie ciągłą na R_0^+ . Jeżeli

$$\|x^*(\cdot)\|_\infty < \infty^1, \quad \|x^*(\cdot)\|_\infty < \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \alpha_L(\|x^*(t)\|) dt < \infty,$$

to $x^*(t) \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow \infty$. Dowód lematu zob. [8, 10].

2. Algorytm predykcyjny z przybliżoną optymalizacją

Niech $x^i : [t_i, t_i + T_i] \rightarrow R^n$ będzie rozwiązaniem równania (1.1) z warunkiem początkowym $x^i(t_i)$ i sterowaniem $u^i \in PC([t_i, t_i + T_i], R^m)$.

Definiujemy wskaźnik jakości

$$J(u^i, T_i, x^i(t_i)) = T_i + \int_{t_i}^{t_i + T_i} L(x^i, u^i) dt + q(x^i(t_i + T_i)) \quad (2.1)$$

¹⁾ $\|x^*(\cdot)\|_\infty = \text{ess sup}_{t \geq 0} \|x^*(t)\|$

Zakładamy, że $L \in C^1(R^n \times R^m, R_0^+)$, $L(0,0) = 0$, $L(x,u) > 0$ dla $(x,u) \neq (0,0)$, oraz że funkcja $q \in C^1(R^n, R_0^+)$, $q(0) = 0$, $q(x) > 0$ dla $x \neq 0$. Wskaźnik (2.1) jest nieujemny i zależy w sposób ciągły od u^i, T_i, x_i .

Niech $T_{\min} \geq \delta$, oznacza minimalną wartość horyzontu predykcji. Formułujemy zadanie sterowania optymalnego.

Problem $P(t_i, x_i)$

Znaleźć sterowanie dopuszczalne oraz horyzont $T_i \geq T_{\min}$, minimalizujące wskaźnik jakości (2.1). \square

Rozwiązanie problemu $P(t_i, x_i)$ oraz odpowiadającą mu trajektorię oznaczamy $\bar{u}^i(s, x_i)$, \bar{T}_i , $\bar{x}^i(s; x_i; \bar{u}^i(s, x_i))$. Zakładamy, że rozwiązanie powyższego problemu istnieje w całej przestrzeni lub w odpowiednio obszernym zbiorze X zawierającym zbiór Ω . Dla problemu $P(t_i, x_i)$ definiujemy funkcję wartości.

Definicja 2.1

Niech \bar{u}, \bar{T} będą rozwiązaniem $P(t, x_t)$. Funkcją wartości (*value function*) $V(x_t)$ nazywamy optymalną wartość wskaźnika jakości (2.1) pomniejszoną o liczbę T_{\min} , tzn.

$$V(x_t) = J(\bar{u}, \bar{T}, x_t) - T_{\min}. \quad \square$$

Wniosek 2.1

Funkcja wartości jest ciągła oraz $V(0) = 0$.

Przyjmujemy następujące założenie

Założenie Z1

Istnieje funkcja $\alpha_L \in \mathcal{K}$ taka, że dla dowolnego sterowania $u^i \in PC([t_i, t_i + T_i], R^m)$, $T_i \geq \delta$ i dowolnego $x^i(t_i) \in R^n$, można znaleźć horyzont $T_{i+1} \geq \delta$ oraz sterowanie dopuszczalne $u^{i+1} \in PC([t_i + \delta, t_i + \delta + T_{i+1}], R^m)$ spełniające warunek

$$J(u^{i+1}, T_{i+1}, x^i(t_i + \delta)) \leq J(u^i, T_i, x^i(t_i)) - \int_{t_i}^{t_i + \delta} \alpha_L(\|x^i(t)\|) dt \quad (2.2)$$

Założenie Z1 jest typowe dla AP. Gwarantuje ono możliwość zmniejszania wskaźnika jakości w kolejnych krokach czasowych i stanowi kluczowy warunek stabilności regulatorów predykcyjnych. Większość dowodów stabilności AP polega na wykazaniu Z1. Zachodzi następujące stwierdzenie

Stwierdzenie 2.1

Jeżeli $\alpha_L(\|x\|) \leq L(x, u)$, zbiór Ω oraz funkcja q są tak wybrane, że dla każdego $x_0 \in \Omega$ istnieje przedziałami ciągle sterowanie $u_s : [0, \delta] \rightarrow U$ takie, że trajektoria x_s systemu (1.1) wygenerowana przez to sterowanie pozostaje w zbiorze Ω oraz spełnia warunek $\dot{q}(x_s(\tau)) + L(x_s(\tau), u_s(\tau)) \leq 0$, $\tau \in [0, \delta]$, to założenie Z1 będzie spełnione. \square

Dowód stwierdzenia 2.1 można znaleźć w pracy Fontesa [6]. Jeżeli funkcja L jest kwadratowa, to zbiór Ω oraz funkcję q można wyznaczyć metodą opisaną w pracach Chena [2] oraz autora [1]. Formułujemy zadanie sterowania suboptymalnego.

Problem $P^I(t_i, x_{t_i}, r)$

Dla zadanej liczby $r > 0$ i warunku początkowego x_{t_i} należy znaleźć horyzont $T_i \geq T_{\min}$ oraz sterowanie dopuszczalne $u^i : [t_i, t_i + T_i] \rightarrow R^m$ spełniające nierówność $J(u^i, T_i, x_{t_i}) < r$.

Rozwiązanie problemu jest na ogół niejednoznaczne. Jeżeli liczba r jest zbyt mała, to rozwiązanie może nie istnieć. Jeżeli rozwiązanie istnieje, to oznaczamy je $u^i(s, x_{t_i})$.

Trajektorię oznaczamy $x^i(s; x_{t_i}; u^i(s, x_{t_i}))$. Obliczenia są powtarzane co czas δ , dla nowego wyznaczonego aktualnie stanu obiektu. W pewnych przypadkach będziemy pomijać argumenty pisząc np. u^i, x^i zamiast $u^i(s, x_{t_i}), x^i(s; x_{t_i}; u^i(s, x_{t_i}))$.

Podamy teraz schemat regulacji predykcyjnej.

Schemat 2.1

0. Podstaw $i = 0, t_i = i\delta, r = \infty$.
1. Wyznacz stan obiektu x_{t_i} .
2. Rozwiąż $P^I(t_i, x_{t_i}, r)$.
3. Podstaw $r = J(u^i, T_i, x_{t_i})$.
4. Zastosuj początkową część sterowania u^i w przedziale czasu $t \in [t_i, t_i + \delta)$.
5. Podstaw $i \leftarrow i + 1, t_i = i\delta$, i idź do 1.

Trajektorię oraz sterowanie w systemie zamkniętym otrzymujemy poprzez konkatenaację trajektorii x^i oraz sterowań u^i zastosowanych do obiektu w przedziałach czasu $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \dots$ Trajektorię tę oraz odpowiadające jej sterowanie będziemy oznaczać x^*, u^* . Trajektorja x^* jest funkcją ciągłą, natomiast sterowanie u^* jest funkcją przedziałami ciągłą.

Definicja 2.2

Schemat 2.1 będziemy nazywać stabilnym, jeżeli dla każdego $x_0 \in X$ zachodzi warunek $\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = 0$. □

Twierdzenie 2.1

Przy poczynionych założeniach trajektorja x^* generowana przez schemat 2.1 zmierza asymptotycznie do zera.

Dowód

W chwili początkowej musimy znaleźć jakiegokolwiek sterowanie dopuszczalne gwarantujące skończoną wartość wskaźnika jakości, tzn. $J(u^0, T_0, x_0) < \infty$. Założenie Z2 gwa-

rantuje, że takie sterowanie istnieje. Korzystając z założenia Z1 i stosując rozumowanie indukcyjne widzimy, że

$$J_i(u^i, T_i, x^i(t_i)) + \sum_{k=0}^i \left(\int_{t_k}^{t_k + \delta} \alpha_L(\|x^k(t)\|) dt \right) \leq J_0(u^0, T_0, x_0) < \infty.$$

Ponieważ trajektoria x^* jest konkatencją trajektorii x^i , dla $i = 0, 1, 2, \dots$, to

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^{t_i} \alpha_L(\|x^*(t)\|) dt \leq J_0(u^0, T_0, x_0) < \infty.$$

Na mocy twierdzenia 1.1 mamy

$$\|x^i(t)\| \leq (M_1 + M_2 T_i) \exp(L T_i), \quad \text{dla } t \in [t_i, t_i + T_i].$$

Zatem

$$\|x^*(t)\| \leq (M_1 + M_2 T_i) \exp(L T_i), \quad \text{dla } t \in [t_i, t_i + \delta].$$

Ale $T_i \leq J_0(u^0, T_0, x_0) < \infty$, skąd wynika ograniczoność x^* . Ponieważ f jest ciągła, to pochodna $\dot{x}^* = f(x^*, u^*)$ jest także ograniczona. Stosując lemat 1.4, otrzymujemy tezę twierdzenia. \square

Istnieją zatem schematy sterowania predykcyjnego niewymagające dokładnej optymalizacji.

3. Odporność algorytmu na zakłócenia i błędy modelowania

Aby analizować odporność układu regulacji, musimy dokonać rozróżnienia pomiędzy systemem rzeczywistym a jego modelem. Niech model obiektu będzie opisany jak dotychczas równaniem (1.1) oraz niech system rzeczywisty będzie opisany równaniem

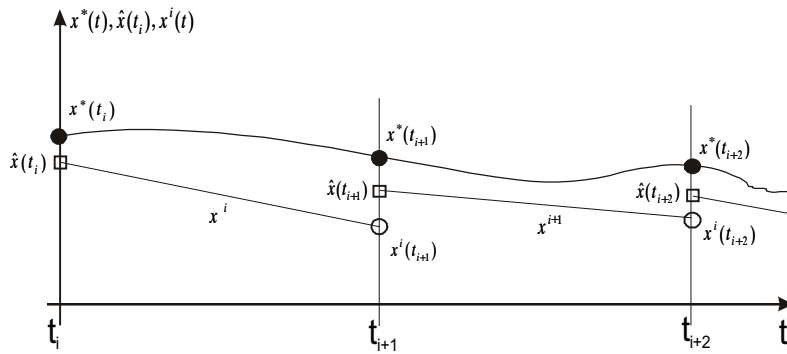
$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u(t) + a(t), p_0 + p(t)) + w(t), \quad x^*(0) = x_0^* \quad (3.1)$$

Funkcje a , w , p reprezentują zakłócenia sterowania, zakłócenia zewnętrzne oraz błędy estymacji parametrów obiektu. Niech $\hat{x}(t)$ oznacza estymatę stanu obiektu oraz niech $e(t) = \hat{x}(t) - x^*(t)$ będzie błędem estymacji stanu. Funkcje a , w , p , e będziemy nazywać zakłóceniami.

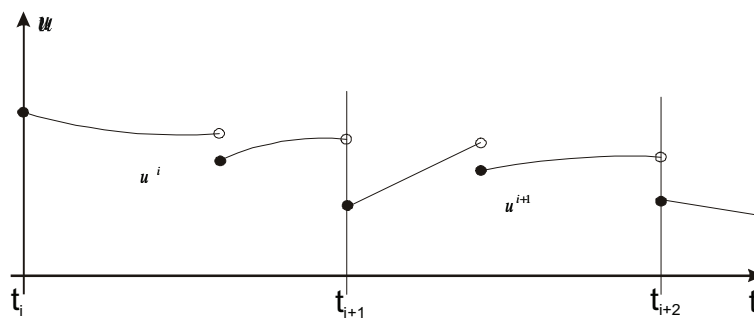
Zakładamy, że zakłócenia są przedziałami ciągłe na R_0^+ oraz ograniczone, tzn.²⁾:

$$\|a\|_\infty < \eta_a^2, \quad \|w\|_\infty < \eta_w, \quad \|p\|_\infty < \eta_p, \quad \|e\|_\infty < \eta_e.$$

Prawa strona równania (3.1) spełnia założenia twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązania od parametru i warunku początkowego. Zatem dla dowolnej liczby $\varepsilon_0 > 0$ istnieją liczby $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e$ takie, że rozwiązanie $x^i : [t_i, t_i + T] \rightarrow R^n$ równania (1.1) z warunkiem początkowym $\hat{x}(t_i) = x^*(t_i) + e(t_i)$ i sterowaniem $u^i : [t_i, t_i + T] \rightarrow R^m$ oraz rozwiązaniem równania (3.1) z warunkiem początkowym $x^*(t_i)$ i tym samym sterowaniem, spełniają na odcinku $[t_i, t_{i+1}]$ warunek $\|x^i(t) - x^*(t)\| < \varepsilon_0$. W chwili t_{i+1} (rys. 2 i 3) stan obiektu wynosi $x^*(t_{i+1})$, natomiast estymata tego stanu jest równa $\hat{x}(t_{i+1})$ i jest ona na ogół różna od stanu $x^i(t_{i+1})$ przewidzianego na podstawie rozwiązania równania (1.1) z warunkiem początkowym $\hat{x}(t_i)$ i sterowaniem u^i .



Rys. 2. Trajektoria przewidywana x_i trajektoria w systemie rzeczywistym x^* oraz estymata stanu $\hat{x}(t_i)$



Rys. 3. Sterowanie

²⁾ $\|a\|_\infty = \text{ess sup}_{t \geq 0} \|a(t)\|$.

Odległość pomiędzy estymatą stanu i stanem przewidywanym spełnia oszacowanie

$$\|\hat{x}(t_{i+1}) - x^i(t_{i+1})\| \leq \|\hat{x}(t_{i+1}) - x^*(t_{i+1})\| + \|x^*(t_{i+1}) - x^i(t_{i+1})\| < \eta_e + \varepsilon_0 \quad (3.2)$$

Widzimy zatem, że estymata stanu i stan przewidywany leżą w pewnej kuli o środku w punkcie $x^*(t_{i+1})$ i promieniu $\eta_e + \varepsilon_0$. Promień tej kuli można uczynić dowolnie małym wybierając odpowiednio małą liczbę $\varepsilon_0 > 0$. Na mocy założenia Z1 wiemy, że istnieje sterowanie dopuszczalne u^{i+1} takie, że

$$J(u^{i+1}, T_{i+1}, x^i(t_{i+1})) \leq J(u^i, T_i, \hat{x}(t_i)) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_L(\|x^i\|) dt \quad (3.3)$$

Liczbę

$$\sigma_i = J(u^i, T_i, \hat{x}(t_i)) - J(u^{i+1}, T_{i+1}, x^i(t_{i+1})) \geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_L(\|x^i\|) dt \quad (3.4)$$

nazwiemy przewidywaną poprawą wskaźnika jakości.

Zachodzi nierówność

$$J(u^{i+1}, T_{i+1}, x^i(t_{i+1})) \leq J(u^i, T_i, \hat{x}(t_i)) - \sigma_i \leq J(u^i, T_i, \hat{x}(t_i)) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_L(\|x^i\|) dt \quad (3.5)$$

Ponieważ $J(u^{i+1}, T_{i+1}, x^i(t_{i+1}))$ zależy w sposób ciągły od $x^i(t_{i+1})$, to zastępując stan $x^i(t_{i+1})$ estymatą stanu $\hat{x}(t_{i+1})$ wnioskujemy, że dla dowolnej liczby $\varepsilon_1 > 0$ istnieje liczba $\alpha_1 > 0$ taka, że warunek

$$\|\hat{x}(t_{i+1}) - x^i(t_{i+1})\| < \alpha_1 \quad (3.6)$$

implikuje nierówność

$$J(u^{i+1}, T_{i+1}, \hat{x}(t_{i+1})) < J(u^{i+1}, T_{i+1}, x^i(t_{i+1})) + \varepsilon_1 \quad (3.7)$$

Korzystając z (3.5), otrzymujemy

$$\begin{aligned} J(u^{i+1}, T_{i+1}, \hat{x}(t_{i+1})) &< J(u^i, T_i, \hat{x}(t_i)) + \varepsilon_1 - \sigma_i \\ &\leq J(u^i, T_i, \hat{x}(t_i)) + \varepsilon_1 - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_L(\|x^i\|) dt \end{aligned} \quad (3.8)$$

Położmy $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$, $\alpha_1 < \eta_e + \varepsilon$ oraz $\varepsilon > 0$. Na mocy ciągłej zależności rozwiązania równań (1.1) i (3.1) od parametru i warunku początkowego wnioskujemy, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją liczby $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e$ takie, że zachodzi nierówność

$$J(u^{i+1}, T_{i+1}, \hat{x}(t_{i+1})) < J(u^i, T_i, \hat{x}(t_i)) + \varepsilon - \sigma_i \quad (3.9)$$

Wzór (3.9) określa zachowanie wskaźnika jakości w następnym kroku czasowym. Liczba ε reprezentuje wpływ zakłóceń na zmiany wskaźnika jakości. Jeżeli $\varepsilon < \sigma_i$, to przewidywana poprawa wskaźnika jakości przekracza wpływ zakłóceń i wskaźnik jakości zmaleje. Widać tu również wyraźnie, jaka jest rola optymalizacji. Wybierając bowiem rozwiązania optymalne, zapewniamy minimalną wartość różnicy $\varepsilon - \sigma_i$. Zatem optymalizacja poprawia własności odpornościowe algorytmu.

Liczby $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e$ zależą na ogół od punktów $x^*(t_i), \hat{x}(t_i)$ oraz od sterowania. Jeżeli chcemy, aby dla zadanego $\varepsilon > 0$ warunek (3.9) był spełniony wszędzie, to musimy założyć jednostajną ciągłość rozwiązań równań (1.1) i (3.1) względem warunków początkowych, sterowania i zakłóceń oraz jednostajną ciągłość wskaźnika jakości (2.1) względem warunku początkowego i sterowania.

Uwaga 3.1

Jednostajną ciągłość można zagwarantować, zakładając, że $a \in A$, $w \in W$, $p \in P$, $u \in U_{ad}$, $x^*(t), \hat{x}(t) \in X_{ad}$, gdzie A, P, W, U_{ad}, X_{ad} – są zbiorami zwartymi w odpowiednich przestrzeniach. Wówczas z ciągłości wskaźnika jakości oraz z ciągłej zależności rozwiązań równań (1.1) i (3.1) od danych początkowych i parametrów wynika jednostajna ciągłość wszystkich rozważanych odwzorowań.

Niech zatem liczby $\varepsilon, \eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e$ będą ustalone w taki sposób, aby wzór (3.9) był zawsze prawdziwy. Będziemy badać zachowanie ciągu (3.9). Zauważmy, że przewidywana poprawa wskaźnika jakości spełnia oszacowanie

$$\sigma_i \geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_L(\|x^i\|) dt \geq \delta \alpha_L(m), \quad \text{gdzie } m = \inf_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \|x^i(t)\| \quad (3.10)$$

Wskaźnik jakości zmaleje, gdy $\sigma_i > \varepsilon$ lub gdy $\delta \alpha_L(m) > \varepsilon$. Funkcja α_L ma odwrotność, zatem $m > \alpha_L^{-1}(\varepsilon \delta^{-1})$. Niech trajektoria x^* spełnia w przedziale czasu $[t_i, t_{i+1}]$ oszacowanie

$$\|x^*(t)\| > \alpha_L^{-1}(\varepsilon \delta^{-1}) + \varepsilon \quad (3.11)$$

Ponieważ trajektorie $x^*, x^i [t_i, t_{i+1}]$ spełniają w przedziale nierówność

$$\|x^i(t) - x^*(t)\| < \varepsilon,$$

to

$$\alpha_L^{-1}(\varepsilon \delta^{-1}) + \varepsilon < \inf_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \|x^*(t)\| \leq \|x^i(t) - x^*(t)\| + \|x^i(t)\| < \varepsilon + \|x^i(t)\|.$$

Wynika stąd, że trajektoria przewidywana spełnia nierówność

$$\|x^i(t)\| > \alpha_L^{-1}(\varepsilon\delta^{-1}) \text{ dla } t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (3.12)$$

Ze wzorów (3.9)–(3.12) wynika poniższy wniosek.

Wniosek 3.1

Jeżeli $\|x^*(t)\| > \alpha_L^{-1}(\varepsilon\delta^{-1}) + \varepsilon$ w przedziale czasu $[t_i, t_{i+1}]$, to istnieją horyzont T_{i+1} oraz sterowanie dopuszczalne u^{i+1} takie, że

$$J(u^{i+1}, T_{i+1}, \hat{x}(t_{i+1})) < J(u^i, T_i, \hat{x}(t_i)).$$

Zatem wskaźnik jakości może maleć z kroku na krok, jeżeli w przedziale czasu $[t_i, t_{i+1}]$ stan $x^*(t)$ systemu rzeczywistego znajduje się poza pewną kulą $K(0, \alpha_L^{-1}(\varepsilon\delta^{-1}) + \varepsilon) \subset R^n$. W pozostałych przypadkach wskaźnik jakości może maleć bądź rosnać nawet wtedy, gdy znajdziemy parę T_{i+1}, u^{i+1} minimalizującą $J(u^{i+1}, T_{i+1}, \hat{x}(t_{i+1}))$. Promień kuli K maleje przy zmniejszaniu poziomu zakłóceń. Gdyby nie było zakłóceń, to $\varepsilon = 0$, kula K redukuje się do punktu i w konsekwencji otrzymujemy algorytm z poprzedniego rozdziału. Musimy teraz nieco zmodyfikować schemat 2.1, żądając, aby wskaźnik jakości malał poza kulą K . Ponieważ na ogół nie znamy liczby ε , to musimy dopuścić wzrost wskaźnika jakości o pewną z góry zadaną liczbę $\Delta r > 0$. Rozważmy więc następujący uodporniony schemat sterowania.

Schemat 3.1

0. Podstaw $i = 0, t_i = i\delta, r = \infty, \Delta r > 0$ (jeśli jest to możliwe, to $\Delta r = \varepsilon$).
1. Wyznacz estymatę stanu obiektu \hat{x}_{t_i} .
2. Spróbuj rozwiązać $P^I(t_i, \hat{x}_{t_i}, r)$.
3. Jeżeli rozwiązanie nie istnieje, podstaw $r = r + \Delta r$ i idź do 2.
4. Podstaw $r = J(u^i, T_i, \hat{x}_{t_i})$.
5. Zastosuj początkową część sterowania u^i w przedziale czasu $t \in [t_i, t_i + \delta)$.
6. Podstaw $i \leftarrow i + 1, t_i = i\delta$, i idź do 1.

Aby wykazać, że trajektoria x^* pozostaje w pewnym otoczeniu zera, musimy przyjąć dodatkowe założenie.

Założenie Z2

Istnieje funkcja $\varphi \in \mathcal{K}$ taka, że warunek $J_i(u^i, T_i, x_{t_i}) - T_{\min} < v, v > 0$, pociąga za sobą $\|x^i(t)\| \leq \varphi(v)$ w przedziale czasu $[t_i, t_i + \delta]$, gdzie $x^i: [t_i, t_i + T_i] \rightarrow R^n, T_i \geq T_{\min}$ jest rozwiązaniem równania (1.1) z warunkiem początkowym $x^i(t_i) \in R^n$ i sterowaniem dopuszczalnym $u^i \in PC([t_i, t_i + T_i], R^m)$.

Okazuje się, że w pewnych przypadkach Z2 jest konsekwencją Z1.

Lemat 3.1

Jeżeli funkcja $\alpha_L \in \mathcal{K}$ ma pochodną lokalnie ograniczoną, to istnieje co najmniej jedna funkcja $\varphi \in \mathcal{K}$ spełniająca Z2.

Dowód

Wykażemy, że spełnione są założenia lematu 1.3. Ponieważ funkcja x^i jest rozwiązaniem równania (1.1) ze sterowaniem dopuszczalnym, to jest ona ciągła i ograniczona w przedziale $[t_i, t_i + T_i]$. Z twierdzenia 1.1 wynika, że $\|x^i(t)\| \leq (M_1 + M_2 T_i)e^{L T_i}$.

Z założenia Z2 mamy

$$T_i < J_i(u^i, T_i, x^i(t_i)) < v + T_{\min},$$

zatem $\|x^i(t)\| < M_0(v)$, gdzie $M_0(v) = (M_1 + M_2(T_{\min} + v))e^{L(T_{\min} + v)}$.

Norma pochodnej spełnia oszacowanie:

$$\|\dot{x}^i\| \leq M(v), \quad M(v) = \sup_{\substack{\|z\| \leq M_0(v) \\ y \in U}} \|f(z, y, p_0)\|.$$

Ze wzoru (2.6) i z założenia Z2 otrzymujemy

$$\int_{t_i}^{t_i + \delta} \alpha_L(\|x^i(t)\|) dt \leq J_i(u^i, T_i, x^i(t_i)) - T_{\min} < v,$$

więc $\int_{t_i}^{t_i + \delta} \alpha_L(\|x^i(t)\|) dt < v$.

Funkcja $\alpha_L \in \mathcal{K}$ ma pochodną lokalnie ograniczoną, zatem istnieje niemalejąca funkcja ciągła $M_\alpha(v)$, spełniająca warunek $\alpha'_L(v) < M_\alpha(v)$. Na mocy lematu 1.3 mamy $\varphi(v) = \alpha_L^{-1}(\beta(v; M(v)M_\alpha(v); \delta))$, gdzie β jest określona wzorem (1.5). Liczby $M(v), M_0(v)$ zależą w sposób ciągły od parametru v . Iloczyn $M(v)M_\alpha(v)$ jest niemalejący. Funkcja β jest ciągła względem pierwszych dwóch argumentów, ściśle rosnąca względem v oraz $\beta(0, M(0)M_\alpha(0), \delta) = 0$. Ponieważ $\alpha_L \in \mathcal{K}$, to również $\alpha_L^{-1} \in \mathcal{K}$, zatem $\varphi \in \mathcal{K}$. \square

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1

Dla dowolnych liczb $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e$ oraz dowolnego warunku początkowego $x^*(0) \in \mathbb{R}^n$ istnieje liczba $\varepsilon > 0$, funkcja $R(\varepsilon) \in \mathcal{K}$ oraz kula $K(0, R(\varepsilon)) \subset \mathbb{R}^n$ taka, że trajektoria x^* generowana przez schemat 3.1 osiąga $K(0, R(\varepsilon))$ w skończonym czasie oraz pozostaje w $K(0, R(\varepsilon))$ w chwilach późniejszych. Ponadto dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją takie maksymalne poziomy zakłóceń $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e$, że trajektoria osiąga $K(0, R(\varepsilon))$

w skończonym czasie oraz pozostaje w $K(0, R(\epsilon))$, w chwilach późniejszych. Dodatkowo zachodzi warunek $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$.

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia 3.1, wykażemy pewien użyteczny lemat.

Lemat 3.2

Niech V oznacza funkcję wartości dla problemu $P(t_i, \hat{x}(t_i))$ (zob. def. 2.1). Jeżeli $\hat{x}(t_i) \in B \subset \mathbb{R}^n$, gdzie B jest kulą domkniętą o środku w zerze i promieniu R , to można znaleźć horyzont T_i oraz sterowanie dopuszczalne u^i spełniające warunek $J(u^i, T_i, \hat{x}(t_i)) < C$, gdzie $C > \sup V(B)$.

Dowód

Funkcja wartości dla problemu $P(t, x_t)$ jest ciągła, więc osiąga na kuli B swoje kresy. Zatem $V(\hat{x}(t_i)) \leq \sup V(B)$. Wynika stąd, że istnieje co najmniej jedno sterowanie spełniające tezę lematu. \square

Dowód twierdzenia 3.1

Oznaczmy $r_i = J(u^i, T_i, \hat{x}(t_i)) - T_{\min}$. Z założenia Z2 wiemy, że trajektorie przewidywane muszą spełniać warunek $\|x^i(t)\| \leq \varphi(r_i)$. Ponieważ trajektorie x^* , x^i spełniają w przedziale czasu $[t_i, t_{i+1}]$ nierówność $\|x^i(t) - x^*(t)\| < \epsilon$, to możemy napisać

$$\|x^*(t)\| = \|x^*(t) - x^i(t) + x^i(t)\| \leq \|x^*(t) - x^i(t)\| + \|x^i(t)\| < \epsilon + \|x^i(t)\| \leq \epsilon + \varphi(r_i).$$

Jeżeli $\|x^*(t)\| > \alpha_L^{-1}(\epsilon \delta^{-1}) + \epsilon$ w przedziale czasu $[t_i, t_{i+1}]$, to (zob. wniosek 3.1) istnieje horyzont T_{i+1} oraz sterowanie dopuszczalne u^{i+1} takie, że $r_{i+1} < r_i$.

Zatem $\|x^*(t)\| \leq \epsilon + \varphi(r_{i+1}) < \epsilon + \varphi(r_i)$ dla $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$.

Jeżeli x^* nadal spełnia warunek $\|x^*(t)\| > \alpha_L^{-1}(\epsilon \delta^{-1}) + \epsilon$ dla $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$, to znowu możemy wybrać horyzont T_{i+2} oraz sterowanie dopuszczalne u^{i+2} takie, że $r_{i+2} < r_{i+1}$. Po skończonej liczbie kroków w pewnej chwili $t \in [t_k, t_{k+1}]$, trajektoria x^* osiągnie kulę $K(0, \alpha_L^{-1}(\epsilon \delta^{-1}) + \epsilon)$. Wówczas może się zdarzyć, że nie będzie możliwe znalezienie sterowania u^{k+1} spełniającego warunek $r_{k+1} < r_k$, ale na pewno istnieją sterowania dopuszczalne spełniające warunek $r_{k+1} < r_k + \epsilon$. Zachodzi alternatywa $r_{k+1} < r_k$ lub $r_k \leq r_{k+1} < r_k + \epsilon$. W tym drugim przypadku wskaźnik jakości może rosnąć. Okazuje się jednak, że dopóki trajektoria x^* nie opuszcza K , to kolejne estymaty stanu $\hat{x}(t_{k+j})$, $j = 0, 1, 2, \dots$ pozostają w pewnej kuli $K_1(0, \alpha_L^{-1}(\epsilon \delta^{-1}) + 2\epsilon + \eta_e)$ (zob. wzór (3.2)). Wówczas z lematu 3.2 wynika, że można znaleźć horyzont T_{k+j} oraz sterowanie dopuszczalne u^{k+j} spełniające warunek

$$J(u^{k+j}, T_{k+j}, \hat{x}(t_{k+j})) < C, \quad \text{gdzie } C = \sup V(K_1) + \epsilon.$$

W konsekwencji pętla w punktach 2 i 3 schematu 3.1 zatrzyma się po skończonej liczbie kroków, gdy $C \leq r \leq C + \Delta r$.

Na mocy Z2 mamy:

$$\|x^{k+j}(t)\| \leq \varphi(C + \Delta r) \quad \text{dla } t \in [t_{k+j}, t_{k+j+1}].$$

Ale $\|x^{k+j}(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$, skąd $\|x^*(t)\| < \varphi(C + \Delta r) + \varepsilon$, dla $t \in [t_{k+j}, t_{k+j+1}]$.

Przypuśćmy teraz, że w wyniku działania zakłóceń trajektoria x^* opuszcza kulę K . Oznacza to, że w pewnej chwili t_k , było $x^*(t_k) \in K$ oraz $x^*(t_{k+1}) \notin K$. Załóżmy, że w wyniku działania zakłóceń trajektoria x^* spełnia w przedziale czasu $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ warunek $\|x^*(t)\| > \alpha_L^{-1}(\varepsilon\delta^{-1}) + \varepsilon$. Ponieważ $\|x^*(t)\| > \alpha_L^{-1}(\varepsilon\delta^{-1}) + \varepsilon$ w przedziale czasu $[t_{k+1}, t_{k+2}]$, to musi być możliwe (zob. wniosek 3.1) znalezienie sterowania u^{k+2} spełniającego warunek $r_{k+2} < r_{k+1}$. Zatem po skończonej liczbie kroków trajektoria x^* znowu powraca do K . Wskaźnik jakości spełnia w chwilach t_k i t_{k+1} oszacowania $r_k < C + \Delta r$, $r_{k+1} < C + \Delta r + \varepsilon$. Na mocy Z2 mamy:

$$\|x^k(t)\| < \varphi(C + \Delta r), \quad \text{dla } t \in [t_k, t_{k+1}],$$

$$\|x^{k+1}(t)\| < \varphi(C + \Delta r + \varepsilon) \quad \text{dla } t \in [t_{k+1}, t_{k+2}]$$

$$\|x^{k+2}(t)\| < \varphi(C + \Delta r + \varepsilon) \quad \text{dla } t \in [t_{k+2}, t_{k+3}].$$

Ale $\|x^{k+j}(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$, skąd $\|x^*(t)\| < \varphi(C + \Delta r + \varepsilon) + \varepsilon$, dla $t \geq t_k$.

Jeżeli $\varepsilon \rightarrow 0$, to $\eta_a, \eta_w, \eta_p, \eta_e \rightarrow 0$, kule K i K_1 redukują się do punktu 0, stała $C = \sup V(K_1) + \varepsilon \rightarrow \sup V(0) = 0$ i wskaźnik jakości może być zmniejszany wszędzie poza początkiem współrzędnych. Jeżeli przyjąć $\Delta r = \varepsilon$, to

$$R(\varepsilon) = \varphi(\sup V(K_1) + 3\varepsilon) + \varepsilon \quad \text{i } R(\varepsilon) \in \mathcal{K},$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 3.1 ma istotne konsekwencje. Wynika z niego, że warunkiem dostatecznym odpornej stabilności algorytmów predykcyjnych jest możliwość wybierania sterowań zapewniających zmniejszanie wskaźnika jakości w kolejnych krokach czasowych. Oczywiście wybieranie sterowań lepszych łączy się z optymalizacją, jednakże nie muszą to być sterowania optymalne. Możliwa jest więc znaczna redukcja nakładu obliczeń przy rozwiązywaniu ZSO. Obecność zakłóceń powoduje, że stan obiektu zmierza do kuli $K(0, R(\varepsilon))$ i pozostaje w niej. Promień tej kuli maleje monotonicznie wraz ze zmniejszaniem się amplitudy zakłóceń. Analizując zależność $R(\varepsilon) = \varphi(\sup V(K_1) + 3\varepsilon) + \varepsilon$, widzimy, że wybierając inną funkcję $\varphi_1 < \varphi$ otrzymamy $R_1(\varepsilon) < R(\varepsilon)$. Podobnie, ponieważ promień kuli K_1 jest równy $\alpha_L^{-1}(\varepsilon\delta^{-1}) + 2\varepsilon + \eta_e$, to wybierając inną funkcję $\alpha_{L,1} > \alpha_L$, otrzymamy $R_1(\varepsilon) < R(\varepsilon)$. Możliwość wyboru takich „lepszych” funkcji jest jednak ograniczona, tzn. istnieją pewne funkcje $\bar{\alpha}_L, \bar{\varphi}$ dające minimalną wartość $R(\varepsilon)$.

4. Przykład

Stabilizacja wahadła na wózku

Układ wahadła na wózku jest znanym i dobrze zbadanym przykładem układu nieliniowego [12, 13]. W pracy Turnaua [12] wyprowadzono następujące równania stanu systemu:

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = \frac{v_1(x, u) + v_2(x) \cos x_2}{d(x)}, \quad \dot{x}_4 = \frac{v_1(x, u) \cos x_2 + c_4 v_2(x)}{d(x)},$$

$$d(x) = c_4 - \cos^2 x_2, \quad v_1(x, u) = u - x_4^2 \sin x_2 - b_2 x_3, \quad v_2(x) = \sin x_2 - b_3 x_4,$$

gdzie:

x_1 – położenie wózka, x_2 – kąt wahadła, x_3 – prędkość wózka, x_4 – prędkość wahadła.

Parametry modelu: $b_2 = 0,4256$, $b_3 = 3,1564 \cdot 10^{-4}$, $c_4 = 11,2135$, $u_{\max} = 3,9351$, $u_{\min} = -3,9351$, $x_{1\max} = 0,2971$, $x_{1\min} = -0,2971$, $x_{2\max} = 1$, $x_{2\min} = -1$.

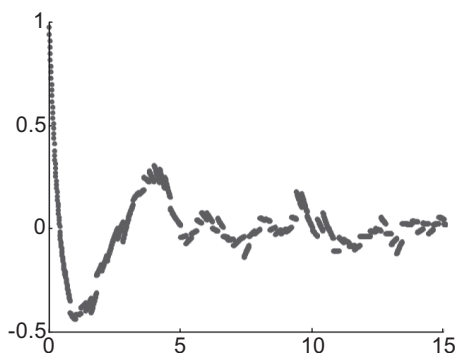
Zmienne stanu, czas oraz sterowanie zostały przeskalowane w celu uproszczenia zapisu równań. Skalowanie miało następującą postać: $t' = a_0 t$, $x'_i = a_i x_i$, $i = 1, \dots, 4$, $u' = \gamma_0 u$, przy czym znak prim oznacza zmienne w systemie rzeczywistym.

Współczynniki skalowania wynosiły: $a_0 = 0,185219$, $a_1 = 3,3654449$, $a_2 = 1,0$, $a_3 = 1,81700$, $a_4 = 5,398999$, $\gamma_0 = 2,5412$.

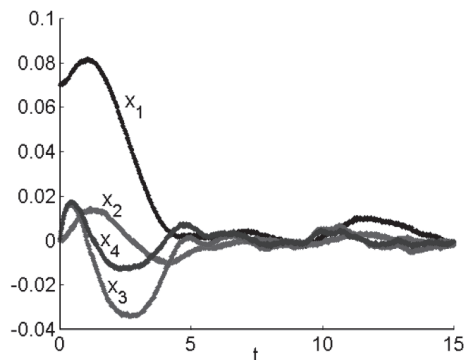
Celem sterowania była stabilizacja wahadła w górnym, niestabilnym punkcie równowagi $x_r = [0, 0, 0, 0]$. Wskaźnik jakości miał postać (2.1), a funkcje L , q były równe: $L(x, u) = x^T W x + u^T R u$, $W^T = W > 0$, $R^T = R > 0$, $q(x) = \rho x^T H x$.

Spełnienie warunku $x^i(t_i + T_i) \in \Omega$ zagwarantowano, wybierając współczynnik $\rho = 680$. Przyjęto horyzont minimalny $T_{\min} = 2,28$. Macierze wagowe były równe $R = 6,46$, $W = \text{diag}[1132, 100, 1, 1]$. Macierz H oraz zbiór $\Omega = \{x \in R^4; x^T H x \leq 0,076\}$ wyznaczono metodą opisaną w pracy autora [1].

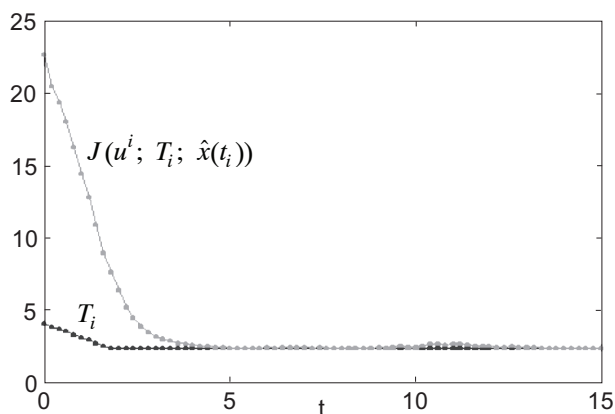
Sprawdzono, że tak określony wskaźnik jakości spełnia założenia Z1, Z2. Warunek początkowy był równy $x_0 = [0,07 \ 0 \ 0 \ 0]$. Okres wyliczania sterowania wynosił $\delta = 0,2$. Minimalizacja wskaźnika jakości odbywała się przy użyciu zmodyfikowanej przez autora wersji algorytmu MSE [11]. Optymalizacja sterowania miała charakter przybliżony i była przerywana gdy spadek wskaźnika jakości był większy niż 10% jego poprzedniej wartości. Proces optymalizacji przerywano też, gdy norma gradientu osiągnęła wartość mniejszą niż 0,1% wartości początkowej w danym kroku czasowym. Zakłócenia wprowadzono, dodając do stanu obiektu symulowanego w każdym kroku całkowania wektor losowy o rozkładzie normalnym, średniej 0 i odchyleniu standardowym $3 \cdot 10^{-4}$. Wyniki symulacji przedstawiono na rysunkach 4–6.



Rys. 4. Sterowanie, zmienne bezwymiarowe



Rys. 5. Trajektoria, zmienne bezwymiarowe



Rys. 6. Wskaźnik jakości oraz horyzont w poszczególnych chwilach czasu, zmienne bezwymiarowe

5. Wnioski

Z udowodnionych twierdzeń wynikają ważne wnioski dla praktycznej implementacji algorytmów predykcyjnych. Po pierwsze – istnieje teoretyczna możliwość konstruowania stabilnych schematów sterowania predykcyjnego bez konieczności dokładnej optymalizacji, a nawet bez użycia algorytmów optymalizacji dynamicznej. Schematy takie wymagają jedynie znajdowania odpowiednich dopuszczalnych rozwiązań suboptymalnych. Na ogół jednak musimy do tego celu używać algorytmów optymalizacji dynamicznej. Po drugie – algorytmy predykcyjne dopuszczają suboptymalne rozwiązania ZSO bez utraty odporności na zakłócenia, błędy modelowania i estymacji stanu. Jak wiadomo, znajdowanie rozwiązań suboptymalnych jest zwykle dużo łatwiejsze niż znajdowanie rozwiązań optymalnych. Po trzecie – odporność algorytmu na błędy estymacji stanu umożliwia stosowanie obserwato-

rów stanu pod warunkiem, że błąd estymacji stanu jest ograniczony. Po czwarte – twierdzenia 2.1 i 3.1 oraz założenie Z1 pokazują, że warunkiem wystarczającym stabilności jest zmniejszanie wskaźnika jakości w kolejnych krokach czasowych. Wynika stąd, że optymalizację można przerwać, jeżeli uzyskało się poprawę wskaźnika jakości. Ma to szczególne znaczenie w przypadku słabej zbieżności algorytmu optymalizacji oraz przy istotnych ograniczeniach czasowych. Po piąte – wpływ zakłóceń powoduje, że trajektoria utrzymuje się w pewnym otoczeniu punktu równowagi. Wielkość tego otoczenia rośnie przy zwiększaniu amplitudy zakłóceń. Z założenia Z1 i wzoru (3.9) wynika, że przewidywana poprawa wskaźnika jakości rośnie wraz ze wzrostem odległości od punktu równowagi. Z drugiej strony powiększenie wskaźnika jakości spowodowane zakłóceniami jest ograniczone. Wynika stąd, że wpływ zakłóceń maleje wraz ze wzrostem odległości od punktu równowagi. Założenia poczynione w pracy są znacznie słabsze niż założenia dostępne w literaturze. Findeisen dowodzi bardzo podobnych własności przy dużo silniejszych założeniach [4]. W szczególności żąda on, aby prawo sterowania $u(t, \hat{x}_t)$ generowane w wyniku rozwiązywania ZSO było lokalnie (w otoczeniu zera) ciągłe i lipschitzowskie względem \hat{x}_t . Ponadto zakłada, że funkcja wartości spełnia lokalnie warunek Lipschitza. W podejściu zaproponowanym w tej pracy założenia są znacznie słabsze. Założenia Z1 i Z2 są typowe w algorytmach predykcyjnych. Nieco ostrzejszy jest warunek Z2. Założenie o jednostajnej ciągłości jest stosunkowo łatwe do spełnienia. Celem dalszych badań powinno być precyzyjne określenie zależności pomiędzy poziomem zakłóceń a wielkością otoczenia zera, do którego zmierza trajektoria.

Literatura

- [1] Bania P.: *Wyznaczanie ograniczeń stanu końcowego w nieliniowej regulacji predykcyjnej*. Materiały piątej krajowej konferencji „Metody i systemy komputerowe” CMS’05, Kraków 2005
- [2] Chen H., Allgöwer F.: *A Quasi Infinite Horizon Nonlinear Model Predictive Control Scheme with Guaranteed Stability*. Automatica, vol. 34, No. 10, 1998, p. 1205–1217
- [3] Findeisen R., Imsland L., Allgöwer F., Foss B.A.: *State and Output Feedback Nonlinear Model Predictive Control: An Overview*. European Journal of Control, 9, 2003, 190–2006
- [4] Findeisen R., Imsland L., Allgöwer F., Foss B.A.: *Output Feedback stabilization of Constrained Systems With Nonlinear Predictive Control*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 13, 2003, 211–227
- [5] Fontes A.C.C., Magni L.: *Min–Max Model Predictive Control of Nonlinear Systems Using Discontinuous Feedbacks*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, No. 10, October 2003, pp. 1750–1755
- [6] Fontes F.A.: *A general Framework to Design Stabilizing Nonlinear Model Predictive Controller*. Syst. Contr. Letters, 42(2), 2000, 127–143
- [7] Ledayew Y.S.: *Robustnes of dicontinuous feedback in control under disturbance*. Proc. of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada USA, December 2002
- [8] Logemann H., Ryan E.P.: *Asymptotic Behaviour of Nonlinear Systems*. The Mathematical Association of America Monthly, December 2004 (<http://www.maa.org>)
- [9] Mayne D.Q., Michalska H.: *Receding Horizon Control of Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 35, 1990, 814–824

-
- [10] Michalska H., Mayne D.Q.: *Robust Receding Horizon Control of Constrained Nonlinear Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 38, 1993, 1623–1633
 - [11] Szymkat M., Korytowski A.: *Method of monotone structural evolution for control and state constrained optimal control problems*. Proc. of the European Control Conference ECC, 1–4 September 2003, University of Cambridge, UK
 - [12] Turnau A.: *Sterowanie docelowe układami nieliniowymi w czasie rzeczywistym – algorytmy inteligentne i optymalne*. Kraków, UWND AGH 2002
 - [13] Turnau A., Korytowski A., Szymkat M.: *Time optimal control for the pendulum-cart system in real-time*. Proc. 1999 IEEE CCA, Kohala Coast, Hawai'i, August 22–27, 1999, 1249–1254